Física 1
Cinemática Escalar
e Vetorial

Pré-Vestibular

Teoria e Exercícios Propostos

EDITORA COC
www.editora.coc.com.br
Editora COC – Empreendimentos Culturais Ltda.
R. Deolinda, 70, esq. com a Av. Franc. Junqueira
Tel.: (16) 3603.9500 – CEP 14091-018
Jardim Macedo – Ribeirão Preto – SP

Capítulo 01. Fundamentos da Cinemática

Capítulo 02. Movimento Uniforme

Capítulo 03. Aceleração Escalar

PV2D-07-FIS-11

PV2D-07-FIS-11

Capítulo 01. Fundamentos da Cinemática

A Mecânica é o ramo da Física que tem por finalidade o estudo do movimento e do repouso. É dividida em Cinemática, Dinâmica e Estática.

A Cinemática descreve o movimento de um corpo sem se preocupar com suas causas. A Dinâmica estuda as causas do movimento. A Estática analisa as condições para se manter um corpo equilibrado ou em repouso.

Nesta etapa iniciaremos a Cinemática, cujo método de descrição de movimentos emprega, basicamente, as seguintes grandezas: **espaço**, **tempo**, **velocidade** e **aceleração**.

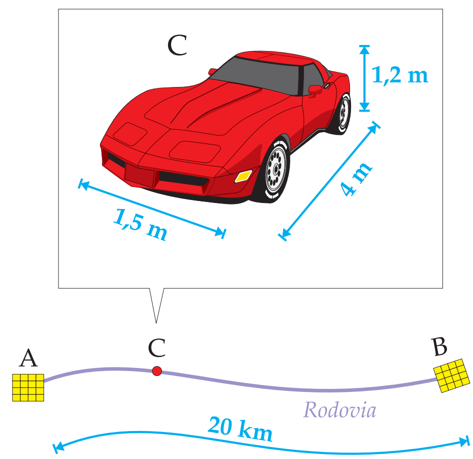
1. Ponto Material

Quando estudamos o movimento de um corpo, muitas vezes é necessário levarmos em conta o seu comprimento, a sua largura e a sua altura. Porém, em certos casos, essas dimensões (comprimento, largura e altura) são muito pequenas em relação ao percurso que esse corpo vai descrever; aí então, desprezamos essas dimensões e consideramos o corpo como se fosse um **ponto material**.

> **Ponto material** ou **partícula** é um corpo cujas dimensões são desprezíveis quando comparadas com a extensão de seu movimento.

Considere um automóvel em duas situações de movimento. Quando este automóvel fizer manobras dentro de uma garagem, ele **não** pode ser encarado como um ponto material, porque devemos levar em conta o seu comprimento, largura e a altura para que não haja colisão.

Mas quando este carro fizer o percurso de 20 km entre duas cidades A e B, como ilustra a figura a seguir, ele pode ser considerado um ponto material, porque seus 4 m de comprimento tornam-se desprezíveis se comparados aos 20 000 m de percurso.



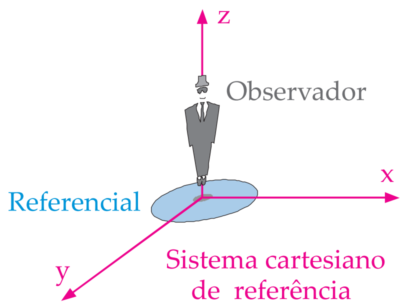
2. Móvel

É muito comum no desenvolvimento teórico ou no enunciado de um exercício, falarmos em corpos que estão associados ao nosso cotidiano, como o movimento de uma pessoa, de um automóvel e assim por diante. Muitas vezes, não há necessidade de se especificar qual é o corpo que está em movimento, se é uma moto, um carro ou uma bicicleta, então o chamamos genericamente de **móvel**.

3. Referencial

Para descrever o movimento, o observador deve definir um **sistema de referência** ou **referencial** em relação ao qual o móvel será analisado.

Referencial é o **local** onde um observador fixa um sistema de referência para, a partir do qual, estudar o movimento ou o repouso de objetos.



4. Movimento e Repouso

Dizemos que um corpo se encontra em **movimento**, sempre que a sua posição se modificar, no decorrer do tempo, em relação a um certo referencial.

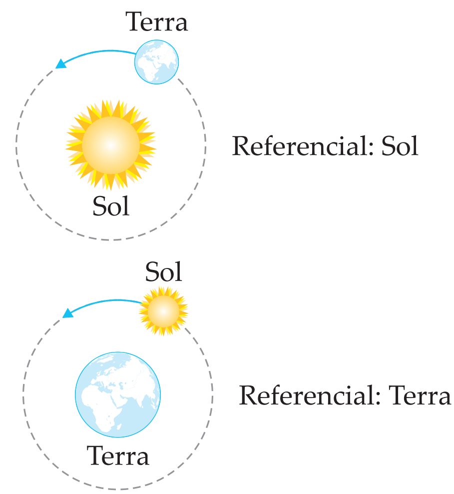
Dizemos que um corpo se encontra em **repouso**, sempre que a sua posição se mantiver (for a mesma), no decorrer do tempo, em relação a um certo referencial.

Um corpo pode, num determinado instante, estar em repouso em relação a um certo referencial e, em movimento, em relação a outro referencial.

Note na figura a seguir que o passageiro no interior do ônibus está em repouso em relação ao ônibus e ao motorista, porque a sua posição em relação a eles é sempre a mesma. Já em relação ao observador fixo na Terra, tal passageiro está em movimento, porque sua posição muda com o decorrer do tempo.

A Cinemática não estuda as causas dos movimentos, servindo então para ela qualquer referencial.

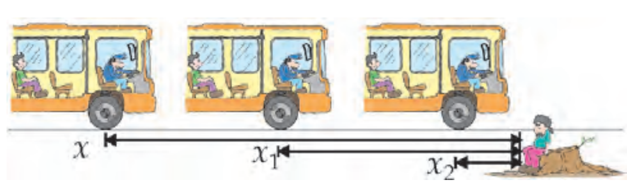
Assim, se o referencial for o Sol, a Terra gira ao seu redor, e se o referencial for a Terra, o Sol gira ao seu redor.

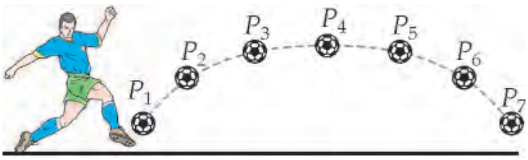


5. Trajetória

Consideremos um móvel que esteja em movimento para um dado referencial. Portanto, a posição desse móvel, em relação ao referencial, altera-se no decorrer do tempo.

Se unirmos as sucessivas posições do móvel por uma linha contínua, obteremos a trajetória descrita pelo móvel para o referencial adotado.

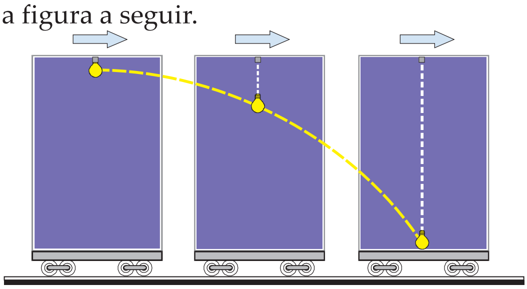




Na figura acima, P_1, P_2, P_3, ... representam as sucessivas posições ocupadas pelo móvel, correspondentes aos instantes t_1, t_2, t_3, ... A curva obtida com a união das sucessivas posições ocupadas pelo móvel é denominada **trajetória**.

Trajetória é o **caminho** determinado por uma sucessão de pontos, por onde o móvel passa em relação a um certo referencial

Em determinadas situações, considerando-se dois referenciais diferentes, podemos ter duas trajetórias diferentes. Observe a figura a seguir.



A lâmpada que se destaca do teto de um vagão (em tráfego uniforme nos trilhos) cai de forma **retilínea** em relação ao vagão e, ao mesmo tempo, apresenta trajetória **parabólica** em relação aos trilhos.

Exercícios Resolvidos

01. O planeta Júpiter é um ponto material?

Resposta

Depende do movimento estudado. Se quisermos analisar o movimento do planeta em torno do Sol, ele pode ser associado a um ponto. Entretanto, se formos estudar o seu movimento de rotação, ele não pode ser associado a um ponto.

02. Ponto material tem massa desprezível?

Resposta

Não. Ponto material tem dimensões desprezíveis.

03. Um garoto paralisado de medo agarra-se ao carrinho de uma roda gigante. O menino está em repouso ou em movimento?

Resposta

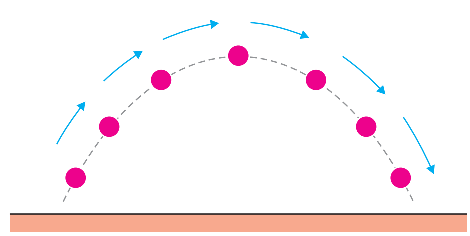
Depende do referencial adotado. Em relação ao carrinho, o garoto está em repouso; em relação ao Sol, o garoto está em movimento. Em relação à Terra, se a roda gigante estiver em movimento, o garoto também estará.

04. Um automóvel desloca-se numa rodovia plana e horizontal, numa razão de 20 km/h. Um passageiro sentado no interior do automóvel tem nas mãos uma bolinha de gude. A bolinha é lançada verticalmente para cima pelo passageiro e retorna em seguida para suas mãos. Qual é a trajetória da bolinha?

Resposta

Em relação ao automóvel, a bolinha executa um movimento cuja trajetória é um segmento de reta vertical.

Em relação à superfície da Terra, a bolinha executa um movimento cuja trajetória é um arco de parábola.

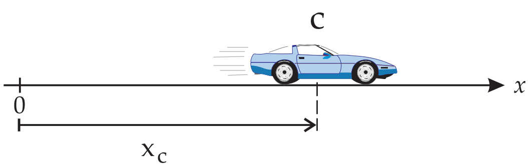


Pois, enquanto a bolinha sobe e desce, o auto desloca-se para a frente.

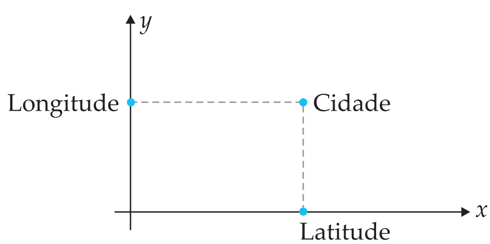
6. Localização

Para localizarmos um móvel num determinado instante, construímos um sistema de referência cartesiana, que pode apresentar *uma*, *duas* ou *três dimensões*.

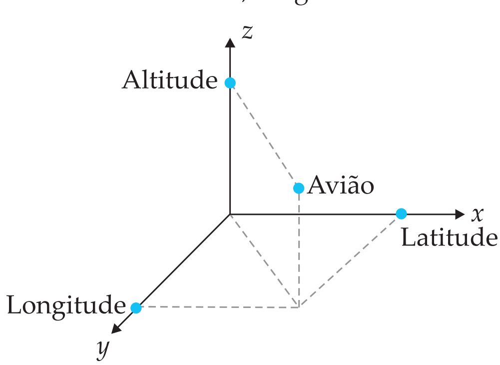
Para darmos a posição de um automóvel em trajetória retilínea, basta um único eixo (movimento *unidimensional*), já que uma abcissa x desse eixo o localizará num certo instante.



Para identificarmos uma cidade no nosso planeta, precisamos de um sistema cartesiano com dois eixos, x e y, determinando a sua latitude e longitude.



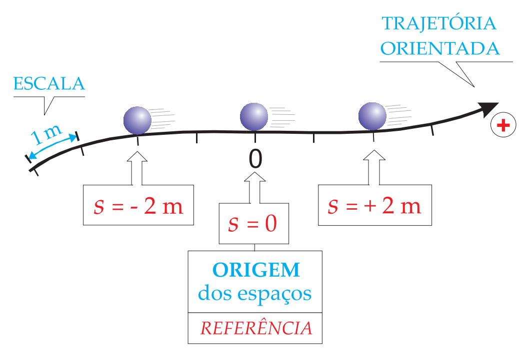
Agora, para identificarmos a posição de um avião em movimento na atmosfera, num determinado instante, precisamos de um sistema cartesiano com três eixos, x, y e z, determinando sua latitude, longitude e altitude.



7. Espaço

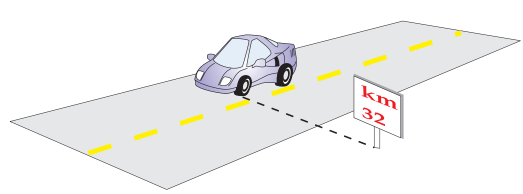
Quando conhecemos a trajetória descrita por um móvel, segundo um referencial, podemos dispensar o uso de eixos cartesianos e definir a posição do móvel ao longo da trajetória, tomando um ponto desta como referência. Este ponto de referência é denominado *origem* (**O**) e a posição do móvel, *espaço* (***s***).

> **Espaço** (***s***) de um móvel é a **distância**, medida ao longo da trajetória, do ponto onde se encontra o móvel até a origem (**O**), acrescido de um sinal de acordo com a orientação da trajetória.



O **espaço (*s*)** de um móvel nos fornece a sua localização na trajetória, em relação à origem dos espaços (***s* = 0**). A distância do móvel à **origem** (**O**), medida ao longo da trajetória, é precedida de um sinal algébrico (+) ou (–) para indicar a região da trajetória: à direita ou à esquerda da origem, conforme a orientação escolhida para essa trajetória.

Um marco quilométrico de uma rodovia corresponde, na prática, à grandeza *espaço*.



Quando se diz que um carro está no **km 32**, isto indica que ele se posiciona a 32 km da **origem** (km 0) da rodovia.

8. Função Horária do Espaço

Durante o movimento de um ponto material, a sua posição varia com o decorrer do tempo. A maneira como a posição varia com o tempo é a lei do movimento ou função horária.

$$\boxed{s = f(t)}$$

Na expressão acima, devemos ler:

O espaço é função do tempo

As variáveis ***s*** e ***t*** têm unidades, que devem ser indicadas quando se representa a função. Normalmente são utilizadas as unidades do *Sistema Internacional* (**SI**), ou seja:

- espaço → metros (m)
- tempo → segundos (s)

Exemplo

$$\boxed{s = 4{,}0 + 2{,}0 . t} \text{ (SI)}$$

s e ***t*** são as variáveis, isto significa que para cada valor de ***t*** temos um valor de ***s***.

No instante $t = 0$, o espaço ***s*** é denominado s_0 (espaço inicial).

Assim:

- para $t = 0 \Rightarrow s = s_0 = 4{,}0 + 2{,}0.(0)$

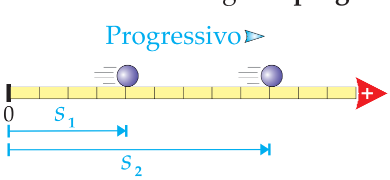
$$\boxed{s_0 = 4{,}0 \text{ m}}$$

- para $t = 1{,}0 \text{ s} \Rightarrow s = s_1 = 4{,}0 + 2{,}0.(1)$

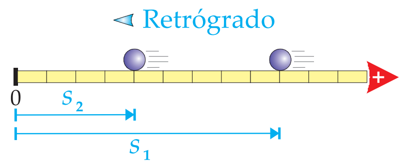
$$\boxed{s_1 = 6{,}0 \text{ m}}$$

9. Sentidos de Tráfego

Quando o móvel caminha no sentido da orientação da trajetória, seus **espaços** (*s*) são **crescentes** no decorrer do tempo. Denominamos este sentido de tráfego de **progressivo**.



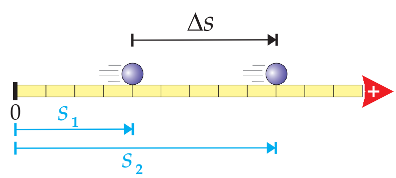
Quando o móvel retrocede, caminhando contra a orientação da trajetória, seus **espaços** (*s*) são **decrescentes**. Este sentido de tráfego é classificado como **retrógrado**.



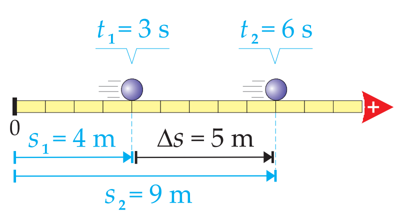
10. Deslocamento Escalar

A grandeza física que indica, entre dois instantes, a **variação de espaço** do móvel é denominada **deslocamento escalar** (**Δ*s***).

$$\boxed{\Delta s = s_2 - s_1}$$



A figura abaixo apresenta os espaços ocupados por um móvel numa trajetória em dois instantes diferentes.



Pela figura anterior, temos que, no instante $t_1 = 3$s, o móvel encontra-se na posição $s_1 = 4$ m, e, no instante $t_2 = 6$ s, sua posição é $s_2 = 9$ m. Podemos afirmar que, entre os instantes 3 s e 6 s, o espaço do móvel variou de **5 m**, ou seja, de 4 para 9 m. Essa variação de espaço recebe o nome de **deslocamento escalar** (**Δ*s***).

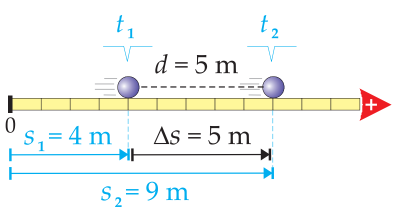
Quando o movimento for progressivo, o deslocamento escalar será **positivo** (**Δ*s* > 0**). Quando retrógrado, será **negativo** (**Δ*s* < 0**).

11. Distância Percorrida

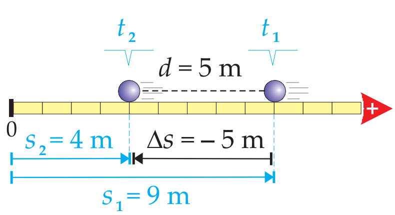
Distância percorrida (***d***) é a grandeza que nos informa quanto o móvel efetivamente percorreu entre dois instantes.

Quando o sentido de tráfego do móvel se mantém, seja progressivo ou retrógrado, a distância percorrida coincide com o módulo do deslocamento escalar ocorrido.

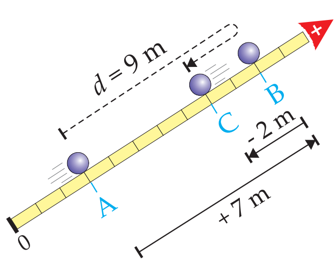
Na figura a seguir, considerando-se o movimento como progressivo, a distância percorrida entre os instantes t_1 e t_2 foi de 5 m. Ou seja: $\boldsymbol{d = |\Delta s| = |5\ m| = 5\ m}$.



Caso o sentido de tráfego entre t_1 e t_2 fosse retrógrado, como ilustra a figura abaixo, o deslocamento escalar seria de - 5 m e a distância percorrida: $\boldsymbol{d = |\Delta s| = |-5\ m| = 5\ m}$.



Quando há inversão de sentido no tráfego, a distância total percorrida é calculada somando-se os módulos dos deslocamentos parciais (em cada sentido). O trajeto *ABC* sobre a rampa abaixo exemplifica este caso, sendo *B* o ponto de inversão de tráfego.



Exercícios Resolvidos

01. O que significa dizer que o espaço é constante?

Resposta

Significa que, em relação ao referencial adotado, o móvel se encontra em repouso.

02. O que podemos concluir quando o espaço vale zero num determinado instante?

Resposta

Que naquele instante o móvel passou pela origem dos espaços.

03. Em uma dada trajetória, o que podemos concluir quando:

a) o espaço aumenta em valor absoluto?
b) o espaço diminui em valor absoluto?
c) o espaço aumenta em valor algébrico?
d) o espaço diminui em valor algébrico?

Resposta

a) *O móvel se afasta da origem.*
b) *O móvel se aproxima da origem.*
c) *O móvel se desloca no mesmo sentido da orientação da trajetória.*
d) *O móvel se desloca em sentido contrário ao da orientação da trajetória.*

04. Um ponto material desloca-se sobre uma trajetória retilínea, obedecendo à seguinte função horária do espaço:

$$s = t^2 - 4t + 4$$

Sendo ***s*** medido em metros e ***t*** em segundos, determine:

a) o espaço inicial;
b) o espaço no instante $t_1 = 1$ s;
c) o espaço no instante $t_2 = 2$ s;
d) o deslocamento escalar entre os instantes t_1 e t_2.

