AULA

70

Revisão III

Introdução

Nesta terceira parte da revisão do nosso curso, vamos abordar problemas de análise combinatória, probabilidade, trigonometria e logaritmos, com o uso das tabelas e da calculadora.

Nossa aula

EXEMPLO 1

Um grupo de dez pessoas está planejando um passeio, usando dois automóveis com cinco pessoas em cada um. Entre as pessoas, existem seis que sabem dirigir e, além disso, Antônio e Paula estão namorando e gostariam de ir no mesmo automóvel.

De quantas maneiras podemos distribuir essas pessoas nos dois automóveis?

Solução:

Se no grupo de dez pessoas existem seis que dirigem, então, qualquer que seja a distribuição das pessoas, teremos em cada grupo pelo menos um motorista. Mesmo que se coloque cinco motoristas em um grupo, sobrará um motorista no outro grupo. Não precisamos então nos preocupar com os motoristas.

Outro fato que devemos observar é que basta escolher ***um grupo de cinco pessoas***. Escolhendo um grupo, obrigatoriamente, as pessoas que sobrarem formarão o outro grupo.

Vamos, então, formar o grupo onde estarão Antônio e Paula. Para formar esse grupo, basta escolher mais três pessoas entre as oito restantes. O número de possibilidades de fazer essa escolha é dada pela ***combinação*** de oito pessoas tomadas três a três. Vamos, então, recordar a fórmula das combinações que aprendemos na Aula 51.

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Como temos oito pessoas para escolher três, então, no nosso caso, n = 8 e p = 3.

Logo, $C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 56$

Temos, então, 56 possibilidades de dividir as dez pessoas em dois grupos, mantendo Antônio e Paula juntos.

EXEMPLO 2

João propõe a Luiz uma aposta: eu vou jogar esse dado por três vezes. Se aparecer, em alguma jogada, o número 6, eu ganho. Se não aparecer nenhuma vez o número 6, você ganha. Luiz topou a aposta.

Quem tem mais probabilidades de ganhar?

Solução:

Se o 6 aparecer na primeira jogada, João ganha e não há mais necessidade de continuar. Se o 6 não aparecer na primeira jogada, mas aparecer na segunda, novamente João ganha. Ainda, se o 6 não aparecer nas duas primeiras mas aparecer na terceira, novamente a vitória é de João. Como podemos calcular as probabilidades de João? Pense um pouco e dê um palpite antes de continuar e ver a solução.

A probabilidade de que o 6 apareça em uma jogada de um dado é $\frac{1}{6}$. Logo, a probabilidade de que o 6 ***não*** apareça em uma jogada é de $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

No lugar de pensar nas probabilidades de João, vamos pensar nas probabilidades de Luiz. Repare que é bem mais fácil.

Para Luiz ganhar, o 6 não pode aparecer em nenhuma das três jogadas. A probabilidade de que isso aconteça é:

$$\boxed{p = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216} \text{ @ } 0,579 = 57,9\%}$$

Logo, a probabilidade de João ganhar é $1 - 0,579 = 0,421 = 42,1\%$.

Portanto, Luiz estava certo em topar a aposta. Ele tem mais probabilidades de ganhar que João.

EXEMPLO 3

Em certo país, a população cresce 4% a cada ano. Dentro de quantos anos a população desse país será três vezes maior que hoje?

Solução:

Imaginando que a população desse país seja hoje igual a **x**, temos que, no ano que vem, ela será igual a:

$$\boxed{x + 4\% \text{ de } x = x + 0,04 \cdot x = x \cdot 1,04}$$

Temos, então:

hoje:	x	habitantes
daqui a 1 ano:	$x \cdot 1,04$	habitantes
daqui a 2 anos:	$x \cdot 1,04^2$	habitantes
daqui a 3 anos:	$x \cdot 1,04^3$	habitantes
....	....	....
daqui a **n** anos:	$x \cdot 1,04^n$	habitantes

Se daqui a **n** anos, a população vai triplicar, teremos:

$x \cdot 1{,}04^n = 3x$ ou $1{,}04^n = 3$

Para calcular **n**, devemos aplicar ***logaritmo*** aos dois lados da equação:

$\log 1{,}04^n = \log 3$

Vamos, agora, recordar as propriedades dos logaritmos que aprendemos na aula 60.

$$\log AB = \log A + \log B$$

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

$$\log A^n = n \cdot \log A$$

Usamos, inicialmente, a 3ª propriedade:

$\log 1{,}04^n = \log 3$

$n \cdot \log 1{,}04 = \log 3$

Repare que $1{,}04 = \frac{104}{100}$. Então, usando a 2ª propriedade, temos:

$n \cdot \log \frac{104}{100} = \log 3$

$n\,(\log 104 - \log 100) = \log 3$

Sabemos que o logaritmo de 100 é igual a 2. Para os logaritmos de 3 e de 104, devemos consultar a tabela que se encontra no livro. As mantissas são:

NÚMERO	MANTISSA
3	4771
104	0170

Como 3 está entre 1 e 10, sua característica é 0 e, como 104 está entre 100 e 1.000, sua característica é 2. Temos, então, log 3 = 0,4771 e log 104 = 2,017. Daí,

