AULA

66

Sólidos semelhantes

Introdução

Um problema matemático, que despertou curiosidade e mobilizou inúmeros cidadãos na Grécia Antiga, foi o da ***duplicação do cubo***. Ou seja, dado um cubo de aresta **a**, qual deverá ser a medida da aresta de outro cubo que tenha o dobro do volume do primeiro?

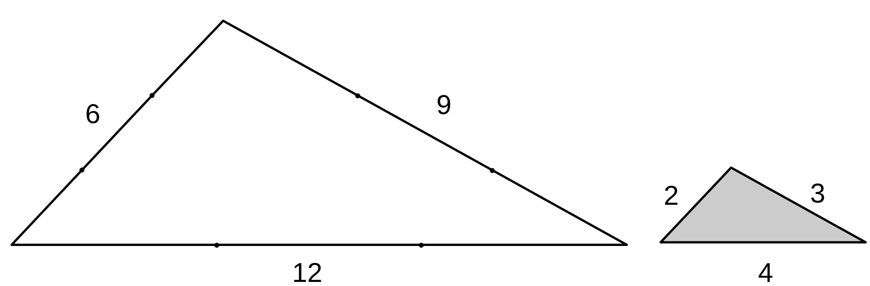
Hoje em dia, esse problema não apresenta grandes dificuldades. Será que você é capaz de resolvê-lo? Caso não consiga, não desanime! Leia a aula e, ao final, volte e tente novamente!

Nossa aula

Nesta aula, vamos estudar a relação que existe entre as áreas e os volumes de figuras semelhantes. Mas, antes de entrarmos no tema desta aula, vamos recordar o conceito de semelhança visto na Aula 21.

Recordando semelhança

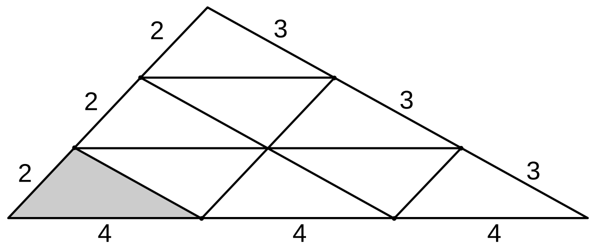
Abaixo estão dois triângulos semelhantes.



Podemos dizer que duas figuras são semelhantes quando uma delas é ***ampliação*** ou ***redução*** da outra. Os dois triângulos da figura são semelhantes. Observe que seus ângulos são iguais e seus lados são proporcionais, na mesma razão, isto é:

$$\boxed{\frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4}}$$

O número 3 é chamado de ***razão de semelhança*** e geralmente é representado pela letra **k**. No exemplo anterior, k = 3.

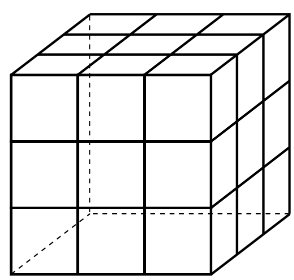


Observe ainda que são necessários $3^2 = 9$ triângulos menores para cobrir totalmente o maior. É só contar!

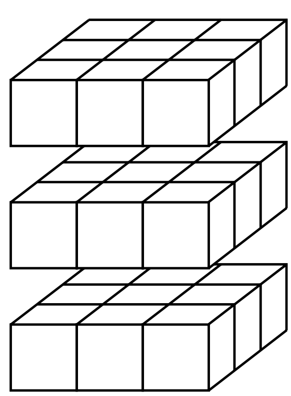
Podemos concluir que, se as dimensões de uma figura são o triplo da outra, então, a área dessa figura será igual a $3^2 = 9$ vezes a área da outra.

O cubo mágico

Há um quebra cabeça bastante conhecido, chamado "cubo mágico", que consiste em um cubo dividido em diversos cubos menores.