Resposta

a) *O espaço inicial é o espaço no instante $t = 0$.*

Para $t_0 = 0 \Rightarrow s = s_0$

$s_0 = (0)^2 - 4.(0) + 4 \Rightarrow s_0 = 4\ m$

b) *Para $t_1 = 1\ s \Rightarrow s = s_1$*

$s_1 = (1)^2 - 4.(1) + 4 \Rightarrow s_1 = 1\ m$

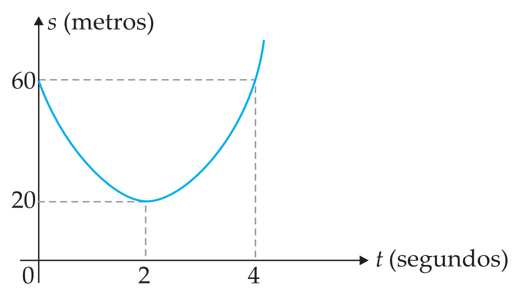
c) *Para $t_2 = 2\ s \Rightarrow s = s_2$*

$s_2 = (2)^2 - 4.(2) + 4 \ {\scriptstyle v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}}\ s_2 = 0$

d) $\Delta s = s_2 - s_1 =$

$\Delta s = 0 - 4 \Rightarrow \Delta s = -4\ m$

05. O diagrama a seguir representa o espaço *s* em função do tempo *t*, para o movimento de um ponto material que se desloca em relação a um dado referencial em trajetória retilínea.



Determine:

a) o espaço inicial;

b) o deslocamento escalar entre os instantes 0 e 4 s;

c) a distância percorrida entre os instantes 0 e 4 s.

Resposta

A análise do gráfico nos permite concluir que:

a) $t = 0 \Rightarrow s_0 = 60\ m$

b) $\Delta s = s - s_0 = 60 - 60 \Rightarrow \Delta s = 0$

c) $d = \underbrace{|20-60|}_{volta(0\to 2s)} + \underbrace{|60-20|}_{ida(2s\to 4s)} = 40 + 40 = 80m$

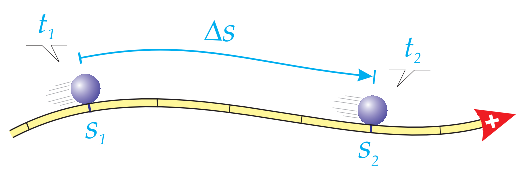
12. Velocidade Escalar Média

Vimos que, quando um objeto está em movimento, ele muda de posição ao longo de sua trajetória. A cada posição do objeto, associamos um espaço (s), e a variação de espaço representa o deslocamento escalar (Δs).

A tal variação de espaço ocorre num intervalo de tempo (Δt), definido pela diferença entre o instante final e o inicial do percurso.

Quando relacionamos o deslocamento escalar Δs e o correspondente intervalo de tempo Δt, obtemos a **velocidade escalar média** (v_m).

$$\boxed{v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}}$$



A velocidade escalar média apresenta sempre o mesmo sinal que o deslocamento escalar (Δs), pois o intervalo de tempo é sempre positivo. Assim, podemos ter **velocidade escalar média** positiva, negativa ou nula, dependendo exclusivamente do deslocamento escalar.

No Sistema Internacional (SI), a unidade para a velocidade é o metro por segundo (m/s). Outras unidades, tais como cm/s e km/h são muito utilizadas.

As relações entre elas são as seguintes:

- $\boxed{1\ \text{m/s} = 100\ \text{cm/s}}$
- $\boxed{1\,\text{km/h} = \left(\frac{1000}{3600}\right)\text{m/s} = \left(\frac{1}{3{,}6}\right)\text{m/s}}$

Para transformar km/h para m/s, dividimos por **3,6**; para o inverso, multiplicamos por **3,6**.

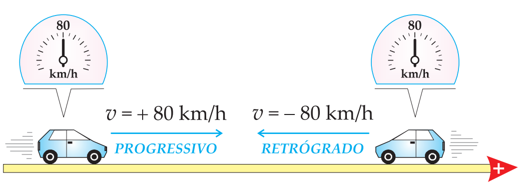
Como exemplo, suponha um carro efetuando um deslocamento escalar de 36 km num intervalo de tempo de 0,50 h. A sua velocidade escalar média neste percurso corresponde a:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{36km}{0{,}50h} = 72\,km/h = \frac{72}{3{,}6}\,m/s = 20\,m/s$$

O resultado encontrado (72 km/h = 20 m/s), significa a suposta velocidade escalar constante que o carro poderia ter utilizado no trajeto.

13. Velocidade Escalar Instantânea

Alguns dos meios de transporte utilizados pelo homem – carro, trem, avião – possuem um instrumento **– o velocímetro –** que indica o módulo da **velocidade escalar instantânea** (v)**,** ou seja, o valor absoluto da velocidade escalar do móvel no instante em que efetuamos a leitura, em relação à Terra.



Quando o movimento for **progressivo**, a velocidade escalar instantânea será positiva ($v > 0$) e quando for **retrógrado**, negativa ($v < 0$).

Esta velocidade pode ou não coincidir com a velocidade escalar média do movimento. Enquanto a primeira representa a velocidade real (v) num determinado instante, a segunda indica a velocidade escalar hipotética (v_m) que o móvel poderia ter mantido entre dois instantes. Se o móvel mantiver sua velocidade escalar instantânea constante, então sua velocidade escalar média coincidirá com a instantânea.

A determinação da velocidade escalar instantânea é feita a partir da velocidade escalar média ($\Delta s/\Delta t$), fazendo-se o intervalo de tempo (Δt) tender a zero, isto é, tender a um valor extremamente pequeno, que acarretará uma variação de espaço (Δs) também extremamente pequena e, nessas condições, a velocidade escalar média tenderá para um valor que expressa a velocidade escalar instantânea. Assim, escrevemos:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Na equação acima, lim significa limite.

Em termos práticos, podemos determinar a velocidade escalar instantânea da seguinte forma:

$$v \cong v_m = \frac{\Delta s(muito\ pequeno)}{\Delta t(muito\ pequeno)}$$

O físico e matemático inglês Isaac Newton descobriu, no século XVII, o processo matemático denominado derivação de funções, que permitiu obter certas grandezas instantâneas. A partir disto, temos:

> A velocidade escalar instantânea é obtida através da **derivada** da função horária do espaço.

Simbolicamente, isto é expresso assim:

$\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$ (lê-se derivada de ***s*** em relação a ***t***)

Cada função matemática tem a sua derivada específica. Para o estudo da Cinemática, no ensino médio, tem grande importância a derivada de uma função polinomial, a qual é calculada de acordo com a técnica descrita a seguir.

- Função horária dada: $\boxed{s = a.t^n}$
- Indicação da derivada: $v = \frac{ds}{dt}$
- Cálculo da derivada: $\boxed{v = a.n.t^{n-1}}$

A expressão final é denominada função horária da velocidade. Ela nos permite determinar a velocidade escalar num instante **t** qualquer.

Exemplo

A função horária do espaço de um móvel é dada por: $s = 2t^3 + 4t^2 - 5t + 7$ (SI)

Obter a velocidade escalar do móvel num instante ***t***.

Resolução

$$v = \frac{d\quad s}{d\quad s} \rightarrow v = 2.3.t^{3-1} + 4.2.t^{2-1} - 5.1.t^{1-1} + 0$$

Portanto: $v = 6t^2 + 8t - 5$ (SI)

Exercícios Resolvidos

01. Considere um ponto material que se desloca, em relação a um dado referencial, com a seguinte função horária do espaço:

$$s = t^2 - 5t + 2 \quad \text{(SI)}$$

Determine a velocidade escalar média entre os instantes 0 e 1 segundo.

Resolução

A velocidade escalar média é:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}$$

em que:

$s_1 = 1^2 - 5 \cdot 1 + 2 = -2\ m$

$s_0 = 0^2 - 5 \cdot 0 + 2 = 2\ m$

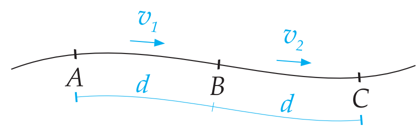
Portanto: $v_m = \frac{-2-2}{1-0} = -4$

$$\boxed{v_m = -4\ m/s}$$

O sinal negativo indica que, no intervalo de tempo considerado, o móvel viaja no sentido oposto ao da orientação da trajetória.

02. Um ponto material percorre um trajeto *ABC* de uma trajetória, tal que os trechos *AB* e *BC* possuem comprimentos iguais (AB = BC = *d*). Sejam v_1 e v_2 as respectivas velocidades escalares médias nos trechos *AB* e *BC*. Calcule a velocidade escalar média do ponto material no trajeto *ABC*.

Resolução



No trecho AB:

$$v_1 = \frac{d}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{d}{v_1} \qquad (1)$$

No trecho BC:

$$v_2 = \frac{d}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{d}{v_2} \qquad (2)$$

No trajeto ABC:

$$v_m = \frac{2d}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \qquad (3)$$

Substituindo (1) e (2) em (3), vem:

$$v_m = \frac{2d}{\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

ou seja: $\boxed{v_m = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}}$

03. Um ponto material percorre um trajeto *ABC* de uma trajetória de tal forma que o trecho *AB* é percorrido com velocidade v_1 num intervalo de tempo Δt_1 e o trecho *BC* com velocidade v_2 num intervalo de tempo Δt_2. Calcule a velocidade escalar média no trajeto *ABC*.

Resolução

No trecho AB:

$$v_1 = \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta s_1 = v_1 \cdot \Delta t_1$$

No trecho BC:

$$v_2 = \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta s_2 = v_2 \cdot \Delta t_2$$

No trajeto ABC:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta s_1 + \Delta s_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2}$$

$$\boxed{v_m = \frac{v_1 \cdot \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2}}$$

04. Uma partícula tem sua posição, ao longo de sua trajetória, dada pela seguinte função horária:

$$\boxed{s = t^2 - 5t + 6} \quad \text{(SI)}$$

Determine:

a) o espaço inicial;

b) a posição do móvel para $t = 1$ s;

c) o deslocamento escalar entre 0 e 1 s;

d) a velocidade escalar média entre os instantes 0 e 1 s;

e) a função horária da velocidade;

f) as velocidades nos instantes 0 e 1 s.

Resolução

a) Para $t = 0 \Rightarrow s = s_0$

$$s_0 = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_0 = 6\ m}$$

b) *Para* $t = 1\ s \Rightarrow s = s_1$

$$s_1 = 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 2$$

$$\boxed{s_1 = 2\ m}$$

c) $\Delta s = s_1 - s_0$

$$\Delta s = 2 - 6 = -4$$

$$\boxed{\Delta s = -4\ m}$$

d) $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{-4}{1} = -4$

$$\boxed{v_m = -4\ m/s}$$

e) $v = \frac{ds}{dt}$

$$s = t^2 - 5t + 6$$

$$\boxed{v = 2t - 5} \quad (SI)$$

f) $v = 2t - 5$

Para $t = 0 \Rightarrow v = v_0$

$$v_0 = 2 \cdot 0 - 5 = -5$$

$$\boxed{v_0 = -5\ m/s}$$

Para $t = 1\ s \Rightarrow v = v_1$

$$v_1 = 2 \cdot 1 - 5 = -3$$

$$\boxed{v_1 = -3\ m/s}$$

Quando o enunciado solicita a velocidade num instante, é claro que ele se refere à velocidade instantânea.

05. A posição de um móvel em sua trajetória varia conforme a função horária:

$$\boxed{s = t^2 - 4t + 4} \quad \text{(SI)}$$

Determine o instante em que o móvel inverte o sentido do seu movimento.

Resolução

Quando o móvel inverte o sentido do movimento, sua velocidade escalar se anula.

Para resolver o problema, determinemos inicialmente a função horária da velocidade e, fazendo $v = 0$*, obtemos o valor correspondente do tempo.*

$$s = t^2 - 4t + 4$$

$$v = \frac{ds}{dt} = 2t - 4$$

$$v = 2t - 4 \quad (SI)$$

Fazendo $v = 0$*, vem:* $\quad 2t - 4 = 0$

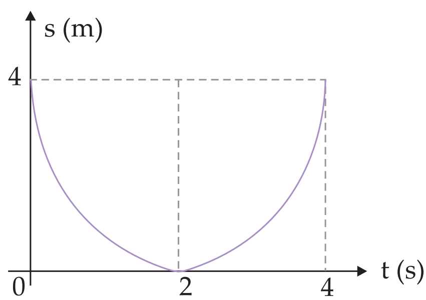
$$2t = 4 \quad \Rightarrow \quad t = 2\ \text{s}$$

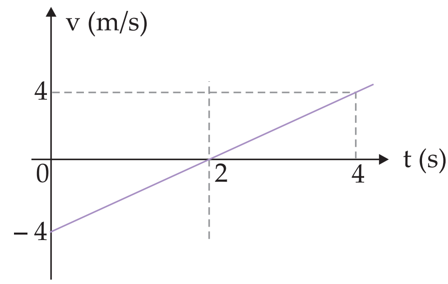
Para melhor ilustração do exemplo, apresentamos a seguir os gráficos cartesianos das funções

$$s = t^2 - 4t + 4$$

e

$$v = 2t - 4$$





Note que entre 0 e 2 s o movimento é retrógrado ($v < 0$) e, após $t = 2$ s, o movimento é progressivo ($v > 0$).

Capítulo 02. Movimento Uniforme

1. Definição

Se observarmos atentamente os movimentos que ocorrem ao nosso redor, encontraremos vários exemplos de movimentos nos quais a velocidade escalar permanece constante. Uma estrela no céu, as extremidades dos ponteiros de um relógio movimentam-se com velocidade escalar constante. Também um pára-quedista, com o pára-quedas aberto há algum tempo, cai com velocidade praticamente constante. Num modelo simplificado do átomo de hidrogênio, dizemos que o elétron gira em torno do próton com velocidade escalar constante.

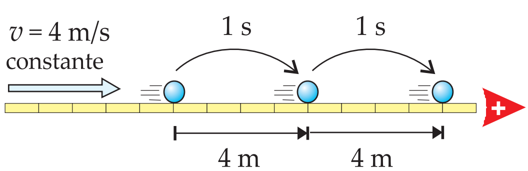
Esses movimentos, nos quais a velocidade escalar permanece constante, são denominados **movimentos uniformes.**

2. Velocidade Escalar Constante

Um objeto encontra-se em movimento uniforme, em relação a um determinado referencial, quando a sua velocidade escalar não varia no decorrer do tempo.

Sendo a velocidade escalar constante, o móvel percorre deslocamentos escalares iguais em intervalos de tempos iguais, em qualquer tipo de trajetória, ou seja, o estudo do movimento uniforme não depende da forma da trajetória.

A figura a seguir representa um movimento uniforme, em trajetória retilínea, com velocidade escalar constante de 4 m/s.



Observe que a cada 1 s o móvel cumpre deslocamentos escalares iguais de 4 m.

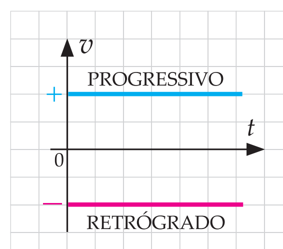
No movimento uniforme, a velocidade escalar instantânea é constante e diferente de zero, sendo igual à velocidade escalar média.

$$\boxed{v = v_m} \Rightarrow \boxed{v = \frac{\Delta s}{\Delta t}} \text{ (constante} \neq 0\text{)}$$

Esta velocidade escalar constante terá valor positivo quando o movimento for progressivo e, valor negativo quando for retrógrado.

3. Diagrama Horário da Velocidade Escalar

Como no movimento uniforme a velocidade linear é constante positiva ou negativa, podemos representá-la através do diagrama horário abaixo:

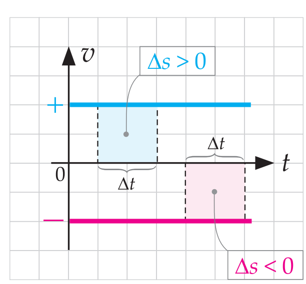


Propriedade

A variação de espaço (Δs) de um movimento uniforme, num intervalo de tempo (Δt), é dada por:

$$\boxed{\Delta s = v . \Delta t}$$

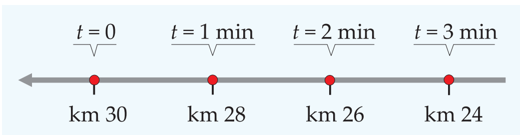
Geometricamente, isto corresponde à área sob o gráfico v x t.



$$\boxed{\Delta s \overset{N}{=} \text{área}}$$

Exercícios Resolvidos

01. Um carro se desloca em uma estrada retilínea com velocidade escalar constante. A figura mostra as suas posições, anotadas em intervalos de 1 min, contadas a partir do km 24, onde se adotou $t = 0$.



Responda:

a) O movimento é progressivo ou retrógrado?

b) Qual a sua velocidade escalar em km/h?

c) Qual a indicação de seu velocímetro?

Resolução

a) *É retrógrado, pois suas posições são decrescentes no decorrer do tempo.*

b) *Observa-se que a cada minuto o carro retrocede 2 km na rodovia, ou seja, apresenta* $\Delta s = -2$ *km.*

Logo:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{-2\ km}{1\ min} = \frac{-2\ km}{\frac{1}{60}\ h}$$

$$v = -120\ km/h$$

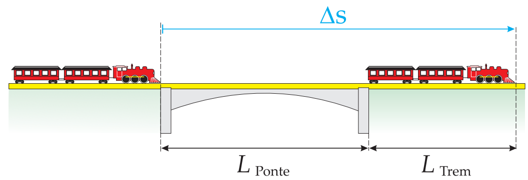
c) *O velocímetro estará indicando o* ***módulo*** *da velocidade escalar constante do carro: 120 km/h.*

02. Um trem, medindo 60 m de comprimento, trafega com velocidade escalar constante de 10 m/s e demora 15 s para atravessar completamente uma ponte.

Qual o comprimento da ponte?

Resolução

Note pela figura a seguir que, entre o instante que o trem inicia a travessia até o momento que a completa, ele desloca a soma dos comprimentos seu e da ponte. Ou seja: $\Delta s = L_{Trem} + L_{Ponte}$



Como: $\Delta s = v \cdot \Delta t$

$$L_{Trem} + L_{Ponte} = v \cdot \Delta t$$

$$60 + L_{Ponte} = (10) \cdot (15)$$

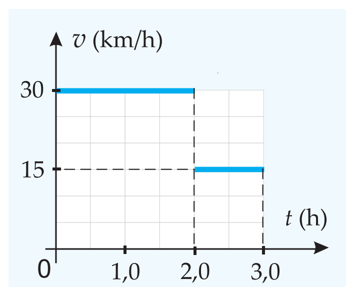
$$60 + L_{Ponte} = 150 \quad \rightarrow \quad \boxed{L_{Ponte} = 90\ m}$$

03. *O gráfico a seguir representa aproximadamente a velocidade escalar de um ciclista, em função do tempo, durante uma viagem de 3,0 horas.*

Determine, nesta viagem:

a) o deslocamento escalar do ciclista;

b) a sua velocidade escalar média.



Resolução

a) *Observa-se no gráfico que o ciclista executa duas etapas em movimento uniforme: viaja a 30 km/h nas primeiras 2 horas e, a seguir, a 15 km/h na última hora de viagem. Em cada etapa, temos:*

$$\Delta s = v \cdot \Delta t$$

$$\Delta s_1 = (30) \cdot (2) = 60\ km$$

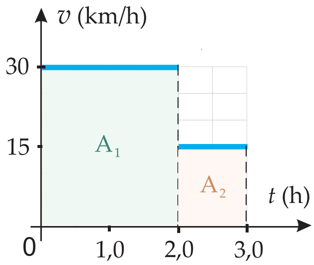
$$\Delta s_2 = (15) \cdot (1) = 15\ km$$

Logo, na viagem toda, temos:

$$\Delta s_{Total} = \Delta s_1 + \Delta s_2 = 60 + 15$$

$$\boxed{\Delta s_{Total} = 75\ km}$$

Podemos também determinar este deslocamento escalar através da área sob o gráfico apresentado. Veja abaixo esta solução geométrica, lembrando que: área de retângulo = base x altura.



$$\Delta s_{Total} \overset{N}{=} A_1 + A_2 = (2)\cdot(30)+(1)\cdot(15)=75\,km$$

b) *Na viagem que durou 3,0 h, a velocidade escalar média do ciclista é dada por:*

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{75\,km}{3{,}0\,h} \Rightarrow \boxed{v_m = 25\,km/h}$$

Repare que este resultado não corresponde à média aritmética das velocidades utilizadas pelo ciclista (30 km/h e 15 km/h). A velocidade escalar média apenas informa qual a velocidade escalar constante que poderia substituir, na viagem toda, as duas que o ciclista utilizou.

04. Considere o texto abaixo:

Para enxergarmos qualquer objeto é necessário que ele envie luz até nossos olhos. Como a velocidade da luz é finita, existe um tempo para que o percurso dessa luz seja cumprido até nós. Logo, a visão que temos de algo é sempre uma imagem de seu passado.

Imagine que fosse possível um extraterrestre, em seu planeta posicionado a **10 anos-luz** da Terra, estar nos observando com seu telescópio neste momento.

a) A imagem por ele obtida mostraria a Terra em seu momento atual?

b) Aproximadamente, qual a distância em metros entre a Terra e o tal planeta?