$n\,(\log 104 - \log 100) = \log 3$

$n\,(2{,}017 - 2) = 0{,}4771$

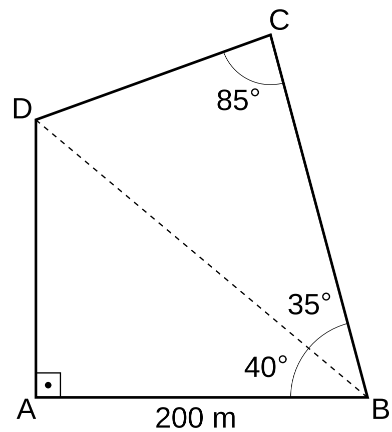
$n \cdot 0{,}017 = 0{,}4771$

$n = \frac{0{,}4771}{0{,}017} @ 28$

Concluímos, então, que, mantendo o ritmo de crescimento, a população desse país terá triplicado em 28 anos.

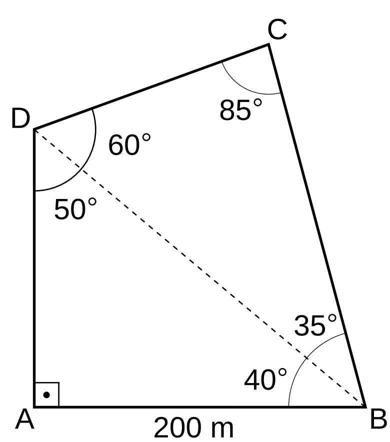
EXEMPLO 4

Um terreno ABCD tem a forma de um quadrilátero irregular, como mostra a figura abaixo. Mediu-se, com uma trena, a distância AB = 200 m e, com um teodolito, os ângulos que aparecem na figura. Calcule o perímetro e a área do terreno.



Solução:

Como a soma dos ângulos de qualquer triângulo é 180º, podemos calcular os ângulos no ponto D da figura.



Vamos, agora, usar a trigonometria que desenvolvemos nas Aulas 40 e 43, para calcular os demais comprimentos que aparecem na figura. Será também necessário consultar a tabela trigonométrica que se encontra no livro.

$$\frac{AD}{AB} = \text{tg}\,40° \text{®} \quad \frac{AD}{200} = 0,8391$$

AD = 200 · 0,8391 = 167,82m

$$\frac{AB}{DB} = \cos 40° \text{®} \quad \frac{200}{DB} = 0,76604$$

$$DB = \frac{200}{0,76604} = 261,08\text{m}$$

Agora, vamos aplicar duas vezes a lei dos senos no triângulo BCD.

$$\frac{DB}{\text{sen}\,85^o} = \frac{DC}{\text{sen}\,35^o} \qquad \frac{261,08}{0,99619} = \frac{DC}{0,57358} \qquad \frac{261,08 \cdot 0,57358}{0,99619} = DC$$

DC=150,32m

$$\frac{DB}{\text{sen}\,85^o} = \frac{BC}{\text{sen}\,60^o} \qquad \frac{261,08}{0,99619} = \frac{BC}{0,86603} \qquad \frac{261,08 \cdot 0,86603}{0,99619} = BC$$

BC=226,97m

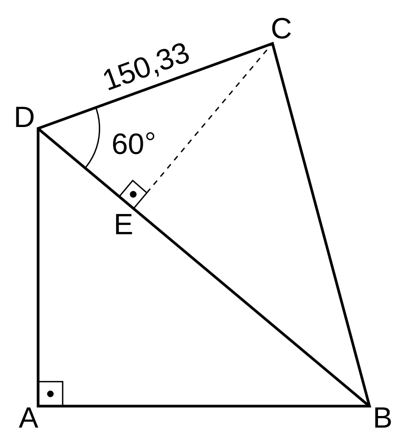
Já podemos então calcular o perímetro do terreno. A soma de todos os seus lados é:

$$\boxed{200 + 167{,}82 + 150{,}32 + 226{,}97 = 745{,}11 \text{ m}}$$

Aí está: para dar uma volta completa nesse terreno, andaremos 745,11 m. Para calcular sua área, usaremos os triângulos ABD e BCD. O triângulo ABD é retângulo em A. Logo, sua área é:

$$S_{ABD} = \frac{AB \cdot AD}{2} = \frac{200 \cdot 167,82}{2} = 16782\,m^2$$

O triângulo BCD é escaleno. Considerando BD como sua base, calcularemos inicialmente sua altura CE.



$$\frac{CE}{DC} = \text{sen}\,60^o ® \quad \frac{CE}{150,33} = 0,86603 \qquad CE = 150{,}33 \cdot 0{,}86603 = 130{,}19\text{m}$$

A área do triângulo BCD será então:

$$S_{BCD} = \frac{DB \cdot CE}{2} = \frac{261,08 \cdot 130,19}{2} = 16995\,m^2$$

A área total do terreno será então a soma das duas partes:

$$S = 16782 + 16994 = 33776\text{m}^2$$