Observando melhor, vemos que cada aresta desse cubo foi dividida em três partes iguais. Se você olhar atentamente, verá que cada face ficou dividida em nove quadrados. Ou seja: dividindo cada aresta em três partes iguais, a área de cada face ficou dividida em $3^2 = 9$ quadrados menores. Você também pode observar que o cubo ficou dividido em cubinhos menores, cujas arestas são iguais à terça parte da aresta do cubo inicial. Quantos cubinhos caberão no cubo maior?



Observe que podemos dividir o cubo em três placas, sendo cada placa formada de $3^2 = 9$ cubinhos. Assim, teremos $3 \cdot 3^2 = 3^3 = 27$ cubinhos.

Isso nos permite concluir que, se a razão entre as medidas das arestas dos dois cubos (menor e maior) é k = 3, a razão entre suas áreas é $k^2 = 3^2 = 9$ e a razão entre seus volumes é $k^3 = 3^3 = 27$.

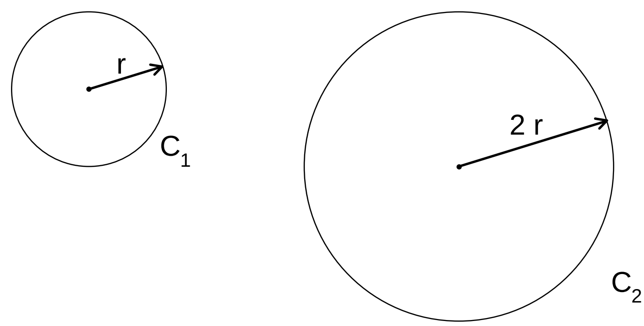
De maneira geral, se duas figuras são semelhantes, então, as medidas de uma valem ***k vezes*** as medidas da outra, onde o número **k** representa a razão de semelhança das duas figuras (ou dois sólidos). Então, a área de uma valerá $\mathbf{k^2}$ vezes a área da outra e o volume de uma valerá $\mathbf{k^3}$ vezes o volume da outra. Esses fatos podem ser representados no quadro abaixo:

	FIGURAS SEMELHANTES	
Razão entre comprimentos	Razão entre áreas	Razão entre volumes
k	$\mathbf{k^2}$	$\mathbf{k^3}$

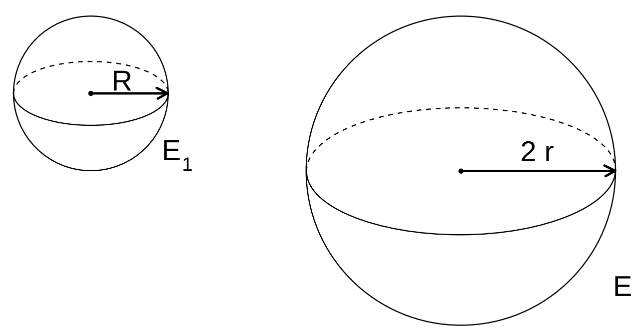
Vamos ver alguns exemplos:

EXEMPLO 1

Você já sabe que, se dobrarmos o raio do círculo, a área aumentará quatro vezes.



Mas, o que acontece com o volume da esfera, se dobrarmos seu raio?



$$\boxed{V_1 = \frac{4\pi R^3}{3}}$$

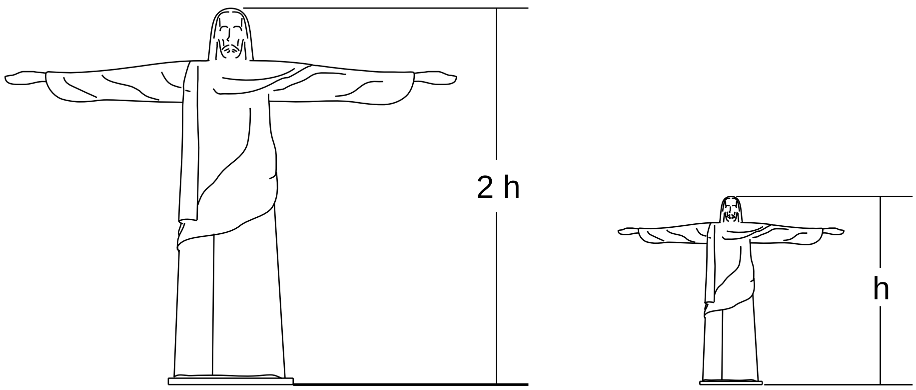
$$V_2 = \frac{4\pi(2R)^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 8 \cdot R^3}{3}$$