Dados:

- velocidade da luz = $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s
- 1 ano = $3{,}2 \cdot 10^7$ s.

Resolução

a) *Não. Mostraria a Terra de 10 anos atrás. Neste momento estaria chegando lá uma imagem que viajou durante 10 anos pelo espaço, ou seja, que daqui saiu 10 anos atrás.*

b) *Primeiramente, calculemos 1 ano-luz em metros levando em conta o movimento uniforme da luz durante 1 ano.*

$$\Delta s = v \cdot \Delta t$$

$$1 \text{ ano-luz} = c \cdot (1 \text{ ano})$$

$$1 \text{ ano-luz} = (3 \cdot 10^8 m/s) \cdot (3{,}2.10^7\, s)$$

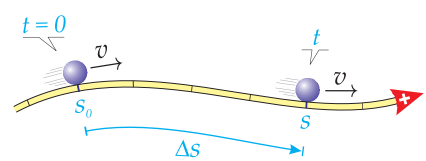
$$1 \text{ ano-luz} = 9{,}6 \cdot 10^{15}\, m$$

Assim, a distância entre a Terra e o tal planeta (10 anos-luz) seria de:

$$d = 10 \cdot (9{,}6 \cdot 10^{15}\, m) \rightarrow \boxed{d = 9{,}6 \cdot 10^{16}\, m}$$

4. Função Horária do Espaço

Suponha um móvel trafegando com velocidade escalar constante v ao longo de uma trajetória genérica, como ilustra a figura a seguir.



Em destaque na figura, observamos que o móvel no instante $t = 0$ encontra-se no espaço inicial s_0. Após um tempo t, ele atinge a posição s.

Lembrando que no movimento uniforme o deslocamento escalar é dado através da expressão $\Delta s = v.\Delta t$, podemos deduzir sua função horária do espaço assim:

$$\Delta s = v \cdot \Delta t$$

$$s - s_0 = v \cdot (t - 0)$$

$$s - s_0 = v \cdot t$$

$$\boxed{s = s_0 + v \cdot t}$$

Observe que todo movimento uniforme terá este tipo de função horária do espaço, isto é, trata-se de uma função matemática do primeiro grau, onde s_0 e v serão os seus coeficientes linear e angular, respectivamente.

Como exemplo, veja a tabela a seguir. Ela nos traz a relação espaço-tempo de um objeto em movimento uniforme.

s (m)	2	5	8	11
t (s)	0	1	2	3

Não há razão para sabermos qual o formato de sua trajetória, mas a função horária do espaço deste móvel é facil de se obter.

Acompanhe os passos a seguir:

1) Pela tabela, temos:

- $t = 0 \quad \Rightarrow \quad s_0 = 2 \text{ m}$
- $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{3 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 3 \text{ m/s}$

2) Montagem da função horária:

$$s = s_0 + v \cdot t \quad \Rightarrow \quad \boxed{s = 2 + 3t} \text{ (SI)}$$

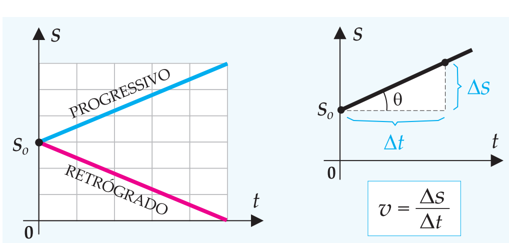
Repare que esta expressão final relacionará todos os dados da tabela anterior:

- $t = 0 \quad \Rightarrow \quad s = 2 + 3 \cdot (0) = 2 \text{ m}$
- $t = 1 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad s = 2 + 3 \cdot (1) = 5 \text{ m}$
- $t = 2 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad s = 2 + 3 \cdot (2) = 8 \text{ m}$

....e assim por diante.

5. Diagrama Horário do Espaço

Já que a função horária do espaço de todo movimento uniforme é do primeiro grau, o gráfico espaço x tempo terá a forma de uma reta inclinada, a partir do espaço inicial (s_0).



Se for **progressivo** ($v > 0$), o espaço será crescente no decorrer do tempo. Se **retrógrado** ($v < 0$), o espaço decrescerá com o tempo.

Observe que a declividade da reta (tgθ) representa o coeficiente angular da função, isto é:

$$\boxed{v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \overset{N}{=} \text{tg}\,\theta}$$

Exercícios Resolvidos

01. A função horária do espaço, para um movimento uniforme, é dada por:

$$\boxed{s = 10 + 2{,}0t} \text{ (SI)}$$

Determine:

a) o espaço inicial e a velocidade escalar do movimento;

b) a posição do móvel para $t = 30$ s;

c) o instante no qual a posição do móvel é 20 m.

Resolução

a) *A função horária do MU é $s = s_0 + v \cdot t$ e no exercício, a equação é $s = 10 + 2{,}0t$.*

Por comparação, temos:

$$\boxed{s_0 = 10 \text{ m}} \quad e \quad \boxed{v = 2{,}0 \text{ m/s}}$$

b) *No instante $t = 3{,}0$ s, temos:*

$$s = 10 + 2{,}0\,(3{,}0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{s = 16 \text{ m}}$$

c) *Para $s = 20$ m, obtemos:*

$$20 = 10 + 2{,}0 \cdot t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 5{,}0 \text{ s}}$$

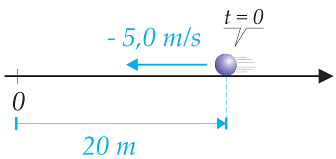
02. Um móvel, em movimento retilíneo e retrógrado, possui velocidade constante e de valor absoluto igual a 5,0 m/s. No instante $t = 0$, ele se encontra em um ponto situado a 20 m à direita da origem dos espaços. Supondo que a trajetória tenha orientação positiva para a direita, determine:

a) a função horária do espaço;

b) o instante em que o móvel passa pela origem dos espaços.

Resolução

a) *Trata-se de um movimento uniforme que apresenta* $s_0 = 20\ m$ *e* $v = -5{,}0\ m/s$ *(retrógrado).*



Sendo: $s = s_0 + v \cdot t \Rightarrow \boxed{s = 20 - 5{,}0\,t \quad (SI)}$

b) *Origem dos espaços:* $s = 0$.

Assim: $0 = 20 - 5{,}0t \Rightarrow \boxed{t = 4{,}0\ s}$

03. A tabela a seguir apresenta as posições ocupadas por um móvel, em movimento uniforme, em função do tempo.

s (m)	2	4	6	8	10
t (s)	– 20	– 10	0	10	20

Pede-se:

a) o formato da trajetória do móvel;

b) a partir dos dados da tabela, construa o diagrama horário do espaço e calcule a velocidade escalar do móvel;

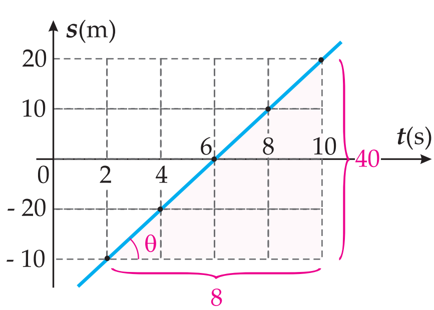
c) determine a posição (s_0) do móvel no instante $t = 0$;

d) Escreva a função horária do espaço para esse móvel.

Resolução

a) *Indeterminada, pois não há dados para isto.*

b) *Gráfico s x t :*



$$\boxed{v = tg\theta = \frac{40}{8} = 5\ m/s}$$

c) *Escolhemos um ponto qualquer da tabela. Por exemplo:* $t = 8{,}0\ s$ *e* $s = 10\ m$.
Substituindo na função horária $s = s_0 + v \cdot t$, *temos:*

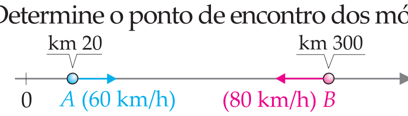
$10 = s_0 + 5 \cdot (8)$

$10 = s_0 + 40 \Rightarrow \boxed{s_0 = -30\ m}$

d) *Sendo* $s_0 = -30\ m$; *e* $v = 5{,}0\ m/s$, *temos:*

$s = s_0 + v.t \Rightarrow \boxed{s = -30 + 5\ t \quad (SI)}$

04. Dois carros *A* e *B* movimentam-se na mesma rodovia. No instante $t = 0$, suas posições e os respectivos módulos de suas velocidades escalares constantes estão indicadas na figura abaixo. Determine o ponto de encontro dos móveis.



Resolução

As funções horárias para os carros A e B são:

$s_A = 20 + 60t$ *e* $s_B = 300 - 80t$

No ponto de encontro, temos $s_A = s_B$. *Então:*

$20 + 60t = 300 - 80t \Rightarrow t = 2{,}0\ h$

ou seja, o encontro dos carros verifica-se duas horas após a passagem deles pelas posições iniciais da figura.

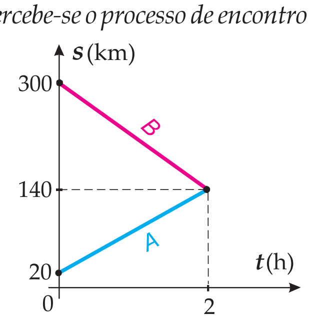
Substituindo $t = 2{,}0\ h$ *nas equações horárias dos dois carros:*

$s_A = 20 + 60 \cdot (2{,}0) \Rightarrow s_A = 140\ km$

$s_B = 300 - 80 \cdot (2{,}0) \Rightarrow s_B = 140\ km$

Portanto, o encontro dos carros A e B ocorre no ***km 140***, *ou seja, a 140 km da origem dos espaços.*

Construindo-se os gráficos s x t para os dois móveis, percebe-se o processo de encontro ocorrido.

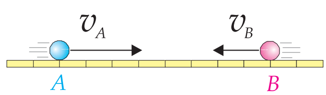


6. Velocidade Relativa

Consideremos duas partículas A e B movendo-se em uma mesma trajetória e com velocidades escalares v_A e v_B, em duas situações distintas: movendo-se no mesmo sentido e em sentidos opostos.

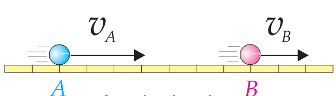
A velocidade escalar que uma das partículas possui em relação à outra (tomada como referência) é chamada de **velocidade relativa** (v_{REL}) e o seu módulo é calculado como relatamos a seguir:

I. Móveis em Sentidos Opostos



$$\boxed{v_{REL} = |v_A| + |v_B|}$$

II. Móveis no Mesmo Sentido

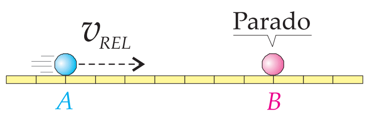


$$|v_A| \geq |v_B|$$

$$\boxed{v_{REL} = |v_A| - |v_B|}$$

Observação

Ao estabelecermos um movimento relativo entre móveis, um deles é tomado como referência e, portanto, permanece parado em relação a si mesmo, enquanto o outro se aproxima ou se afasta dele com uma certa velocidade relativa. Observe isto no esquema abaixo.



7. Movimento Relativo Uniforme

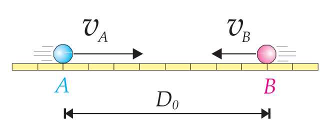
Se dois móveis, ao longo da mesma trajetória, mantiverem constantes suas velocidades escalares, logo um em relação ao outro executará um movimento relativo uniforme, aproximando-se ou afastando-se um do outro com velocidade relativa de módulo constante.

Desta forma, podemos estabelecer a seguinte expressão para este MU:

$$\boxed{v_{REL} = \frac{\Delta s_{REL}}{\Delta t}} \text{ (constante} \neq 0)$$

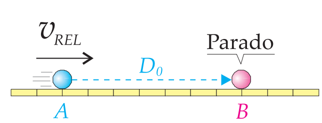
Os processos de encontro ou ultrapassagens de móveis são analisados normalmente através de movimento relativo.

Suponha, por exemplo, duas partículas trafegando na mesma trajetória com velocidades escalares constantes, v_A e v_B, e separadas inicialmente por uma certa distância D_0, como indica a figura a seguir.



Como os movimentos têm sentidos opostos, a velocidade relativa é dada em módulo por: $v_{REL} = |v_A| + |v_B|$.

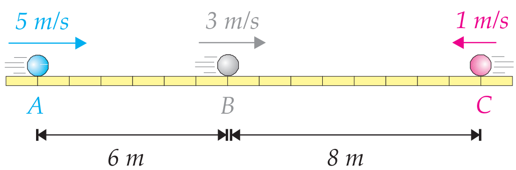
Tomando-se um dos corpos como referência, o outro irá até o encontro percorrer um deslocamento relativo de módulo D_0. O intervalo de tempo (Δt) gasto até o encontro será calculado assim:



$$v_{REL} = \frac{\Delta s_{REL}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s_{REL}}{v_{REL}} = \frac{D_O}{|v_A| + |v_B|}$$

Exercícios Resolvidos

01. Três partículas A, B e C realizam, sobre uma mesma trajetória retilínea, um processo de aproximação a partir da situação mostrada na figura abaixo. Considere que os módulos de suas velocidades apresentadas na figura se mantenham constantes durante o processo.



Qual partícula (A ou C) irá se encontrar primeiro com a partícula B?

Resolução

• Estudemos o movimento de aproximação de A em relação a B (referência).

$$v_{REL} = |v_A| - |v_B| = 5 - 3 = 2\ m/s$$

Até o encontro, A terá um deslocamento relativo de 6 m. Logo, o tempo gasto para isto vale:

$$\Delta t_{AB} = \frac{\Delta s_{REL}}{v_{REL}} = \frac{6\,m}{2\,m/s} \Rightarrow \Delta t_{AB} = 3\ s$$

• Estudemos agora a aproximação entre C e B de forma análoga.

$$v_{REL} = |v_C| + |v_B| = 3 + 1 = 4\ m/s$$

Até o encontro:

$$\Delta t_{CB} = \frac{\Delta s_{REL}}{v_{REL}} = \frac{8\,m}{4\,m/s} \Rightarrow \Delta t_{CB} = 2\ s$$

• Conclusão: $\Delta t_{CB} < \Delta t_{AB}$

O móvel C encontrará o móvel B antes que A.

02. Dois trens, A e B, têm o mesmo comprimento de 75 m e trafegam em linhas férreas paralelas em sentidos opostos. Suas velocidades escalares possuem módulos constantes e iguais a: $|v_A| = 54$ km/h e $|v_B| = 36$ km/h.

Determine:

a) a duração do cruzamento completo destes trens;

b) a distância que cada trem percorre nos trilhos durante o cruzamento.

Resolução

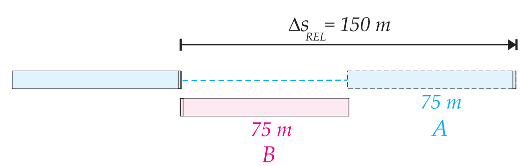
a) *Primeiramente, calculemos a velocidade relativa de um trem em relação ao outro.*

$$v_{REL} = |v_A| + |v_B| = 54 + 36 = 90\ km/h$$

Transformando-a para m/s, temos:

$$v_{REL} = \frac{90}{3{,}6}\,m/s = 25\ m/s$$

Observando que no cruzamento o deslocamento relativo tem intensidade igual à soma dos comprimentos dos trens, vem:



$$\Delta t = \frac{\Delta s_{REL}}{v_{REL}} = \frac{150\,\text{m}}{25\,\text{m/s}} \Rightarrow \Delta t = 6\ s$$

b) $d_A = |v_A| \cdot \Delta t = (54/3{,}6)\cdot(6) = 90$ m

$d_B = |v_B| \cdot \Delta t = (36/3{,}6)\cdot(6) = 60$ m

Capítulo 03. Aceleração Escalar

1. Aceleração Escalar Média

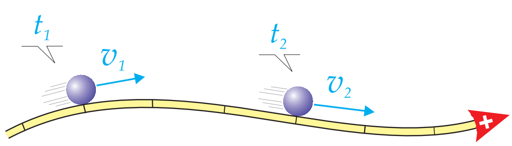
A aceleração escalar é a a grandeza física que nos indica o ritmo com que a velocidade escalar de um móvel **varia**.

A aceleração é uma grandeza causada pelo agente físico força. Quando um móvel receber a ação de uma força, ou de um sistema de forças, pode ficar sujeito a uma aceleração e, conseqüentemente, sofrerá variação de velocidade.

Definição

Aceleração escalar média é a razão entre a variação de velocidade escalar instantânea e o correspondente intervalo de tempo.

Assim, escrevemos: $\boxed{a_m = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}}$



$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

No Sistema Internacional (SI), a unidade para a aceleração escalar média é o **metro por segundo por segundo** (**m/s/s**), que abreviamos por **m/s²**. Outras unidades podem ser utilizadas, tais como cm/s² e km/h².

A aceleração escalar média apresenta o mesmo sinal da variação de velocidade escalar instantânea (Δv), pois o intervalo de tempo (Δt) é sempre positivo.

Quando informamos que num certo intervalo de tempo o móvel teve uma aceleração escalar média de 2 m/s², isto significa que em *média* a sua velocidade escalar esteve **aumentando** de 2m/s a cada segundo. Por outro lado, uma aceleração escalar média de – 2 m/s², quer dizer que sua velocidade escalar esteve **diminuindo** em média de 2 m/s a cada segundo.

2. Aceleração Escalar Instantânea

De modo análogo à velocidade escalar instantânea, podemos obter a aceleração escalar instantânea, partindo da expressão que nos fornece a aceleração escalar média ($\Delta v / \Delta t$), fazendo Δt tender a zero. Com este procedimento, a aceleração escalar média tende para um valor denominado de aceleração escalar instantânea:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Em termos práticos, vamos determinar a aceleração instantânea da seguinte forma:

$$a \cong a_m = \frac{\Delta v \text{ (muito pequeno)}}{\Delta t \text{ (muito pequeno)}}$$

A aceleração escalar instantânea representa a aceleração do móvel num determinado instante (t) e, mais precisamente, seu cálculo é feito através do processo de derivação, análogo ao ocorrido com a velocidade escalar instantânea.

> A aceleração escalar instantânea de um móvel é obtida através da **derivada** da função horária de sua velocidade escalar.

Simbolicamente, isto é expresso assim:

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}} \text{ (lê-se derivada de } v \text{ em relação a } t\text{)}$$

Em movimentos nos quais a velocidade escalar instantânea varia de quantidades iguais em intervalos de tempo iguais, a aceleração escalar é uma **constante** e, portanto, as acelerações escalares instantânea e média apresentam o mesmo valor. Nestes casos, usamos o termo **aceleração escalar** sem necessidade de especificar se é média ou instantânea.

Exemplos

a) • Dado: $v = 3t^2$

• Derivada: $a = 3 \cdot 2 \cdot t^{2-1} = 6t$

b) • Dado: $v = 2 + 4t$

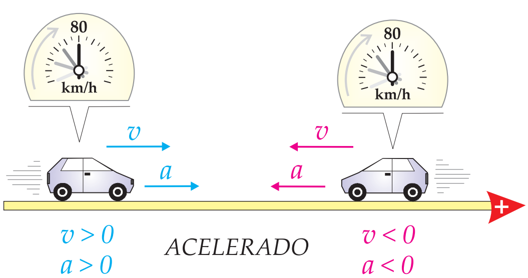
• Derivada: $a = 0 + 4 \cdot 1 \cdot t^{1-1} = 4$ (constante)

3. Classificação

Sabemos que o velocímetro de um veículo indica o módulo de sua velocidade escalar instantânea. Quando as suas indicações são crescentes, está ocorrendo um movimento variado do tipo acelerado. Quando o velocímetro indica valores decrescentes, o movimento é classificado como retardado.

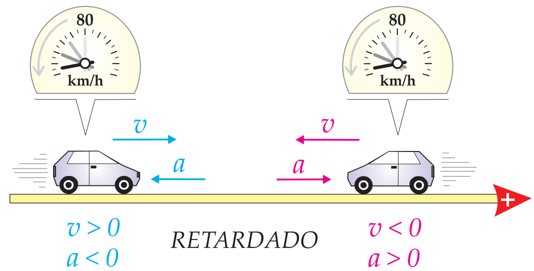
De modo geral, podemos detalhar esses casos assim:

a) O móvel se movimenta com uma velocidade escalar instantânea, cujo módulo **aumenta** em função do tempo. O movimento é denominado **acelerado**.



Para que isto ocorra, a aceleração escalar instantânea deve ser no mesmo sentido da velocidade escalar instantânea, ou seja, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{a}$ possuem o **mesmo sinal**.

b) O móvel se movimenta com velocidade escalar instantânea cujo módulo **diminui** em função do tempo. O movimento é denominado **retardado**.



Para que isto ocorra, a aceleração escalar instantânea deve ser no sentido oposto ao da velocidade escalar instantânea, ou seja, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{a}$ possuem *sinais opostos*.

c) O móvel se movimenta com velocidade escalar instantânea **constante** em função do tempo. O movimento é denominado **uniforme**. Para que isto ocorra, a aceleração escalar instantânea deve ser **nula** ($a = 0$).

Observação – Tanto o movimento acelerado quanto o retardado podem apresentar uma aceleração escalar instantânea constante. Neste caso, o movimento recebe a denominação de **uniformemente acelerado** ou **retardado**.

Exercícios Resolvidos

01. Um móvel possui velocidade escalar de 5,0 m/s. Sendo acelerado durante 10 s, atinge a velocidade escalar de 25 m/s.

Determine a aceleração escalar média para esse móvel.

Resolução

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{25 - 5{,}0}{10} \Rightarrow \boxed{a_m = 2\, m/s^2}$$

Uma aceleração escalar média de 2,0 m/s² significa que a velocidade escalar instantânea variou em média de 2,0 m/s a cada segundo.

02. Um automóvel, movimentando-se a 90 km/h, é freado e pára em 10 s. Determine a aceleração escalar média durante a frenagem.

Resolução

Sendo 90 km/h = 25 m/s, temos:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-25}{10} \Rightarrow \boxed{a_m = -2{,}5\ m/s^2}$$

Neste exemplo, temos a velocidade escalar instantânea positiva e a aceleração escalar média negativa. Isto significa que, no decorrer do tempo, a velocidade escalar instantânea diminui, pois a aceleração média possui sinal contrário ao da velocidade e, conseqüentemente, contrário ao da trajetória.

03. Um ponto material desloca-se segundo a função horária do espaço:

$$\boxed{s = t^3 + 2t^2 + 4t - 12} \quad \text{(SI)}$$

Determine, no instante $t = 1$ s:

a) o espaço;

b) a velocidade escalar;

c) a aceleração escalar.

Resolução

a) *Para* $t = 1\ s \Rightarrow s = s_1$

$$s_1 = (1)^3 + 2(1)^2 + 4(1) - 12 \Rightarrow \boxed{s_1 = -5\ m}$$

b) $$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 4t + 4$$

Para $t = 1\ s \Rightarrow v = v_1$

$$v_1 = 3(1)^2 + 4(1) + 4 \Rightarrow \boxed{v_1 = 11\ m/s}$$

c) $$a = \frac{dv}{dt} = 6t + 4$$

Para $t = 1\ s \Rightarrow a = a_1$

$$a_1 = 6(1) + 4 \Rightarrow \boxed{a_1 = 10\ m/s^2}$$

03. Um ponto material desloca-se sobre uma trajetória retilínea obedecendo à função horária do espaço abaixo:

$$\boxed{s = 6 - 2t + 2t^2} \quad \text{(SI)}$$

Classifique o movimento no instante $t = 2$ s, indicando se é progressivo ou retrógrado e se é acelerado ou retardado.

Resolução

Para classificar o movimento, devemos analisar os sinais da velocidade e da aceleração no instante considerado.

- *A velocidade é obtida através da derivada da função horária do espaço:*

$$v = \frac{ds}{dt} = -2 + 4t \quad (\textit{função horária da velocidade})$$

No instante $t = 2$ s:

$$v_1 = -2 + 4\cdot(2) \Rightarrow \boxed{v_1 = 6\ m/s}$$

- *A aceleração é dada pela derivada da função horária da velocidade:*

$$a = \frac{dv}{dt} = 4 \Rightarrow \boxed{a = 4\ m/s^2} \quad (\textit{constante})$$

Conclusão

*O movimento no instante 2 s é **progressivo** ($v > 0$) e **acelerado** (**v** e **a** têm mesmos sinais).*

4. Movimento Uniformemente Variado

Um carro movimentando-se pelas ruas de uma cidade, gotas de chuvas caindo, as pás de um ventilador, ao ser ligado ou desligado, são exemplos de corpos que se movimentam com velocidade escalar variável, os chamados movimentos variados.

Dentre os movimentos variados, daremos destaque, a partir deste módulo, aos movimentos uniformemente variados, movimentos nos quais a velocidade escalar do corpo aumenta ou diminui, em relação ao tempo, de maneira uniforme, ou seja, os corpos movimentam-se com aceleração escalar constante.

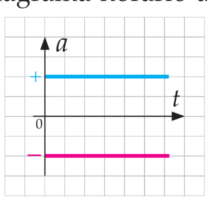
5. Aceleração Escalar Constante

Um objeto encontra-se em movimento uniformemente variado (MUV) quando a sua velocidade escalar varia de quantidades iguais em intervalos de tempo iguais. Nestas condições, podemos dizer que a aceleração escalar média coincide com o valor da aceleração escalar instantânea e podemos chamá-la simplesmente de aceleração escalar (a).

$$\boxed{a = a_m} \Rightarrow \boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t}} \quad (constante \neq 0)$$

6. Diagrama Horário da Aceleração Escalar

Como no movimento uniformemente variado a aceleração escalar é constante positiva ou negativa, podemos representá-la através do diagrama horário abaixo:

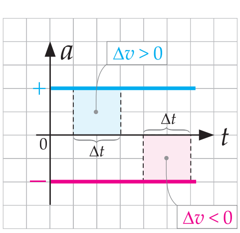


Propriedade

A variação de velocidade (Δv) de um MUV, num intervalo de tempo (Δt), é dada por:

$$\boxed{\Delta v = a \cdot \Delta t}$$

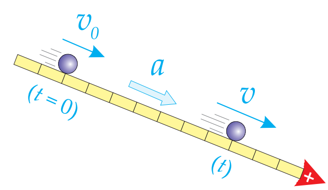
Geometricamente, isto corresponde à **área** sob o gráfico a x t.



$$\boxed{\Delta v \overset{N}{=} \text{área}}$$

7. Função Horária da Velocidade Escalar

Considere um móvel trafegando em movimento uniformemente variado, com aceleração escalar $\boldsymbol{a}$.



Em destaque na figura acima, observamos que o móvel no instante $t = 0$ possui velocidade escalar inicial $\boldsymbol{v_0}$. Após um tempo $\boldsymbol{t}$, ele atinge a velocidade escalar $\boldsymbol{v}$.

Lembrando que $\Delta v = a \cdot \Delta t$, podemos deduzir a função horária de sua velocidade assim:

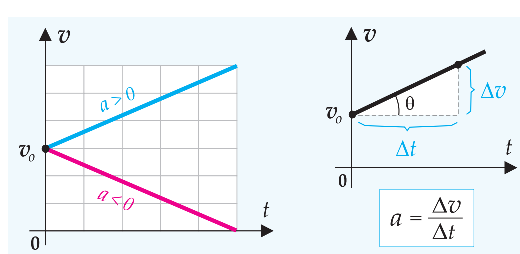
$$\Delta v = a \cdot \Delta t$$

$$v - v_0 = a \cdot (t - 0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = v_0 + a \cdot t}$$

Observe que todo MUV terá este tipo de função, isto é trata-se de uma função matemática do 1º grau, onde $\boldsymbol{v_0}$ e $\boldsymbol{a}$ correspondem aos seus coeficientes linear e angular, respectivamente.

8. Diagrama Horário da Velocidade Escalar

Já que a função horária da velocidade de todo MUV é do primeiro grau, o gráfico velocidade x tempo terá a forma de uma reta inclinada, a partir da velocidade inicial v_0 .



Observe que a declividade da reta (tgθ) representa o coeficiente angular da função, ou seja:

$$\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \overset{N}{=} tg\theta}$$

Exercícios Resolvidos

01. A tabela a seguir fornece, em função do tempo, a velocidade escalar de uma pequena esfera que desliza ao longo de uma rampa com aceleração constante.

v (m/s)	1,0	4,0	7,0	10
t (s)	0,0	2,0	4,0	6,0

Pede-se:

a) a aceleração escalar da esfera;

b) a função horária de sua velocidade;

c) o gráfico velocidade x tempo

Resolução

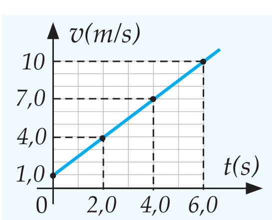
a) *Pela tabela, notamos que a cada intervalo de* ***2,0 s*** *sua velocidade escalar varia de* ***3,0 m/s****. Logo:*

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3{,}0\ m/s}{2{,}0\ s} \Rightarrow \boxed{a = 1{,}5\ m/s^2}$$

b) *Para t = 0, a tabela nos informa a velocidade inicial da esfera, ou seja: v_0 = 1,0 m/s. Usando agora a expressão da função horária da velocidade para MUV, vem:*

$$v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow \boxed{v = 1{,}0 + 1{,}5\,t}\ (SI)$$

c) Gráfico v x t :



02. Um carro parte do repouso e mantém uma aceleração escalar de 2,0 m/s² durante 10 s. Imediatamente após ele é freado bruscamente, vindo a diminuir sua velocidade escalar a uma taxa constante de – 4,0 m/s² até parar.

a) Determine a duração total deste movimento.

b) Construa os diagramas horários da velocidade e da aceleração escalares.

Resolução

a) No final da fase uniformemente acelerada, o carro atingiu uma certa velocidade escalar. Vamos calculá-la:

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$v = 0 + 2 \cdot (10) \Rightarrow v = 20\ m/s$$

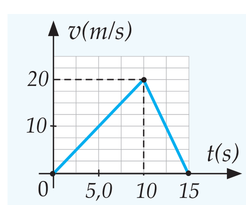
Na fase de frenagem, até parar, ele reduz sua velocidade de 20 m/s para zero. Com esta variação de velocidade podemos determinar a duração da brecada, ou seja:

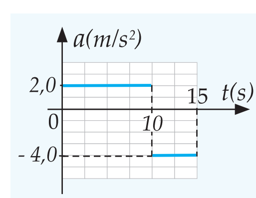
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{0 - 20}{-4{,}0} = 5{,}0\ s$$

Então, para obtermos a duração total de movimento, basta somar as durações de cada fase, isto é:

$$\Delta t_{TOTAL} = 10\ s + 5{,}0\ s \Rightarrow \boxed{\Delta t_{TOTAL} = 15\ s}$$

b) Gráficos ***v xt*** *e* ***a x t*** *:*





03. A velocidade escalar de um móvel varia com o tempo, a partir de $t = 0$, conforme a função:

$$\boxed{v = 8 - 2t} \ (\text{SI})$$

a) Determine a sua velocidade inicial e sua aceleração escalar?

b) Em que faixa de tempo o movimento é retardado?

Resolução

a) O movimento é uniformemente variado, pois a função horária de sua velocidade é do primeiro grau. Logo sua velocidade é dada por: $v = v_0 + at$.

Por comparação com a função fornecida, temos:

$$\boxed{v_0 = 8 \ m/s} \quad e \quad \boxed{a = -2 \ m/s^2}$$

*b) Pelo fato da aceleração escalar do móvel ser constantemente **negativa**, o movimento será retardado enquanto a velocidade escalar do móvel for de sinal oposto ao da aceleração, ou seja, **positiva**.*

Impondo esta condição, vem:

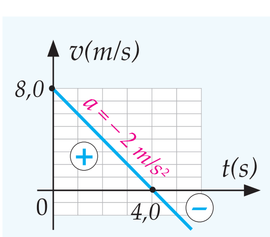
$$v > 0 \quad \Rightarrow \quad 8 - 2t > 0 \quad \Rightarrow \quad t < 4 \ s$$

Considerando-se a partir de $t = 0$, o movimento será retardado entre os instantes 0 e 4 s. Na forma de desigualdade isto seria expresso assim:

$$\boxed{0 \le t < 4 \ s}$$

Observação

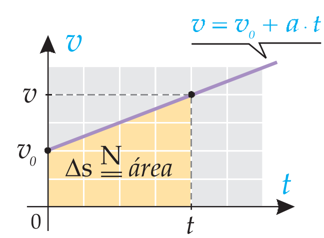
*Note pelo gráfico a seguir que o instante $t = 4$ s é o momento da inversão do sentido de tráfego, ou seja, o instante em que o móvel pára ($v = 0$). Após o instante $t = 4$ s, o móvel entra em movimento acelerado, pois **v** e **a** passam a ter o mesmo sinal (ambas negativas).*



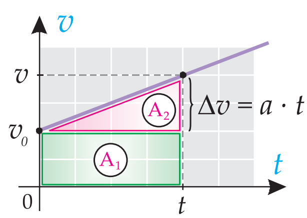
9. Deslocamento Escalar

Vimos, no módulo anterior, que, no movimento uniformemente variado, a velocidade escalar varia no tempo segundo uma função do *primeiro grau* ($v = v_0 + a \cdot t$) e, portanto, apresenta gráfico v x t como sendo uma reta inclinada.

Analogamente ao que ocorreu no estudo de movimento uniforme, a ***área*** compreendida entre o gráfico v x t e o eixo dos tempos expressa o deslocamento escalar ocorrido no intervalo de tempo escolhido.



Entre os instantes 0 e t, a área do trapézio destacado no gráfico acima representa o deslocamento escalar efetuado pelo *MUV*. Podemos, para facilitar o cálculo, dividir o trapézio em um retângulo e um triângulo, de forma que, somando-se suas respectivas áreas, teremos o deslocamento (Δs).



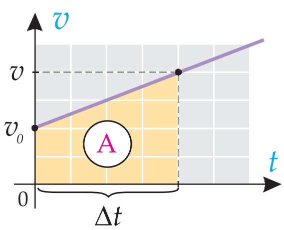
$$\boxed{\begin{aligned} A_1 &= v_0 \cdot t \\ A_2 &= \tfrac{a}{2} \cdot t^2 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\Delta s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2}$$

Esta expressão horária do 2° grau, denominada **função horária do deslocamento** permite calcular o deslocamento escalar ocorrido entre o instante *inicial* ($t = 0$) e um instante *final* (t) qualquer, bastando que se conheça a velocidade escalar inicial (v_0) do móvel e a sua aceleração escalar (a).

10. Velocidade Escalar Média no MUV

Sabemos que a razão $\Delta s/\Delta t$ fornece a velocidade escalar média de qualquer movimento. Entretanto, no MUV, ela também pode ser calculada através da **média aritmética** das velocidades instantâneas *inicial* (v_0) e *final* (v). Observe a demonstração a seguir:



$$\Delta s \overset{N}{=} \text{área (A)}$$

$$\Delta s = \left(\frac{v_0 + v}{2}\right) \cdot \Delta t$$

$$\boxed{v_m = \frac{v_0 + v}{2}}$$

De modo geral, a velocidade escalar média no *MUV* pode ser determinada entre dois instantes quaisquer (t_1 e t_2), obtendo-se a **média aritmética** das velocidades escalares desses instantes (v_1 e v_2), ou seja:

$$\boxed{v_m = \frac{v_1 + v_2}{2}}$$

Pela velocidade escalar média calculada, podemos também determinar o deslocamento escalar acontecido. Por exemplo, um carro em *MUV* que varia sua velocidade escalar de 15 m/s para 25 m/s, num prazo de 4,0 segundos, desloca:

$$\Delta s = v_m \cdot \Delta t$$

$$\Delta s = \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) \cdot \Delta t = \left(\frac{15 + 25}{2}\right) \cdot 4{,}0 = 80\,\text{m}$$

11. Equação de Torricelli

A equação de Torricelli é uma expressão que relaciona as três grandezas fundamentais do MUV: velocidade, aceleração e variação de espaço, independentemente do tempo.

A determinação da equação de Torricelli é feita a partir da fusão das funções horárias da velocidade e do deslocamento, com a eliminação da grandeza tempo. Observe:

$$v = v_0 + a \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v - v_0}{a}$$

Substituindo esse valor de t na função horária do deslocamento, temos:

$$\Delta s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

$$\Delta s = v_0 \cdot \left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

Desenvolvendo, matematicamente, a expressão acima, vem:

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta s}$$

Exercícios Resolvidos

01. Um automóvel com velocidade escalar de 90 km/h (ou seja, 25 m/s) é freado uniformemente e pára após 10 s. Analisando esta frenagem, calcule:

a) a aceleração escalar do carro;

b) o seu deslocamento escalar até parar.

Resposta

a) $v = v_0 + a \cdot t$

$$0 = 25 + a \cdot 10 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = -2{,}5\ \text{m/s}^2}$$

b) $\Delta s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$

$$\Delta s = 25 \cdot 10 + \frac{-2{,}5}{2} \cdot 10^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta s = 125\ \text{m}}$$

Podemos também calcular o deslocamento escalar sem utilizar a aceleração escalar. Observe:

$$\Delta s = v_m \cdot \Delta t = \left(\frac{v_0 + v}{2}\right) \cdot \Delta t$$

$$\Delta s = \left(\frac{25 + 0}{2}\right) \cdot 10 = 125\,\text{m}$$

02. Um carro parte do repouso com uma aceleração escalar constante de 2,0 m/s² e percorre 25 m. Nesse percurso:

a) qual a velocidade escalar final atingida pelo carro?

b) qual a sua velocidade escalar média?

Resposta

a) *Nota-se, pelos dados, a ausência da grandeza tempo. Logo, devemos determinar a velocidade atingida por uma equação não horária. Usando a equação de Torricelli, temos:*

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta s$$

$$v^2 = 0^2 + 2 \cdot 2 \cdot 25 \Rightarrow \boxed{v = 10 \text{ m/s}}$$

b) $v_m = \dfrac{v_0 + v}{2}$

$$v_m = \frac{0 + 10}{2} \Rightarrow \boxed{v_m = 5{,}0 \text{ m/s}}$$

12. Função Horária do Espaço

Podemos obter a relação espaço-tempo do MUV por meio da função horária do deslocamento, já demonstrada. Observe:

$$\Delta s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

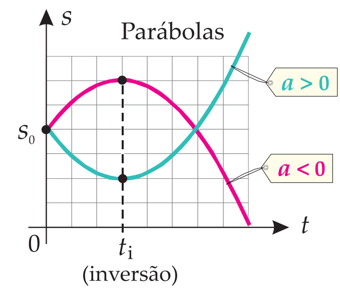
$$s - s_0 = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

$$\boxed{s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2}$$

Portanto, todo movimento uniformemente variado possui função horária do espaço do segundo grau, sendo s_0, v_0 e $a/2$ os coeficientes da função.

13. Diagrama Horário do Espaço

A representação gráfica de toda função matemática do segundo grau é uma parábola. Como a função horária do espaço do MUV é do 2º grau, o gráfico $s \times t$ será parabólico.



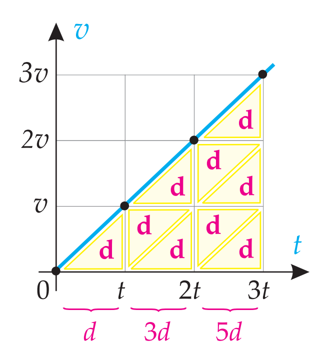
A concavidade da parábola do gráfico $s \times t$ será voltada para cima quando a aceleração escalar do MUV for **positiva**. Se a aceleração escalar for **negativa**, a concavidade da parábola será voltada para baixo.

Repare que o vértice da parábola, do gráfico $s \times t$ acima, ocorre no instante (t_i) de **inversão** do sentido de movimento, que deixa de ser progressivo para ser retrógrado, ou vice-versa. Dessa forma, o instante do vértice da parábola, no gráfico $s \times t$, sempre representa o momento em que a velocidade do móvel é **nula** ($v = 0$).

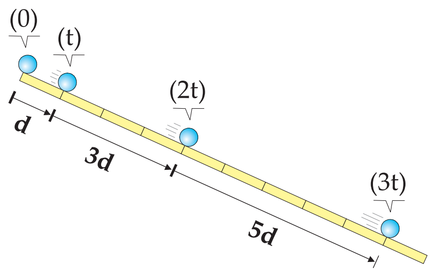
14. Deslocamentos Sucessivos

Considere um móvel que parta do repouso ($v_0 = 0$) com uma aceleração escalar constante positiva, como sucede com uma bolinha quando solta numa rampa.

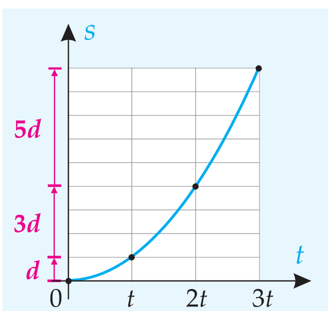
Por meio do cálculo de áreas no gráfico velocidade × tempo, podemos determinar, em intervalos de tempos iguais, os deslocamentos sucessivos efetuados pelo móvel.



Repare que os deslocamentos escalares sucessivos são crescentes e proporcionais aos números ímpares, ou seja: ***d***, **3*d***, **5*d***, **7*d***, etc. Essa propriedade sempre ocorre quando o móvel parte com velocidade inicial **nula**.