$$\boxed{V_2 = 8\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)}$$

Comparando V_1 e V_2, temos que V_2 é 8 vezes maior que V_1.

EXEMPLO 2

Uma loja vende miniaturas do Cristo Redentor confeccionadas em madeira. São dois tamanhos das miniaturas, sendo que uma delas tem a metade da altura da outra.



Sabendo que o preço é proporcional ao volume de madeira gasto na confecção das miniaturas, qual deve ser o preço da maior, se a menor custa R$ 5,00?

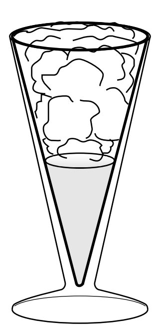
Solução:

Como as duas imagens são semelhantes entre si, a razão entre seus comprimentos é constante e igual a $k = 2$ (razão da maior para a menor). Logo, a razão entre seus volumes valerá $k^3 = 2^3 = 8$.

Como o preço deve ser proporcional ao volume, e o volume da estatueta maior é oito vezes o volume da menor, seu preço deve ser R$ 5,00 x 8 = R$ 40,00.

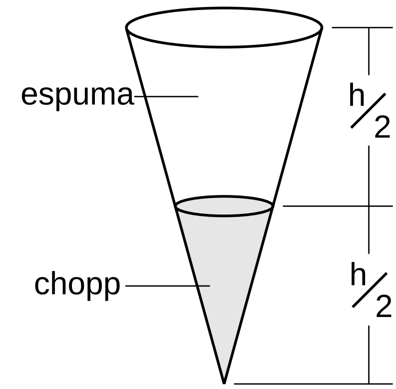
A Matemática e o copo de chope

Seu José adora tomar um chopinho com os amigos nos fins de semana. Ele costuma pedir um chope na pressão. O garçon lhe serve uma tulipa, cujo interior tem a forma praticamente cônica, com chope até à metade da altura e o resto sendo ocupado por espuma.



Qual a razão entre a quantidade de chope e a quantidade de espuma que vem na tulipa de seu José?

Para resolver esse problema, seu José considerou a parte interna da tulipa como sendo um cone perfeito.



Daí, ele reparou que a parte de baixo, ocupada pelo chope, também é um cone. E mais: é um cone semelhante ao cone inteiro. A razão da semelhança é $k = \frac{1}{2}$, pois as medidas do cone da parte de baixo equivalem à metade das medidas do cone inteiro.

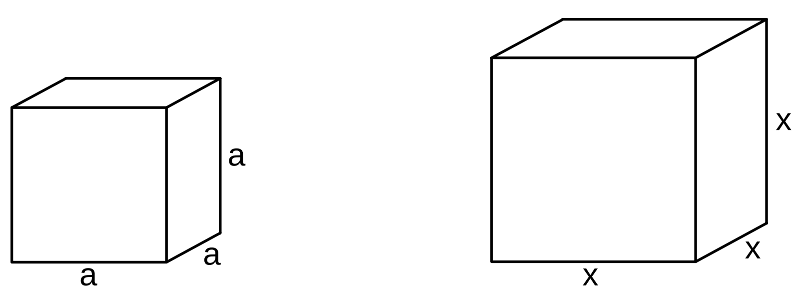
Então a razão entre seus volumes é $k^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Ou seja, o volume de chope na tulipa, corresponde a apenas $\frac{1}{8}$ do que ela pode conter!