Podemos construir a parábola do gráfico $s \times t$ desse MUV utilizando tal propriedade. Observe essa construção abaixo:



Exercícios Resolvidos

01. A função horária do espaço de um móvel é dada por:

$$s = 2 + 3t + 4t^2 \quad (SI)$$

Determine para esse movimento:

a) o espaço inicial (s_0), a velocidade inicial (v_0) e a aceleração escalar (a);

b) a função horária de sua velocidade.

Resolução

a) Trata-se de um movimento uniformemente variado, pois a função horária dada é do 2º grau, ou seja:

$$s = \underbrace{s_0}_{\text{Espaço inicial}} + \underbrace{v_0}_{\text{Velocidade inicial}} \cdot t + \underbrace{\frac{a}{2}}_{\text{Metade da aceleração}} \cdot t^2$$

Por comparação com a função dada, temos:

$$s_0 = 2\ m \qquad v_0 = 3\ m/s$$

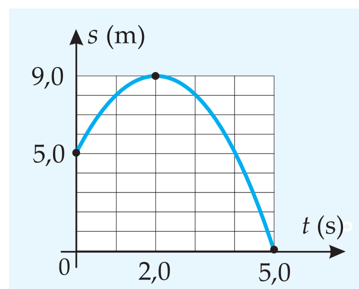
$$(a/2) = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 8\ m/s^2$$

b) Pela função horária da velocidade do MUV, vem:

$$v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow v = 3 + 8\,t \quad (SI)$$

Pode-se também obter a função acima diretamente por derivação (ds/dt).

02. O gráfico abaixo representa a posição (espaço) em função do tempo para o movimento de uma partícula, que tem aceleração escalar constante.



Pede-se:

a) o instante (t) em que a partícula pára;

b) a sua velocidade escalar inicial (v_0);

c) a sua aceleração escalar (a);

d) a função horária do espaço do móvel.

Resolução

a) No gráfico, o instante do vértice da parábola (t = 2,0 s) indica o momento em que ocorre a inversão de sentido do movimento (o móvel passa de progressivo para retrógrado), ou seja:

$$v = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 2{,}0\ s}$$

b) Nota-se pelo gráfico que, nos dois primeiros segundos de movimento, a partícula teve uma variação de espaço igual a:

$$\Delta s = s - s_0 = 9{,}0 - 5{,}0 = 4{,}0\ m$$

Logo, sua velocidade escalar média foi de:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4{,}0\ m}{2{,}0\ s} = 2{,}0\ m/s$$

Lembrando que a velocidade média no MUV equivale à média das velocidades inicial e final, vem:

$$v_m = \frac{v + v_0}{2}\ ,\ \text{em que } v = 0 \text{ (inversão). Assim:}$$

$$2{,}0 = \frac{0 + v_0}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 = 4{,}0\ m/s}$$

c) Usando a função horária da velocidade do MUV, temos:

$$v = v_0 + a \cdot t\ ,\ \text{em que } v = 0 \text{ em } t = 2{,}0\ s. \text{ Logo:}$$

$$0 = 4{,}0 + a \cdot (2{,}0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = -2{,}0\ m/s^2}$$

d) $s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$

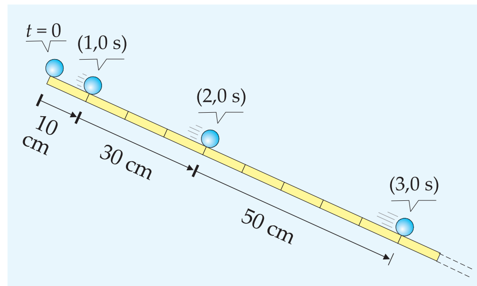
Substituindo na função os valores do espaço inicial (s_0 = 5,0 m, pelo gráfico), da velocidade inicial (v_0) e da aceleração escalar (a) da partícula, vem:

$$s = 5{,}0 + 4{,}0 \cdot t + \frac{-2{,}0}{2} \cdot t^2$$

Portanto: $\boxed{s = 5{,}0 + 4{,}0\ t - 1{,}0\ t^2 \quad (SI)}$

Esta expressão representa a equação da ***parábola*** *do gráfico* $s \times t$ *dado.*

03. A figura a seguir mostra, em intervalos de 1,0 s, a mudança de posição de uma bolinha que se move sobre uma rampa longa, após ser solta no instante $t = 0$.



a) Que tipo de movimento ela executa sobre a rampa?

b) Quantos centímetros ela percorrerá durante seu quarto segundo de movimento sobre a rampa?

Resolução

a) O movimento é ***uniformemente acelerado****, já que os deslocamentos sucessivos da bolinha (a cada 1,0 s) são crescentes e proporcionais aos números ímpares, isto é: 10 cm (no 1º segundo), 30 cm (no 2º segundo), 50 cm (no 3º segundo), etc.*

b) Se os deslocamentos consecutivos da bolinha (a cada 1,0 s) seguem a ordem dos números ímpares, portanto no quarto segundo, isto é, entre t = 3,0 s e t = 4,0 s, a bolinha percorrerá ***70 cm****.*

Capítulo 04. Diagramas Horários

1. Introdução

Conhecendo-se o diagrama horário de uma das grandezas de um movimento (espaço, velocidade ou aceleração), podemos tirar conclusões a respeito das outras grandezas, bem como construir seus respectivos diagramas horários.

O quadro a seguir relaciona os diagramas horários com as informações que podem ser obtidas em cada um deles.

GRÁFICO	PERMITE CALCULAR
$s \times t$	velocidade
$v \times t$	aceleração e variação de espaço
$a \times t$	variação de velocidade

Um movimento pode ser composto por etapas com características diferentes. Por exemplo, um veículo pode entrar em movimento, acelerando de modo uniforme (MUV), e, após certo tempo, passar a manter constante sua velocidade atingida (MU).

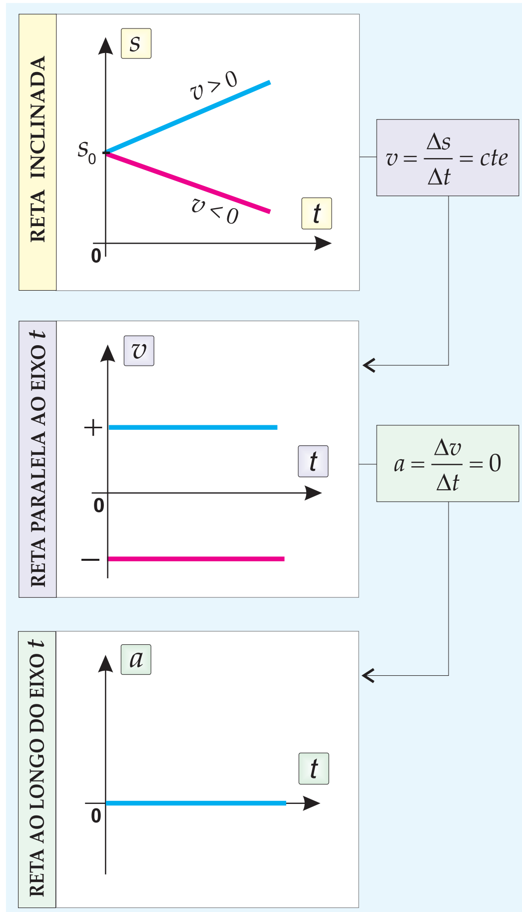
Interpretar e construir diagramas horários para esse tipo de movimento misto, a partir das características já estudadas de MU e MUV, são os objetivos deste módulo.

2. Diagramas Horários do MU

O **Movimento Uniforme** (**MU**) apresenta as seguintes características:

$s = f(t)$	$s = s_0 + v \cdot t$ (1º grau)
$v = f(t)$	$v = \text{constante} \neq 0$
$a = f(t)$	$a = 0$

Tais características são representadas graficamente assim:

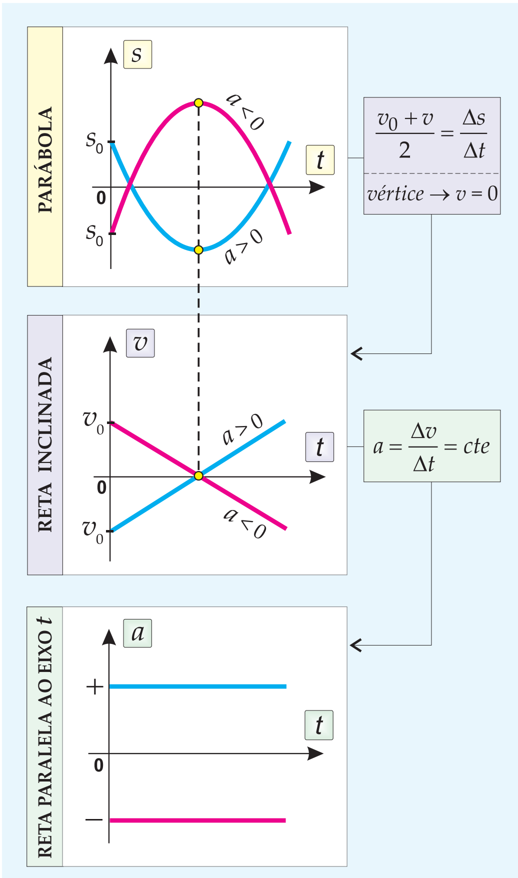


3. Diagramas Horários do MUV

O **Movimento Uniformemente Variado** (**MUV**) possui as seguintes características:

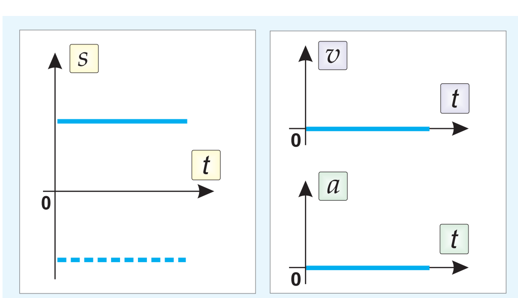
$s = f(t)$	$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$ (2º grau)
$v = f(t)$	$v = v_0 + a \cdot t$ (1º grau)
$a = f(t)$	$a = \text{constante} \neq 0$

A representação gráfica dessas característica segue abaixo:



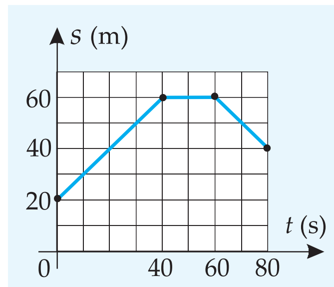
4. Repouso

No estado de repouso: o espaço é **constante** (pois o corpo não muda de posição), a velocidade é constantemente **nula** e, portanto, não há aceleração. Veja isso diagramado:



Exercícios Resolvidos

01. O gráfico a seguir indica como varia a posição de uma pessoa em função do tempo, ao longo de uma caminhada em linha reta.



Com base no gráfico:

a) O que ocorre com a pessoa entre os instantes t = 40 s e t = 60 s ?

b) Qual a distância total percorrida pela pessoa entre os instantes 0 e 80 s ?

c) Construa o diagrama horário de sua velocidade escalar.

Resolução

a) *Entre os instantes 40 s e 60 s, a pessoa encontra-se em* ***repouso*** *(espaço constante).*

b) *Nos primeiros 40 s, a pessoa caminha em movimento uniforme progressivo (**s** cresce linearmente com **t**) e desloca:* $\Delta s = s - s_0 = 60 - 20 = 40\ m$.

Nos últimos 20 s, a pessoa retrocede, em movimento uniforme, do espaço 60 m para o espaço 40 m. Logo, desloca: $\Delta s = 40 - 60 = -20\ m$.

Conclusão: $d = |\Delta s|$

$$d_{Total} = d_{Ida} + d_{Volta} = 40 + 20$$

$$d_{Total} = 60\ m$$

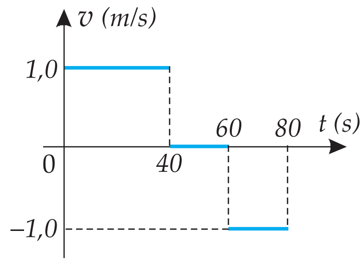
c) *Nos primeiros 40 s:*

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{40\ m}{40\ s} = 1{,}0\ m/s \quad \text{(constante)}$$

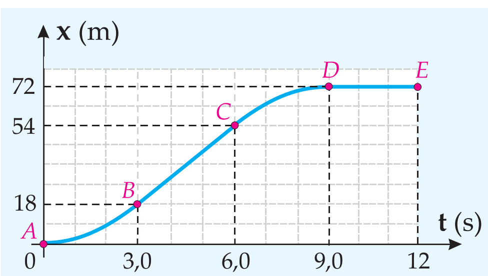
Nos últimos 20 s:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{-20\ m}{20\ s} = -1{,}0\ m/s \quad \text{(constante)}$$

Lembrando que a velocidade é nula (repouso), entre os instantes 40 s e 60 s, temos:



02. A posição **x** de um veículo, que se move entre dois semáforos de uma avenida retilínea, é mostrada em função do tempo **t** pelo gráfico abaixo. Considere que os trechos *AB* e *CD* do gráfico sejam arcos de parábola, com vértices respectivamente em *A* e em *D*.



Esboce os diagramas horários da velocidade e da aceleração para este movimento.

Resolução

Vamos detalhar o tipo de movimento desenvolvido em cada trecho e, depois, construir os gráficos.

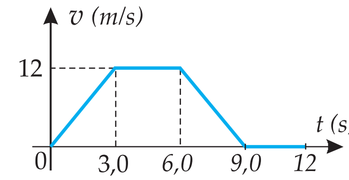
- *AB: MUV, com $v_0 = 0$ (vértice em A). Em 3,0 segundos, o carro desloca 18 metros. Logo:*

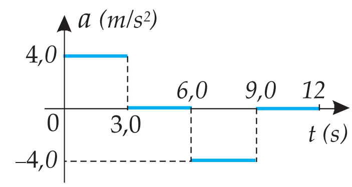
$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{18\ m}{3{,}0\,s} = 6{,}0\,m/s$$

$$v_m = \frac{v_0 + v}{2} \Rightarrow 6{,}0 = \frac{0+v}{2} \Rightarrow \boxed{v = 12\,m/s}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{12\ m/s}{3{,}0\,s} = \boxed{4{,}0\,m/s^2}\ \text{(constante)}$$

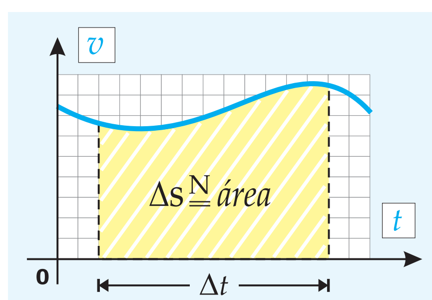
- *BC: MU, com v = 12 m/s (a velocidade final do trecho AB) e aceleração nula (a = 0).*
- *CD: MUV, com a = – 4,0 m/s², pois as parábolas AB e CD são simétricas, sendo CD com concavidade voltada para baixo. Em D, v = 0.*
- *DE: Repouso (v = 0 e a = 0).*



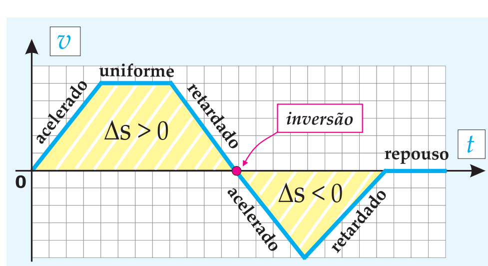


5. Cálculo de Áreas

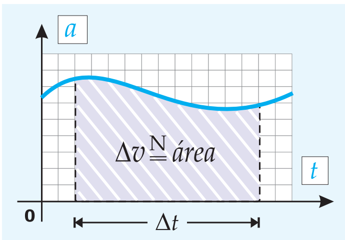
O **deslocamento escalar** (Δs) num certo intervalo de tempo (Δ*t*), para um movimento qualquer, pode ser determinado através do cálculo da **área** existente entre o gráfico *v* x *t* e o eixo dos tempos, limitada pelo intervalo de tempo escolhido. Observe isso no diagrama abaixo:



O **diagrama horário da velocidade** pode indicar que o movimento é composto por etapas, de tal forma que podemos, em cada trecho, identificar suas características e também calcular seus respectivos deslocamentos escalares.



Analogamente, a **área** calculada no **diagrama horário da aceleração**, entre o gráfico e o eixo dos tempos, limitada por um Δt, indica a **variação de velocidade** ocorrida naquele intervalo.

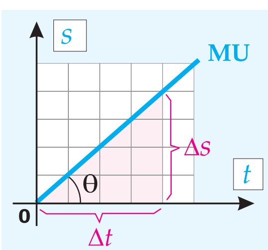


Observação

A área sob o gráfico espaço x tempo **não** tem significado físico prático. Logo, não há razão para efetuarmos seu cálculo.

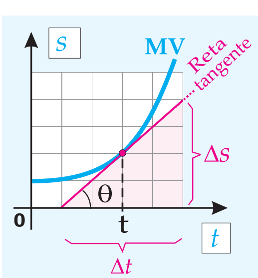
6. Declividades

Vimos no estudo de **movimento uniforme** que a **declividade** (tg θ) da reta inclinada do gráfico *s* x *t* indica o valor da velocidade escalar constante do móvel. Ou seja:



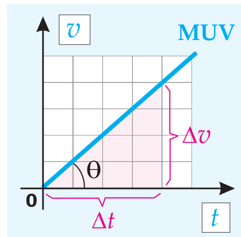
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \overset{N}{=} \text{tg}\,\theta$$

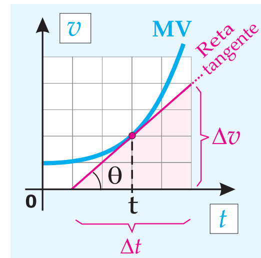
Em decorrência disso, num **movimento variado** a declividade da **reta tangente** ao gráfico *s* x *t*, num certo instante **t**, representa numericamente a velocidade escalar do móvel naquele instante. Isto é:



$$v_t \overset{N}{=} \text{tg}\,\theta$$

Analogamente, o cálculo de declividade num gráfico *v* x *t* leva-nos a encontrar a aceleração escalar do movimento ou a que ocorre num determinado instante.





$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \overset{N}{=} \text{tg}\,\theta \qquad a_t \overset{N}{=} \text{tg}\,\theta$$

Observação

No cálculo de declividades (tg θ) em diagramas horários, procuramos **não** substituir o ângulo **θ** (em graus) já que os eixos cartesianos dos diagramas na Física normalmente apresentam **escalas diferentes**.

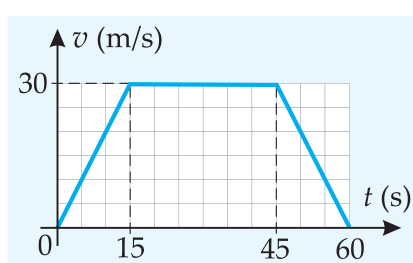
Exercícios Resolvidos

01. O gráfico a seguir indica como varia a velocidade escalar de uma composição de metrô, em função do tempo, durante seu tráfego entre duas estações.

Com base no gráfico:

a) Calcule o deslocamento escalar da composição entre as duas estações.

b) Construa o diagrama horário da aceleração escalar para esse movimento.

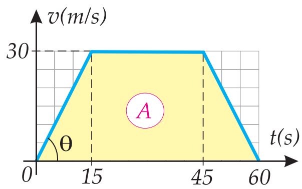


Resolução

a) *A área do trapézio, sob o gráfico v x t dado, representa o deslocamento escalar ocorrido, isto é:*

$\Delta s \overset{N}{=} \text{área (A)}$

$\Delta s = \dfrac{60+30}{2} \cdot 30$



$\boxed{\Delta s = 1350 \text{ m}}$

b) *Primeiramente, vamos calcular a aceleração escalar nas três etapas do movimento.*

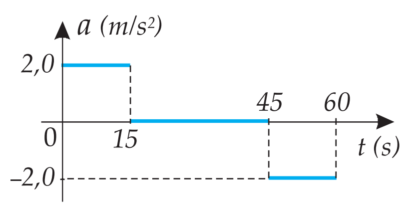
- *Nos primeiros 15 s: (MUV)*

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{30\,m/s}{15\,s} = 2{,}0\,m/s^2 \quad (\text{ou } tg\,\theta)$$

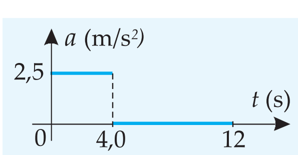
- *Entre os instantes 15 s e 45 s: a = 0 (MU).*
- *Nos últimos 15 s: (MUV)*

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-30\,m/s}{15\,s} = -2{,}0\,m/s^2$$

A partir desses valores, temos:



02. A *performance* de um atleta numa corrida de curta duração (12 s) é indicada através do diagrama horário de sua aceleração escalar. Considere que em t = 0 o atleta parte do repouso ($v_0 = 0$) e da origem ($s_0 = 0$).



a) Esboce o diagrama horário de sua velocidade escalar.

b) Calcule a distância percorrida pelo atleta nos 12 s de prova.

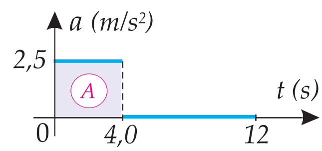
c) Esboce o gráfico espaço x tempo.

Resolução

a) *Nos primeiros 4,0 s de MUV, o atleta atinge uma velocidade de:*

$$v = v_0 + a \cdot t = 0 + 2{,}5 \cdot 4{,}0 = 10\,m/s$$

Poderíamos também chegar ao resultado acima calculando a área sob o gráfico a x t, ou seja:

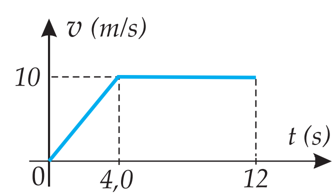


$\Delta v \overset{N}{=} \text{área (A)}$

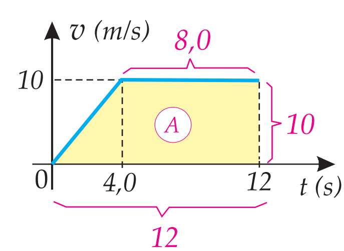
$v - 0 = (2{,}5)(4{,}0)$

$v = 10\,m/s$

Lembrando que o atleta vai manter esta velocidade até o final (pois, na seqüência, a = 0), vem:



b) *Pela área sob o gráfico v x t, temos:*

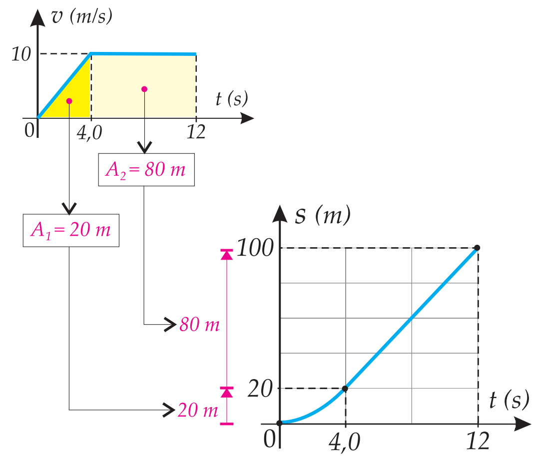


$\Delta s \overset{N}{=} \text{área (A)}$

$\Delta s = \dfrac{12+8{,}0}{2} \cdot 10 \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \Delta s = 100\,m}$

c) *Nos primeiros 4,0 s de MUV, o gráfico* $s \times t$ *será um arco de parábola com concavidade voltada para cima (pois,* $a > 0$*), a partir da origem (*$s_0 = 0$*) e com vértice nesse ponto (pois,* $v_0 = 0$*). Entre os instantes 4,0 s e 12 s de MU, o gráfico segue retilíneo e inclinado.*

Para traçarmos o gráfico $s \times t$ *usaremos os deslocamentos ocorridos em cada etapa, que podem ser obtidos através da área sob o gráfico* $v \times t$*. Ou seja:*

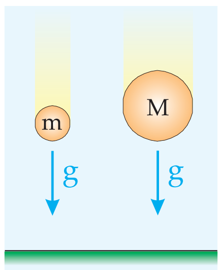


Capítulo 05. Movimentos Verticais

1. Experiência de Galileu

Foi Galileu Galilei (1564-1642) quem desvendou pela primeira vez, de modo correto, como ocorre a queda livre dos corpos, quando soltos próximos à superfície da Terra. Desprezando a ação do ar, ele enunciou:

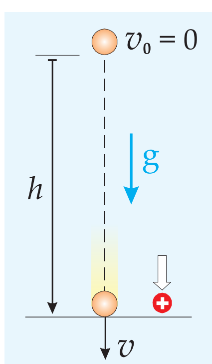
Todos os corpos soltos num mesmo local, livres da resistência do ar, caem com uma mesma aceleração, quaisquer que sejam suas massas. Essa aceleração é denominada *gravidade* (g).



Próximo da Terra: $\boxed{g \cong 10 \text{ m/s}^2}$

2. Queda Livre

Considere um objeto em queda vertical, a partir do repouso, num local em que o efeito do ar pode ser desprezado e a aceleração da gravidade seja constante e igual a **g**. Orientando-se a trajetória para baixo, o objeto realizará um **movimento uniformemente variado** (MUV) com aceleração escalar igual a **g**. Ou seja:



$$\boxed{a = g}$$

Por meio da equação horária do deslocamento de MUV, podemos relacionar a altura descida (h) com seu respectivo tempo de queda (t) da seguinte forma:

$$\Delta s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

$$\boxed{h = \frac{g}{2} \cdot t^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

A velocidade escalar (v) adquirida após certo tempo (t) de queda é dada por:

$$v = v_0 + a \cdot t \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = g \cdot t}$$

Por outro lado, podemos expressar a velocidade atingida (v) em função da altura descida (h). Usando a equação de Torricelli, temos:

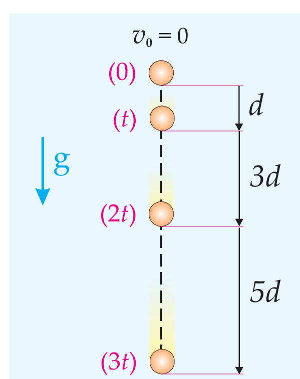
$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta s$$

$$v^2 = 0^2 + 2 \cdot g \cdot h \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

Assim, a velocidade escalar atingida é diretamente proporcional ao tempo de queda e, ao mesmo tempo, diretamente proporcional à raiz quadrada da altura descida.

3. Deslocamentos Sucessivos

Como se trata de um MUV vertical, um objeto em queda livre, a partir do repouso, apresenta deslocamentos escalares sucessivos (em intervalos de tempo iguais) diretamente proporcionais aos números ímpares.



Repare que as distâncias descidas, em sucessivos intervalos de tempo (t), formam uma progressão aritmética proporcional aos **números ímpares**, ou seja: **d**, **3d**, **5d**, **7d**, etc.

Exercícios Resolvidos

01. Um corpo é abandonado, a partir do repouso, de uma altura h = 45 m acima do solo terrestre. Despreze a resistência do ar e considere $g = 10\ m/s^2$.

Determine:

a) o tempo de queda do corpo até o solo;

b) o módulo da velocidade do corpo no instante em ele atinge o solo.

Resolução

a) $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 45}{10}} \Rightarrow \boxed{t = 3{,}0\ s}$

b) $v = g \cdot t = 10 \cdot 3{,}0 \Rightarrow \boxed{v = 30\ m/s}$ *ou*

$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 45} \Rightarrow \boxed{v = 30\ m/s}$

02. Uma pedra é abandonada de uma altura de 3,2 m acima do solo lunar e gasta 2,0 s para atingir o solo.

Pede-se:

a) o valor da aceleração da gravidade na Lua;

b) a altura descida pela pedra em seu último segundo de queda;

c) o gráfico velocidade x tempo de queda.

Resolução

a) *Na Lua não há atmosfera, logo a pedra realiza uma queda livre até atingir o solo lunar. Assim:*

$$h = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$3{,}2 = \frac{g}{2} \cdot (2{,}0)^2 \Rightarrow \boxed{g = 1{,}6\ m/s^2}$$

b) *No primeiro segundo de queda a pedra desceu:*

$$h_1 = \frac{g}{2} \cdot t^2 = \frac{1{,}6}{2} \cdot (1{,}0)^2 = \boxed{0{,}8\ m}$$

Logo, durante seu segundo e último segundo de queda ela percorreu:

$$h_2 = h - h_1 = 3{,}2 - 0{,}8 \Rightarrow \boxed{h_2 = 2{,}4\ m}$$

Lembrando que as distâncias descidas, sucessivamente a cada 1,0 s, encontram-se na ordem dos números ímpares, poderíamos ter optado pelo seguinte cálculo:

$h = h_1 + h_2$ *(em que, pela ordem, $h_2 = 3\ h_1$)*

$3{,}2 = h_1 + 3\ h_1$

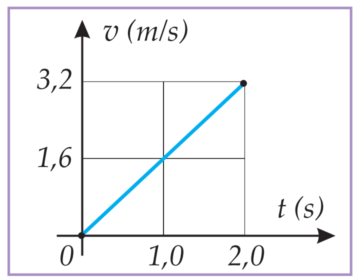
$3{,}2 = 4\ h_1$

$h_1 = 0{,}8\ m \Rightarrow h_2 = 3\ h_1 = \boxed{2{,}4\ m}$

c) *A pedra tem velocidade inicial nula ($v_0 = 0$) e ,após 2,0 s, atinge uma velocidade final de queda de:*

$$v = g \cdot t = 1{,}6 \cdot 2{,}0 \Rightarrow \boxed{v = 3{,}2\ m/s}$$

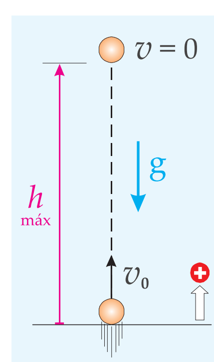
Através desses valores, temos:



4. Lançamento Vertical para Cima

Quando abandonamos um corpo em **queda livre** ou lançamos tal corpo **verticalmente para baixo**, a aceleração da gravidade local age no sentido de só acelerar o movimento, ou seja, ela aumenta o módulo da velocidade escalar de queda.

Nesses movimentos descendentes, procuramos orientar a trajetória para **baixo**, de forma que a aceleração escalar coincida com o valor da gravidade local ($a = g$). O único cuidado que devemos ter no equacionamento dessas quedas é de observar a existência ou não de velocidade inicial.



Por outro lado, quando lançamos um objeto **verticalmente para cima** (num local onde a resistência do ar é desprezível), a gravidade acaba produzindo dois efeitos: freia o móvel na subida (até pará-lo) e, em seguida, faz o móvel retroceder no vôo, acelerando-o na descida.

Para estudarmos este MUV vertical, procuramos orientar a trajetória **para cima**. Com isso, a aceleração escalar de vôo (na subida e na descida) passa a ser **negativa**, ou seja:

$$\boxed{a = -g} \Rightarrow$$

SUBIDA **RETARDADA**	$v > 0$	$a < 0$
DESCIDA **ACELERADA**	$v < 0$	$a < 0$

5. Cálculos Básicos

A partir das equações do MUV, podemos obter, para um corpo lançado para cima, o **tempo de subida** e a **altura máxima** atingida em relação ao ponto de partida.

a) Lembrando que no final da subida a velocidade se anula, temos:

$$v = v_0 - g \cdot t$$

$$0 = v_0 - g \cdot t_s \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_S = \frac{v_0}{g}}$$

b) Pela equação de Torricelli, vem:

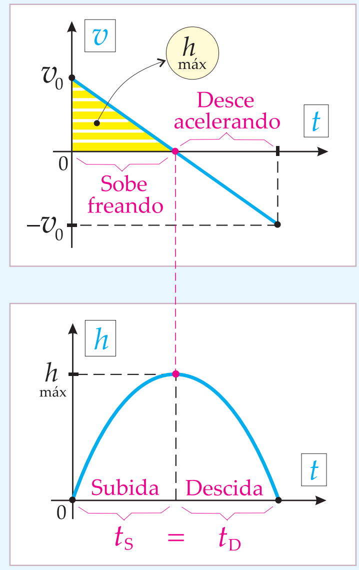
$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta s$$

$$0^2 = v_0^2 + 2 \cdot (-g) \cdot h_{máx} \Rightarrow \boxed{h_{máx} = \frac{v_0^2}{2g}}$$

6. Diagramas Horários

Representamos a seguir as funções horárias e os diagramas horários da velocidade escalar e da altura do móvel em relação ao ponto de lançamento.

$$v = v_0 - g \cdot t$$



$$h = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Propriedades

a) O tempo de subida coincide com o tempo de descida até o ponto de lançamento.

b) Quando o móvel retornar ao ponto de lançamento, sua velocidade escalar será igual a $(-v_0)$.

Exercícios Resolvidos

01. Um corpo é lançado verticalmente para cima, a partir do solo, com velocidade escalar inicial de 30 m/s. Despreze a resistência do ar e considere $g = 10\ m/s^2$.

Determine:

a) o tempo de subida;

b) o tempo total de vôo;

c) a altura máxima atingida.

Resolução

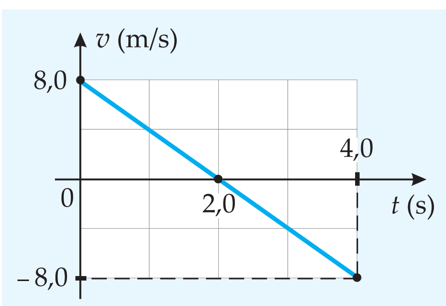
a) $t_s = \frac{v_0}{g} = \frac{30}{10} \Rightarrow \boxed{t_s = 3{,}0\,s}$

b) Como o tempo de subida é igual ao de descida, temos:

$$t_{Total} = t_S + t_D = 3{,}0 + 3{,}0 \Rightarrow \boxed{t_{Total} = 6{,}0\ s}$$

c) $h_{máx} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{30^2}{2 \cdot 10} \Rightarrow \boxed{h_{máx} = 45\,m}$

02. O gráfico a seguir indica como variou a velocidade escalar de uma pedra, em função do tempo, após ter sido lançada verticalmente para cima a partir do solo de um certo planeta.



Desprezando qualquer efeito atmosférico, calcule:

a) o valor da aceleração da gravidade em tal planeta;

b) a altura máxima atingida pela pedra.

Resolução

a) Pelo gráfico, a velocidade inicial é 8,0 m/s e o tempo que a pedra leva para subir (até parar) é 2,0 s. Usando a função horária de velocidade, vem:

$$v = v_0 - g \cdot t$$

$$0 = 8{,}0 - g \cdot 2{,}0 \Rightarrow \boxed{g = 4{,}0\ m/s^2}$$

b) A altura máxima pode ser determinada pela área do triângulo sob o gráfico v x t entre 0 e 2,0 s, pois constitui o deslocamento efetuado durante a subida. Ou seja:

$$h_{máx} = área = \frac{2{,}0 \cdot 8{,}0}{2} = \boxed{8{,}0\,m}$$

Como opção, podemos também calcular a altura máxima usando a expressão obtida da equação de Torricelli, isto é:

$$h_{máx} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{8{,}0^2}{2 \cdot 4{,}0} \Rightarrow \boxed{h_{máx} = 8{,}0\,m}$$

Capítulo 06. Composição de Movimentos

1. Introdução

Sabemos que o estado de movimento ou de repouso de um corpo depende do referencial adotado. Portanto, a velocidade de um corpo está associada a um **referencial**. O objetivo deste módulo é estudar o que ocorre com a velocidade de um corpo quando trocamos de referencial.

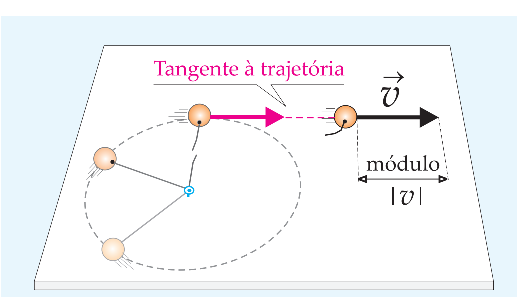
Para iniciar este estudo, necessitamos definir o caráter vetorial que a grandeza velocidade possui.

2. Vetor Velocidade

A grandeza velocidade deve indicar não somente a rapidez com que um corpo se move, mas também para **onde** se movimenta a cada instante. Assim sendo, ela é obtida quando se acrescenta ao **módulo** da velocidade escalar uma **direção** e um **sentido**, ou seja, uma orientação que informe para onde o móvel quer seguir.

Quando um móvel percorre uma trajetória **retilínea**, a direção da velocidade é a **mesma** da trajetória. No caso da trajetória ser **curvilínea**, a direção da velocidade é **tangente à curva** em cada ponto.

A comprovação disso é mostrada pela experiência abaixo, em que uma esfera deixa de executar um movimento circular e sai, por vontade própria, tangente à curva após o rompimento do fio que garantia sua circulação.

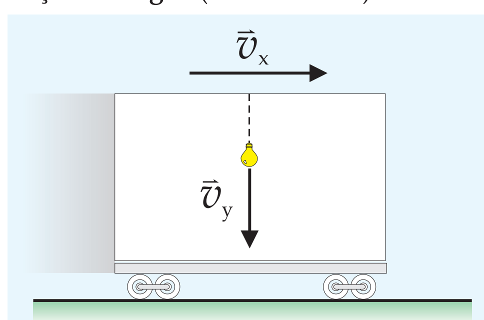


Em resumo, sendo v a velocidade escalar e $\vec{v}$ o vetor velocidade, podemos escrever:

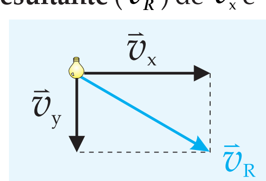
$\vec{v}$	módulo	$\lvert\vec{v}\rvert = \lvert v \rvert$
	direção	tangente à trajetória
	sentido	do movimento

3. Composição Vetorial de Velocidades

Consideremos uma lâmpada despencando no interior de um vagão que trafega nos trilhos com uma velocidade horizontal ($\vec{v}_x$). Num certo instante de sua queda, a lâmpada apresenta uma velocidade vertical ($\vec{v}_y$) em relação ao **vagão** (1º referencial).



Se quisermos obter a velocidade com que a lâmpada cai em relação aos **trilhos** (2º referencial), devemos **somar vetorialmente** sua **velocidade relativa** ($\vec{v}_y$) com a **velocidade de arrasto** ($\vec{v}_x$) promovida pelo vagão. Ou seja, a velocidade da lâmpada em relação aos trilhos é a **resultante** ($\vec{v}_R$) de $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$.



$$\vec{v}_R = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

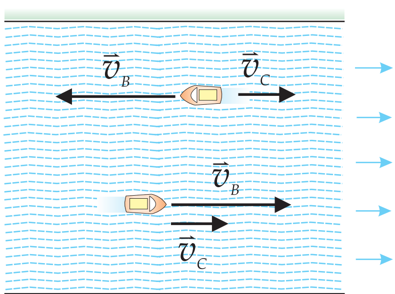
Quando efetuamos tal composição, estamos aplicando o *Princípio da Simultaneidade* de Galileu:

> **O movimento de um corpo pode ser entendido como a composição de outros movimentos realizados separadamente e ao mesmo tempo.**

4. Aplicações Básicas

Consideremos um barco que se movimenta com uma velocidade própria $\vec{v}_B$, relativa às águas de um rio. Seja $\vec{v}_C$ a velocidade da correnteza das águas em relação às margens do rio. Vamos determinar sua velocidade resultante $\vec{v}_R$, ou seja, a velocidade que o barco possui em relação às margens do rio, nos seguintes casos:

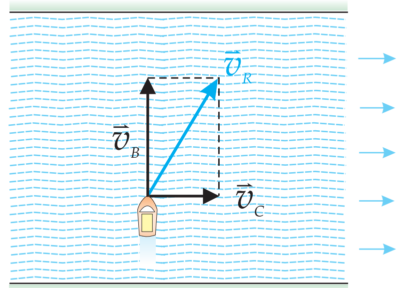
a) O barco tem sua velocidade própria ($\vec{v}_B$) orientada na direção da correnteza, com sentido a favor da correnteza (descendo o rio) ou contra (subindo o rio).



Em cada situação, o **módulo** da velocidade **resultante** do barco, em relação às margens, é dada por:

- $\boxed{v_R = v_B + v_C}$ (na descida do rio)
- $\boxed{v_R = v_B - v_C}$ (na subida do rio)

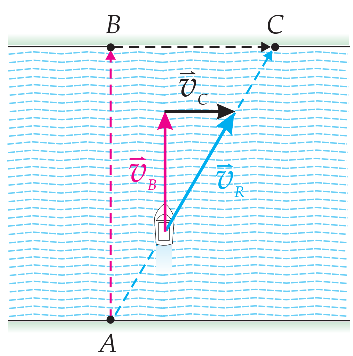
b) O barco atravessa o rio mantendo sua velocidade própria ($\vec{v}_B$), perpendicular ao arrastamento da correnteza.



Nesse caso, o **módulo** da velocidade resultante do barco, em relação às margens, é dada através do teorema de Pitágoras:

$$v_R^2 = v_B^2 + v_C^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_R = \sqrt{v_B^2 + v_C^2}}$$

Supondo que as velocidades citadas sejam constantes (movimentos uniformes), podemos calcular o **tempo de travessia** de vários modos diferentes, de acordo com o *Princípio da Simultaneidade*. Observe isto:



$$\Delta t = \frac{AB}{v_B}$$

$$\Delta t = \frac{BC}{v_C}$$

$$\Delta t = \frac{AC}{v_R}$$

Exercícios Resolvidos

01. Considere um trecho de um rio com largura (distância entre margens) constante L = 400 m, cuja correnteza tem velocidade constante de módulo v_C = 3,0 m/s. Um barco cuja velocidade em relação às águas é constante e de módulo v_B = 4,0 m/s pretende atravessar esse rio de uma margem à outra, mantendo sua velocidade $\vec{v}_B$ perpendicular à da correnteza ($\vec{v}_C$).