Foi aí que seu José levou um susto: se $\frac{1}{8}$ é de chope, então $\frac{7}{8}$ $(1 - \frac{1}{8})$ são de espuma!

Assim, temos $\frac{1}{8}$ de chope e $\frac{7}{8}$ de espuma. Logo, a razão é de 1 # 7 (1 para 7).

O problema da duplicação do cubo

Vamos resolver o problema proposto na introdução desta aula.



Devemos ter: $V_2 = 2\,V_1$

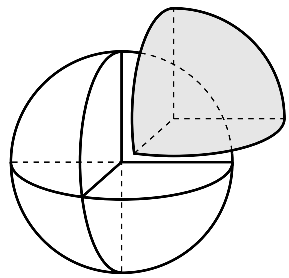
Portanto: $x^3 = 2a^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2a^3} \Rightarrow x = a\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{2}$ é um número irracional e vale, aproximadamente, 1,25991. Você pode comprovar esse resultado com uma calculadora científica que tenha a tecla $\sqrt[3]{\ }$ ou, experimentalmente, isto é, multiplicando $1,259 \times 1,259 \times 1,259$.

Exercícios

Exercício 1

Uma pessoa constrói uma bola esférica de 8 cm de diâmetro, utilizando massa de modelar. Em seguida, ela corta essa esfera em oito partes iguais (veja a figura).



De cada parte ela constrói uma nova esfera. Qual a medida do diâmetro dessas novas esferas?

Exercício 2

Um cubo teve suas arestas aumentadas de 20% do seu tamanho. Qual foi o percentual de aumento do volume desse cubo?

Exercício 3

A maquete de uma praça é feita na escala 1:50. Se a praça tem 6.000 m^2 de área, qual será a área da maquete?

Exercício 4

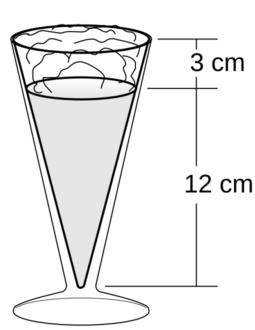
Pai e filho possuem corpos de formas semelhantes. Porém, enquanto o pai mede 1,75 m, seu filho mede 1,40 m. Se o filho pesa 40 kg, qual deverá ser, aproximadamente, o peso do pai?

Exercício 5

Uma pessoa vai revestir o chão do quarto e da sala de sua casa, com um mesmo tipo de lajota. As medidas da sala valem exatamente o dobro das medidas do quarto. Se ela necessita de seis caixas de lajota para revestir o quarto, quantas caixas serão necessárias para revestir a sala?

Exercício 6

Uma tulipa de chope tem 15 cm de profundidade e sua capacidade é de 300 ml. O chope (bem tirado, isto é, na pressão) é servido com 3 cm de espuma. Calcule a quantidade de chope contido na tulipa?



Exercício 7

Você já estudou, em Química, que, nos átomos, os elétrons giram em torno do núcleo a uma distância de 104 vezes o raio do núcleo. Uma pessoa resolveu montar um modelo de átomo, escolhendo, para representar seu núcleo, uma esfera de isopor com 1 cm de raio. A que distância dessa esfera ela deverá colocar os elétrons?

Exercício 8

Um triângulo teve seus lados aumentados de 30%, obtendo-se um novo triângulo semelhante ao primeiro.

a) Qual a razão de semelhança?

b) Qual foi o percentual de aumento de sua área?

Exercício 9

No interior de uma caixa cúbica de aresta **a**, colocamos uma esfera de diâmetro **a**. A seguir, fechamos a caixa. Essa esfera cabe justinho no interior da caixa. Uma esfera, um pouco maior, já não entra na caixa. Dizemos, em Geometria, que a esfera está inscrita na caixa.

a) Que relação existe entre os volumes do cubo e da esfera?

b) Que relação existe entre as áreas de suas superfícies?