Calcule:

a) o tempo gasto na travessia;

b) o módulo do deslocamento do barco, em relação às margens, nessa travessia.

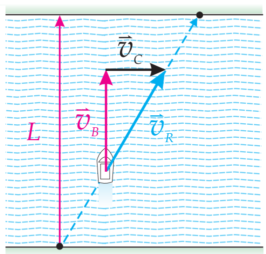
Resolução

a) Na travessia, o barco teve um deslocamento relativo às águas que coincide em módulo com a largura do rio. Logo:

$$\Delta t = \frac{L}{v_B}$$

$$\Delta t = \frac{400\,m}{4{,}0\,m/s}$$

$$\boxed{\Delta t = 100\,s}$$



b) A velocidade do barco em relação às margens é obtida pela composição de sua velocidade própria ($\vec{v}_B$) com a de arrastamento da correnteza ($\vec{v}_C$). Usando o teorema de Pitágoras, vem:

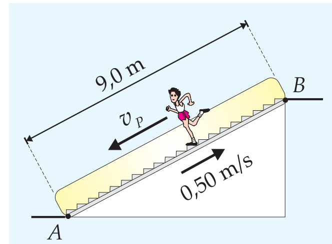
$$v_R = \sqrt{v_B^2 + v_C^2}$$

$$v_R = \sqrt{4{,}0^2 + 3{,}0^2} \Rightarrow \boxed{v_R = 5{,}0\,m/s}$$

Logo, durante os 100 s de travessia, o barco deslocou-se efetivamente:

$$\Delta s_R = v_R \cdot \Delta t = (5{,}0\,m/s)(100\,s) = \boxed{500\,m}$$

02. A escada rolante de uma galeria comercial, de comprimento AB = 9,0 m, liga os pontos A e B em pavimentos consecutivos com uma velocidade ascendente de módulo v_E = 0,50 m/s, como ilustra a figura a seguir. Suponha que uma pessoa, mantendo uma velocidade constante de módulo v_P em relação à escada, desça-a de B para A (contra o arrastamento da escada) num prazo de 18 s.



Determine v_P e o tempo que a pessoa gastaria se tivesse efetuado o inverso: subisse a escada de A para B, caminhando sobre ela com velocidade de módulo v_P.

Resolução

*a) Em relação ao solo, a velocidade da pessoa será a **resultante** das velocidades $\vec{v}_P$ e $\vec{v}_E$. Ou seja:*

$$\vec{v}_R = \vec{v}_P + \vec{v}_E$$

No trajeto BA, $\vec{v}_P$ e $\vec{v}_E$ possuem sentidos opostos. Logo, em módulo, temos: $v_R = v_P - v_E$.

Observando-se os dados, nota-se que a pessoa cumpriu o trecho BA de 9,0 m em 18 s, ou seja, sua velocidade em relação ao solo vale:

$$v_R = \frac{9{,}0\,m}{18\,s} = 0{,}50\,m/s$$

Com base nisso, vem:

$$v_R = v_P - v_E$$

$$0{,}50 = v_P - 0{,}50 \Rightarrow \boxed{v_P = 1{,}0\,m/s}$$

b) Na subida AB, $\vec{v}_P$ e $\vec{v}_E$ possuem o mesmo sentido. Logo, a nova velocidade resultante terá módulo igual a: $v_R = v_P + v_E = 1{,}0 + 0{,}5 = 1{,}5\,m/s$.

Assim, o tempo que seria gasto na subida AB é:

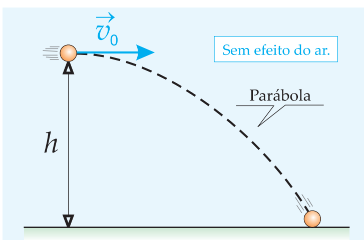
$$\Delta t = \frac{AB}{v_R} = \frac{9{,}0\,m}{1{,}5\,m/s} \Rightarrow \boxed{\Delta t = 6{,}0\,s}$$

Capítulo 07. Lançamento de Projéteis

1. Lançamento Horizontal

1.1. Introdução

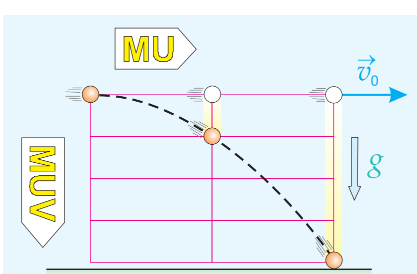
Quando lançamos horizontalmente um corpo, com uma velocidade inicial ($\vec{v}_0$) a partir de uma certa altura do solo, notamos que ele descreve uma trajetória curva em seu vôo até o solo. Se a resistência do ar for desprezível, esta curva será um arco de **parábola**.



Galileu decifrou este movimento usando o artifício da composição de movimentos. Observe seu raciocínio:

a) se no local do lançamento não houvesse gravidade e nem resistência do ar, o corpo seguiria horizontalmente em movimento retilíneo uniforme, percorrendo distâncias iguais em intervalos de tempo iguais.

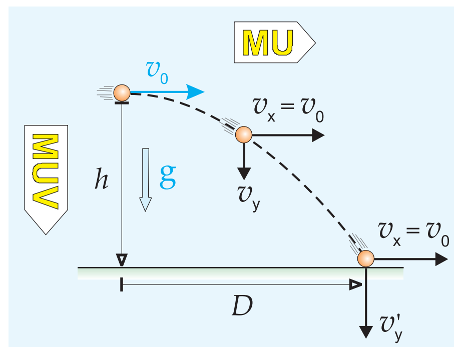
b) como há gravidade, o corpo cairá simultaneamente em queda livre, ou seja, realizará um **MUV vertical,** e ao mesmo tempo, um **MU horizontal**. A composição desses dois movimentos gera o **movimento parabólico**.



Mov. Horizontal	MU	$a_x = 0$
Mov. Vertical	MUV	$a_y = g$

1.2. Cálculos Básicos

Considere um objeto disparado de uma altura h com velocidade horizontal $\vec{v}_0$. Sob a ação exclusiva da gravidade (g), o objeto toca o solo após um certo **tempo de queda** (t) cumprindo um **alcance horizontal** (D).

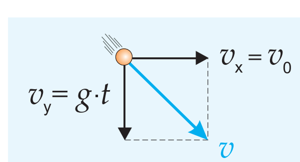


Este alcance corresponde ao deslocamento do **movimento uniforme** que ocorre na horizontal, com $v_x = v_0$, ao mesmo tempo que o objeto despenca em **queda livre** vertical descendo h. A partir disso, temos:

- $h = \dfrac{g}{2} \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}}$

- $D = v_x \cdot t \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = v_0 \cdot \sqrt{\dfrac{2h}{g}}}$

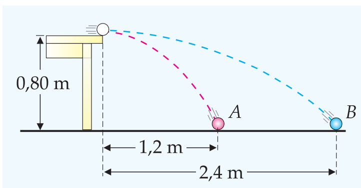
A velocidade que o móvel atinge em seu vôo parabólico, após um certo tempo (t) do disparo, é obtida pela adição vetorial de suas velocidades componentes, isto é:



Em módulo, temos: $\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$

Exercícios Resolvidos

01. A partir da borda de uma mesa de altura $h = 0{,}80$ m, lança-se horizontalmente duas pequenas esferas *A* e *B*, que cumprem até o solo os alcances indicados na figura abaixo. Considere $g = 10$ m/s^2 e despreze o efeito do ar.



Pede-se:

a) o tempo da queda de cada esfera até o solo;

b) o módulo da velocidade de lançamento de cada esfera.

Resolução

a) As esferas chegam ao solo gastando o mesmo tempo, pois desceram a mesma altura (0,80 m).

Logo:

$$t_A = t_B = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}80}{10}} \Rightarrow$$

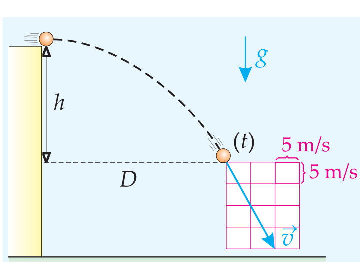
$$\Rightarrow \boxed{t = 0{,}40\,\text{s}}$$

b) Através de seus alcances e do tempo comum de queda, temos:

$$v_A = \frac{D_A}{t} = \frac{1{,}2\,m}{0{,}40\,s} = \boxed{3{,}0\,m/s}$$

$$v_B = \frac{D_B}{t} = \frac{2{,}4\,m}{0{,}40\,s} = \boxed{6{,}0\,m/s}$$

02. A figura a seguir mostra em escala a velocidade ($\vec{v}$) adquirida por uma bola, ***t*** segundos após ocorrer seu disparo horizontal da janela de um prédio. Adote $g = 10$ m/s^2 e despreze a resistência do ar.



Determine:

a) a intensidade da velocidade (v_0) com que a bola foi lançada da janela;

b) o tempo ***t*** decorrido;

c) a altura (*h*) descida pela bola;

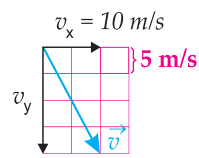
d) a distância *D* em que se afastou do prédio.

Resolução

a) Decompondo-se a velocidade $\vec{v}$, temos sua componente horizontal v_x medindo v_0. Isto é:

$$v_0 = v_x$$

$$\boxed{v_0 = 10\ m/s}$$



*b) A componente vertical de $\vec{v}$, em **t** segundos de atuação da gravidade, vale: $v_y = 20$ m/s. Logo:*

$$v_y = g \cdot t$$

$$20 = 10 \cdot t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 2{,}0\,\text{s}}$$

c) Devido à queda livre que ocorre na vertical, temos:

$$h = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$h = \frac{10}{2} \cdot 2{,}0^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = 20\,\text{m}}$$

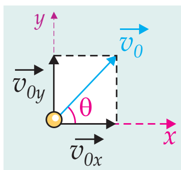
d) $D = v_x \cdot t = 10 \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = 20\,\text{m}}$

2. Lançamento Oblíquo

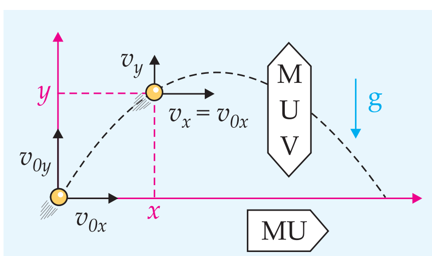
2.1. Movimentos Componentes

Quando lançamos obliquamente um corpo, com uma velocidade inicial ($\vec{v}_0$), inclinada de um ângulo θ com a horizontal, notamos que ele descreve uma **trajetória parabólica** em relação ao solo, caso a resistência do ar seja desprezível.

Para estudar esse movimento, procuramos dividi-lo em dois: num movimento **horizontal** e num **vertical**. Como ponto de partida, fazemos a decomposição de sua velocidade inicial ($\vec{v}_0$), descobrindo as intensidades de suas componentes horizontal ($\vec{v}_{0x}$) e vertical ($\vec{v}_{0y}$).



Observando-se que a aceleração da gravidade local atua na vertical e, portanto, afeta apenas a velocidade vertical, o móvel passa a executar simultaneamente dois movimentos: **uniforme** na horizontal e **uniformemente variado** na vertical (típico de um lançamento vertical para cima).



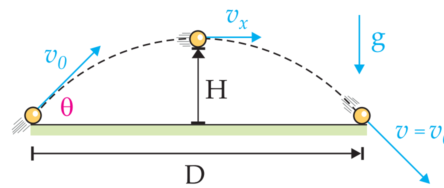
Os quadros a seguir resumem as características desses movimentos componentes.

Mov. Horizontal	**MU**
$a_x = 0$	$v_x = v_{0x}$ (cte)
$x = v_{0x} \cdot t$	

Mov. Vertical	**MUV**
$a_y = -g$	$v_y = v_{0y} - g \cdot t$
$y = v_{0y} \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$	

2.2. Cálculos Usuais

Considere um objeto disparado do solo com velocidade $\vec{v}_0$ inclinada de um ângulo θ com a horizontal. Sob a ação exclusiva da gravidade (g), o objeto atinge uma **altura máxima** (H) quando sua velocidade vertical se anula, ou seja, quando sua velocidade é horizontal (v_x). Retorna ao solo com velocidade de módulo v_0, após ter cumprido um **alcance horizontal** (D) durante um **tempo de vôo** (T).



O estudo de seu movimento vertical (MUV) permite obtermos a altura máxima e o tempo de vôo, em função de v_0, θ e g.

Lembrando que no final da subida a velocidade vertical se anula ($v_{0y} = 0$), temos:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2\,a_y\,\Delta s_y \quad \text{(equação de Torricelli)}$$

$$0^2 = v_{0y}^2 - 2\,g\,H \;\Rightarrow\; \boxed{H = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{(v_0 \cdot \text{sen}\theta)^2}{2g}}$$

Como o tempo de subida (t_s) é igual ao de descida, basta dobrarmos o tempo de subida para obtermos o tempo de vôo (T). Ou seja:

$$v_y = v_{0y} - g \cdot \mathbf{t}$$

$$0 = v_{0y} - g \cdot \mathbf{t}_s \;\Rightarrow\; \boxed{\mathbf{t}_s = \frac{v_{0y}}{g}}$$

$$T = 2 \cdot t_s \;\Rightarrow\; \boxed{T = \frac{2 \cdot v_{0y}}{g} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \text{sen}\theta}{g}}$$

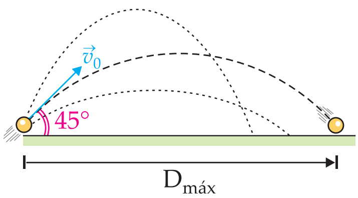
O alcance horizontal (D) corresponde ao deslocamento do movimento horizontal uniforme, durante o tempo de vôo. Assim:

$$D = v_x \cdot T$$

$$D = (v_0 \cdot \cos\theta) \cdot \frac{2 \cdot v_0 \cdot \text{sen}\,\theta}{g}$$

$$D = \frac{v_0^2 \cdot 2 \cdot \text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta}{g} \;\Rightarrow\; \boxed{D = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}\,2\theta}{g}}$$

Pela expressão do alcance (D), nota-se que dentre todos os ângulos de disparo (θ) aquele que propicia o maior alcance horizontal é **45°**, pois **sen 2θ** será máximo e igual a 1 quando 2θ for 90°, ou seja, quando **θ = 45°**. Devido a isso, o alcance horizontal **máximo** (θ = 45°) para uma dada velocidade inicial ($\vec{v}_0$) é obtido por:



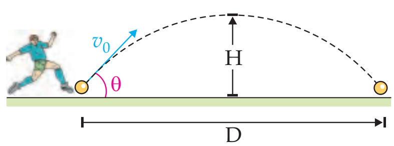
$$\boxed{D_{máx} = \frac{v_0^2}{g}}$$

Observação

Para ângulos de lançamentos complementares, isto é, $\theta_1 + \theta_2 = 90°$, os respectivos alcances serão **iguais** ($D_1 = D_2$).

Exercícios Resolvidos

01. Ao bater um tiro de meta, um goleiro imprime à bola uma velocidade de módulo $v_0 = 25$ m/s inclinada de um ângulo θ com a horizontal, tal que sen θ = 0,8 e cos θ = 0,6. Admita que no local a resistência do ar seja desprezível e adote g = 10 m/s².



Supondo que a bola retorne ao solo sem ser interceptada por qualquer jogador, determine:

a) a altura máxima (H) atingida por ela;

b) a velocidade da bola no ápice do vôo;

c) o seu tempo total de vôo (T) ;

d) o seu alcance horizontal (D).

Resolução

a) Para esse cálculo é necessário obtermos, inicialmente, a componente vertical de v_0. Ou seja:

$$v_{0y} = v_0 \cdot sen\,\theta = (25\,m/s) \cdot 0{,}8 = 20\,m/s$$

Lembrando que no final da subida a velocidade vertical da bola se anula, podemos determinar sua altura máxima usando a equação de Torricelli.

$$0^2 = v_{0y}^2 - 2\,g\,H$$

$$H = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{20^2}{2 \cdot 10} \Rightarrow \boxed{H = 20\,m}$$

b) No ponto mais alto do vôo parabólico, a velocidade da bola é horizontal, isto é, corresponde à componente horizontal (v_{0x}) de sua velocidade inicial (v_0). Ou seja:

$$v = v_{0x} = v_0 \cdot \cos\theta = (25\,m/s) \cdot 0{,}6 = 15\,m/s$$

c) Calculemos o tempo de subida:

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t \quad (MUV\ vertical)$$

$$0 = v_{0y} - g \cdot t_s \Rightarrow t_s = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{20\,m/s}{10\,m/s^2} = 2{,}0\,s$$

Como a altura subida é a mesma descida, o tempo de subida é igual ao de descida. Logo, o tempo de vôo será o dobro do tempo de subida. Isto é:

$$T = 2 \cdot t_s = 2 \cdot 2\,s \Rightarrow \boxed{T = 4{,}0\,s}$$

Pode-se também obter o tempo de vôo duplicando-se o tempo de queda, ou seja:

$$T = 2 \cdot t_q = 2 \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$T = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}} \Rightarrow \boxed{T = 4{,}0\,s}$$

d) O alcance horizontal representa o deslocamento total do movimento horizontal uniforme. Logo:

$$D = v_{0x} \cdot T$$

$$D = (15\,m/s) \cdot (4{,}0\,s) \Rightarrow \boxed{D = 60\,m}$$

02. Um canhão dispara projéteis com velocidade $v_0 = 200$ m/s, a partir do solo horizontal. Considere que no local de disparos a aceleração da gravidade seja de 10 m/s² e despreze a resistência do ar.

a) Qual o ângulo (θ) de disparo, com a horizontal, que permite o maior alcance horizontal de um projétil?

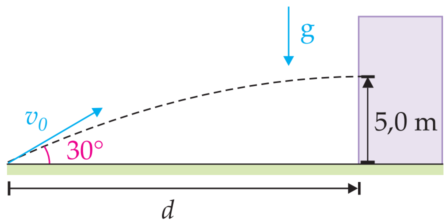
b) Qual o maior alcance horizontal, em quilômetros, que um projétil disparado por esse canhão pode atingir?

Resolução

a) $\boxed{\theta = 45°}$ *b)* $D_{máx} = \frac{v_0^2}{g}$

$$D_{máx} = \frac{200^2}{10} = 4\,000\,m \Rightarrow \boxed{D_{máx} = 4{,}0\,km}$$

03. A figura a seguir mostra a trajetória parabólica de um jato d'água, disparado do solo segundo um ângulo de 30°, numa operação de combate ao incêndio localizado num apartamento a 5,0 m de altura do solo.



Sabendo-se que o jato d'água penetra no apartamento horizontalmente e adotando-se g = 10 m/s², pede-se:

a) a intensidade da velocidade (v_0) com que a água sai da mangueira;

b) a distância (d) entre o bocal da mangueira e o prédio.

Resolução

a) A altura do apartamento (5,0 m) corresponde à altura máxima atingida pela água, pois sua velocidade, nessa altura, tem direção horizontal. Usando a equação de Torricelli para o MUV vertical, vem:

$$0^2 = v_{0y}^2 - 2\,g\,H$$

$$v_{0y}^2 = 2\,g\,H = 2 \cdot 10 \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad v_{0y} = 10\,m/s$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot sen\,30°$$

$$10 = v_0 \cdot 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 = 20\,m/s}$$

b) Pelo movimento horizontal uniforme, temos:

$$d = v_{0x} \cdot t_s \qquad (t_s: \text{tempo de subida})$$

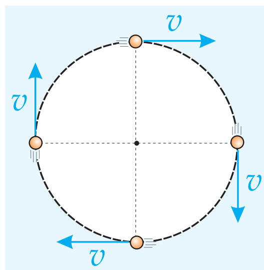
$$d = (v_0 \cdot cos\,30°) \cdot \frac{v_{0y}}{g} = \left(20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{10}{10}$$

$$d = \left(20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{10}{10} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = 10\sqrt{3}\ m}$$

Capítulo 08. Movimento Circular Uniforme

1. Período e Freqüência

Quando um movimento uniforme é realizado ao longo de uma trajetória circular, o movimento torna-se repetitivo, isto é, o móvel passará por uma mesma posição e com a mesma velocidade em intervalos de tempo iguais.



O **período** (T) de um movimento repetitivo é o intervalo de tempo necessário para o móvel completar **um ciclo**. Para um corpo em movimento circular uniforme (MCU), o período representa a duração de uma volta. No Sistema Internacional, o período é medido em **segundos** (s).

A **freqüência** (f) de um movimento periódico é o número de vezes que o fenômeno se repete na unidade de tempo. Para um MCU, a freqüência pode ser definida como o número de voltas (n) realizadas em um certo intervalo de tempo (Δt), ou seja:

$$\boxed{f = \frac{n}{\Delta t}}$$

A freqüência pode ser expressa em rotações por minuto (**rpm**) ou em rotações por segundo (**rps**). No SI, a unidade de freqüência é **rps** que recebe o nome de **hertz** (**Hz**), isto é:

$$\boxed{1\ \text{Hz} = 1\ \text{rps} = 60\ \text{rpm}}$$

De acordo com as definições acima, podemos estabelecer a relação fundamental entre período e freqüência.

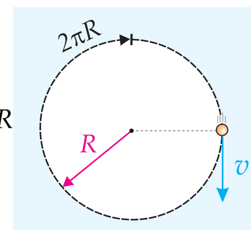
$$f = \frac{n}{\Delta t} = \frac{1\ volta}{período} \Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{T}}$$

2. Velocidade Linear

Procuramos denominar a velocidade escalar constante de um MCU de **velocidade linear**, pois trata-se da rapidez do móvel ao longo da linha circular que ele percorre. Sua intensidade pode ser obtida em função do período ou da freqüência do movimento, como indica o desenvolvimento abaixo.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (\text{constante} \neq 0)$$

$$\text{Em 1 volta:} \begin{cases} \Delta s = 2\pi R \\ \Delta t = T \end{cases}$$



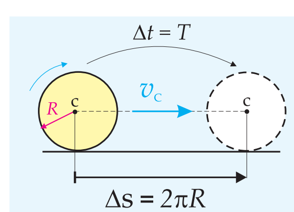
$$\text{Logo: } \boxed{v = \frac{2\pi R}{T}} \text{ ou } \boxed{v = 2\pi R \cdot f}$$

Esta intensidade (v) corresponde ao módulo do vetor velocidade ($\vec{v}$). Por este vetor ser **tangente** à trajetória circular, a velocidade linear também pode receber o nome de **velocidade tangencial**.

3. Rolamento Uniforme

Consideremos uma roda de raio R que rola sem escorregar em uma pista horizontal. Supondo que ocorra um rolamento uniforme, podemos obter a rapidez com que o centro da roda translada em função do período (T) ou da freqüência (f) de rotação da roda.

Quando a roda completa uma volta, ou seja, num período (T) de rotação, todos os pontos da periferia da roda acabam tocando a pista. Dessa forma, o centro (c) da roda percorre o equivalente ao perímetro externo da roda (2πR).



Em decorrência disso, a velocidade de translação do centro (c) da roda vale:

$$\boxed{v_C = \frac{2\pi R}{T}} \quad \text{ou} \quad \boxed{v_C = 2\pi R \cdot f}$$

Normalmente, o velocímetro de um carro detecta o módulo da velocidade escalar desenvolvida por ele na pista pela freqüência de rotação de uma das rodas do carro. Conhecendo-se o raio da roda (R), pode-se calibrar o velocímetro pela expressão: $v_C = 2\pi R \cdot f$.

Exercícios Resolvidos

01. Uma pessoa está em uma roda-gigante que tem raio de 5,0 m e gira em rotação uniforme. A pessoa passa pelo ponto mais próximo do chão a cada 20 segundos.

Adotando π = 3, determine:

a) a freqüência do movimento da pessoa em **rpm** e em **hertz** (Hz);

b) a velocidade linear da pessoa.

Resolução

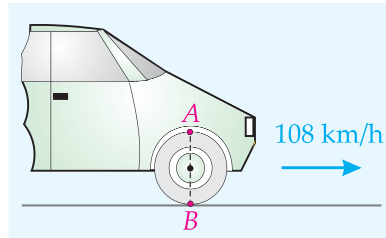
a) Como o período do movimento vale 20 s ou (1/3) min, vem:

- $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{1}{3}} \Rightarrow f = 3\,rpm$
- $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{20} \Rightarrow \boxed{f = 0{,}05\,Hz}$

$$b)\ v = \frac{2\pi R}{T}$$

$$v = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5{,}0\,m}{20\,s} \Rightarrow \boxed{v = 1{,}5\,m/s}$$

02. Um carro trafega numa estrada retilínea com velocidade escalar constante de 108 km/h. A figura a seguir ilustra uma de suas rodas, cujo raio mede 25 cm, e a posição de dois pontos A e B da periferia da roda, num certo instante.



Considerando π = 3, calcule:

a) a freqüência de rotação da roda;

b) as velocidades dos pontos A e B, em relação à pista.

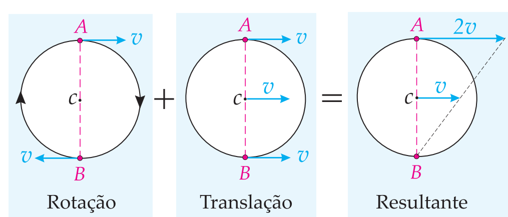
Resolução

$$a)\ v = 108\,\frac{km}{h} = 30\,m/s \quad e \quad R = 0{,}25\,m$$

$$v = 2\pi R \cdot f$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 0{,}25 \cdot f \Rightarrow \boxed{f = 20\,Hz}$$

b) Os pontos A e B tanto rotacionam em torno do centro da roda quanto são arrastados pela translação da roda. Compondo-se esses dois movimentos (rotação + translação), temos:



$$Logo:\ v_A = 2v = 2(108) \Rightarrow \boxed{v_A = 216\,km/h}$$

$$e \quad \boxed{v_B = 0}$$

03. Uma criança pedala seu velocípede com uma freqüência de 0,50 Hz. A roda maior, solidária ao pedal, possui raio de 20 cm e as rodinhas traseiras têm raios de 10 cm. Supondo que as rodas não escorreguem no piso, responda às perguntas abaixo.

a) Qual o módulo da velocidade de tráfego da criança com seu velocípede?

b) Qual a freqüência das rodas traseiras?

Resolução

a) A freqüência com que a criança pedala é a freqüência de giro que ela impõe à roda dianteira (D). Logo, usando o raio e a freqüência dessa roda, temos:

$$v = 2\pi \cdot R_D \cdot f_D$$

$$v = 2\pi \cdot (20) \cdot (0{,}50) \Rightarrow \boxed{v = 20\pi \text{ cm/s}}$$

b) A velocidade de translação do velocípede está associada às freqüências de suas rodas dianteira (D) e traseira (T) pela relação:

$$v = 2\pi R_D \cdot f_D = 2\pi R_T \cdot f_T$$

$$\text{Logo, } R_D \cdot f_D = R_T \cdot f_T$$

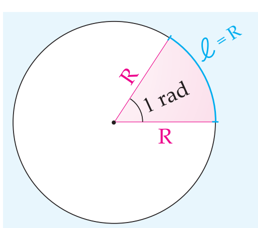
$$20 \cdot 0{,}5 = 10 \cdot f_T \Rightarrow \boxed{f_T = 1{,}0 \text{ Hz}}$$

4. Ângulo

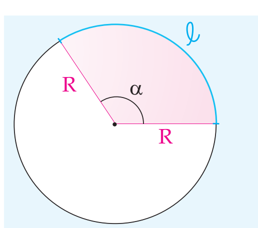
Acrescentaremos neste módulo algumas grandezas mais adequadas ao estudo do movimento circular uniforme: as chamadas grandezas angulares, isto é, grandezas escalares definidas a partir de medidas de ângulos.

Embora a medida de um ângulo possa ser expressa em graus (°), interessa-nos principalmente sua medida em radianos.

Um **radiano** (**rad**) é o ângulo central de uma circunferência, associado a um arco desta de comprimento (ℓ) igual ao raio (R). Um radiano corresponde a aproximadamente 57°.



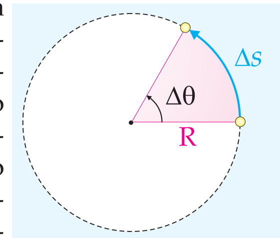
Pela definição acima, podemos conceber a medida de um ângulo α em radianos através da razão entre o comprimento (ℓ) do arco de circunferência e o raio (R) correspondente.



$$\boxed{\alpha = \frac{\ell}{R} \text{ rad}}$$

5. Deslocamento Angular

Considere uma partícula executando um certo deslocamento linear (Δs), ao longo de uma circunferência de raio R. Nesse evento, dizemos que a partícula cumpriu um **deslocamento angular** ($\Delta\theta$) definido pelo ângulo central, associado ao arco (Δs) deslocado.



Em radianos, temos: $\Delta\theta = \dfrac{\Delta s}{R}$

6. Velocidade Angular

Sabemos que um corpo em movimento circular uniforme mantém velocidade linear (v) constante. Dessa forma, o móvel gira ângulos centrais iguais em intervalos de tempo iguais, ou seja, ele possui uma **velocidade angular** (ω) constante.

Definimos a velocidade angular constante de um movimento circular uniforme como sendo a razão entre o deslocamento angular ($\Delta\theta$) ocorrido e o correspondente intervalo de tempo (Δt). Assim,

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}}$$

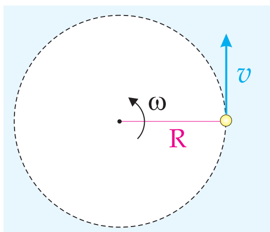
Podemos determinar a velocidade angular (ω) em função do período (T) ou da freqüência (f) do MCU. Para isso, basta lembrar que, num período, o móvel completa uma volta, ou seja, gira 2p radianos (360°). Logo,

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\omega = 2\pi \cdot f}$$

Quando o período for dado em segundos (s) ou a freqüência em hertz (Hz), a velocidade angular terá unidade em **radianos por segundo** (**rad/s**).

7. Relação entre v e ω

Vamos, agora, relacionar a velocidade linear (v) e a velocidade angular (ω) de um móvel num trajeto circular de raio R, através de suas definições:



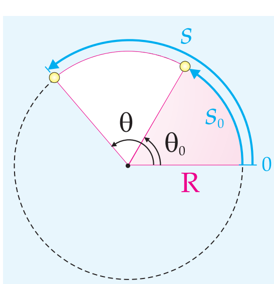
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta \cdot R}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \omega \cdot R}$$

Em resumo, observe o quadro comparativo abaixo.

Velocidade linear	$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi \cdot R}{T} = 2\pi R \cdot f$	$\frac{m}{s}$
Velocidade angular	$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$	$\frac{rad}{s}$

8. Função Horária da Posição Angular

A figura representa uma partícula em MCU numa circunferência de raio R, sendo s_0 seu espaço inicial (em $t = 0$) e s sua posição num instante t. Em correspondência a esses arcos de circunferências, podemos definir em radianos sua posição angular inicial (θ_0) e a final (θ) do seguinte modo:



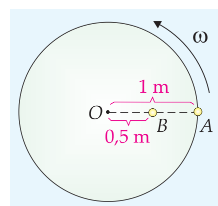
$$\boxed{\theta_0 = \frac{s_0}{R}} \quad e \quad \boxed{\theta = \frac{s}{R}}$$

Assim, ao dividirmos a função horária do espaço do MU ($s = s_0 + v \cdot t$) pelo raio R, obtemos a **função horária da posição angular** do móvel em MCU. Vejamos:

$$\frac{s}{R} = \frac{s_0}{R} + \frac{v}{R} \cdot t \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_0 + \omega \cdot t$$

Exercícios Resolvidos

01. O disco da figura gira em torno do centro O, completando uma volta a cada 2 s. Considere dois pontos A e B do disco dispostos, respectivamente, a 1 m e a 0,5 m do centro O. Determine:



a) as velocidades angulares de A e B;

b) suas velocidades lineares.(Use $\pi = 3$).

Resolução

a) *Como os pontos A e B pertencem ao disco, o período desses pontos é o período do próprio disco, ou seja, eles completam uma volta a cada 2 s. Assim, suas velocidades angulares coincidem com a do disco.*

$$\omega_{isco} = \omega_A = \omega_B = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2s} = \boxed{\pi\ rad/s}$$

$$b)\ v_A = \omega \cdot R_A = \pi \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_A = 3\ m/s}$$

$$v_B = \omega \cdot R_B = \pi \cdot 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_B = 1{,}5\ m/s}$$

02. Um carro trafega numa estrada circular, de raio 250 m com velocidade escalar constante de 90 km/h (ou seja, 25 m/s).

a) Qual o deslocamento angular do carro num intervalo de 10 s?

b) Qual a velocidade angular do carro?

Resolução

a) *Em 10 s, o carro desloca linearmente:*

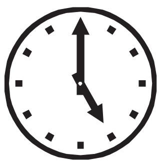
$$\Delta s = v \cdot \Delta t = (25 m/s) \cdot (10 s) = 250\ m$$

$$Logo, \Delta\theta = \frac{\Delta s}{R} = \frac{250\,m}{250\,m} \Rightarrow \boxed{\Delta\theta = 1{,}0\ rad}$$

b) $$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1{,}0\ rad}{10\,s} \Rightarrow \boxed{\omega = 0{,}10\ rad/s}$$

$$ou\ \ \omega = \frac{v}{R} = \frac{25\,m/s}{250\,m} \Rightarrow \boxed{\omega = 0{,}10\ m/s}$$

03. O relógio analógico de uma igreja, em perfeito estado de funcionamento, marca exatamente **5 horas**.



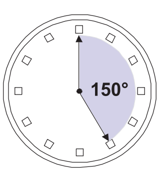
a) Nesse momento, qual o menor ângulo, em graus, entre os ponteiros das **horas** e dos **minutos**?

b) Qual a velocidade angular, em graus por minuto, de cada ponteiro?

c) O ponteiro das **horas** e o ponteiro dos **minutos** estarão superpostos às **5** horas, ***x*** minutos e ***y*** segundos. Obtenha ***x*** e ***y***.

Resolução

a) *Como o círculo do relógio tem seus 360° fracionado em 12 partes (horas), o ângulo entre dois marcos consecutivos é **30°**. Assim, o menor ângulo entre os ponteiros, às **5** horas, vale:*



$$\alpha = 5 \cdot 30° \Rightarrow \boxed{\alpha = 150°}$$

b) *Sabemos que o ponteiro das horas* (**H**) *completa uma volta a cada 12 h (720 min) e o ponteiro dos minutos* (**M**)*, a cada 1 h (60 min).Lembrando que em cada período (T) tem-se 360° de giro, vem:*

$$\omega_H = (360°/T) = (360°/720\ min) = 0{,}5°/min$$

$$\omega_M = (360°/T) = (360°/60\ min) = 6°/min$$

c) *Até à superposição, se o ponteiro das horas girar* **Δθ**, *o ponteiro dos minutos terá que girar* **Δθ + 150°**. *Assim,*

$$\begin{cases} \Delta\theta = \omega_H \cdot \Delta t \\ \Delta\theta + 150 = \omega_M \cdot \Delta t \end{cases} \quad (-)$$

$$150 = (\omega_M - \omega_H) \cdot \Delta t$$

$$150 = (6 - 0{,}5) \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t \cong 27{,}27 min$$

$$\Delta t \cong 27\ min + 16\,s \Rightarrow \boxed{x = 27}\ e\ \boxed{y = 16}$$

04. A função horária da posição angular de uma partícula, em tráfego numa circunferência de raio 1 m, é dada por:

$$\boxed{\theta = 2 + 4\,t \quad (SI)}$$

Pede-se:

a) a posição angular inicial e a velocidade angular da partícula;

b) a sua velocidade linear;

c) o período e a freqüência de seu movimento.

Resolução

a) *Por comparação, temos:*

$$\left.\begin{array}{l} \theta = \theta_0 + \omega \cdot t \\ \theta = 2 + 4 \cdot t \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta_0 = 2 rad\ \ e\ \ \omega = 4\ rad/s}$$

b) $$v = \omega \cdot R = 4 \cdot 1 \Rightarrow \boxed{v = 4\ m/s}$$

c) • $$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$4 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \boxed{T = \frac{\pi}{2}\ s}$$

• $$f = \frac{1}{T} \Rightarrow \boxed{f = \frac{2}{\pi}\ Hz}$$

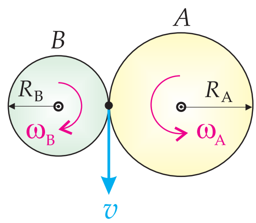
9. Transmissão de MCU

Em nosso cotidiano, é muito comum observarmos a transmissão de movimento circular uniforme entre rodas. Um exemplo é a bicicleta, onde essa transmissão ocorre entre rodas dentadas (coroa e catraca) através de uma corrente.

Existem duas maneiras básicas de transmitir movimento circular uniforme entre duas rodas: por **contato direto** e por **correia** (ou corrente).

9.1. Por Contato Direto

Quando uma roda girante toca perifericamente uma outra roda, sem que ocorra escorregamento relativo, ela transmite sua velocidade linear (v) periférica à outra, que passa a girar em **sentido contrário**.



Caso os raios das rodas sejam diferentes, suas velocidades angulares e, portanto, suas freqüências serão diferentes. Isso ocorre pelo fato de os pontos da periferia de cada roda terem a **mesma** velocidade linear (v). Observe a demonstração a seguir, tomando por base as rodas A e B esquematizadas acima.

$$\left.\begin{array}{l} v = \omega_A \cdot R_A \\ v = \omega_B \cdot R_B \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \omega_A \cdot R_A = \omega_B \cdot R_B$$

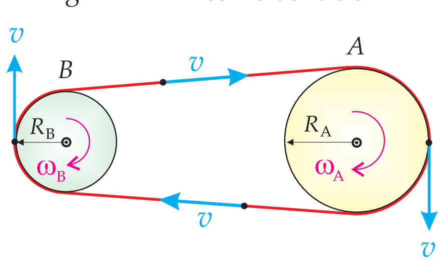
$$2\pi\, f_A \cdot R_A = 2\pi\, f_B \cdot R_B$$

$$f_A \cdot R_A = f_B \cdot R_B$$

Como o produto $f.R$ é o mesmo para as duas rodas, quanto **maior** for o raio da roda, **menor** será sua freqüência, ou seja, a freqüência de cada roda é **inversamente proporcional** ao seu raio.

9. 2. Por Correia ou Corrente

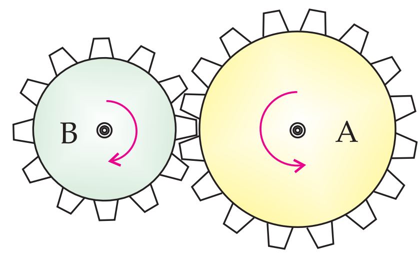
Quando uma roda girante é ligada a uma outra roda através de uma correia que as contorna perifericamente, ela transmite sua velocidade linear (v) periférica à outra pela correia (elemento transmissor). Nesse arranjo, as rodas giram no **mesmo sentido**.



Pelo fato de as rodas envolvidas pela correia possuirem a mesma velocidade linear periférica, chega-se à mesma relação raio-freqüência do caso anterior, isto é:

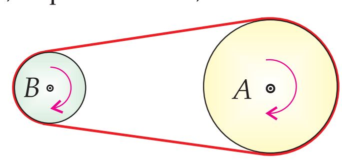
$$v = \omega_A \cdot R_A = \omega_B \cdot R_B$$
$$\Downarrow$$
$$f_A \cdot R_A = f_B \cdot R_B$$

É importante salientar que em ambos os casos de transmissão costumam-se usar rodas dentadas (engrenagens) cujos dentes se acoplam entre si quando em contato ou se encaixam nos elos da corrente de ligação, para não haver deslizamento ou escorregamento.



Exercícios Resolvidos

01. Duas polias A e B, ligadas por uma correia, têm, respectivamente, 20 cm e 10 cm de raio.



Se a freqüência com que A gira é 30 rpm:

a) qual a freqüência da polia B ?

b) qual a velocidade linear da correia em cm/s? (Adote $\pi = 3$)

Resolução

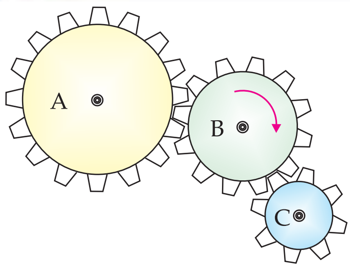
a) $f_A \cdot R_A = f_B \cdot R_B$

$30 \cdot 20 = f_B \cdot 10 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_B = 60\ rpm}$

b) $v = 2\pi R_A \cdot f_A$ *(em que* $f_A = 30rpm = 0{,}50Hz$*)*

$v = 2 \cdot 3 \cdot 20\ cm \cdot 0{,}50\ Hz \Rightarrow \boxed{v = 60\ cm/s}$

02. A figura abaixo representa três engrenagens: A (16 dentes), B (12 dentes) e C (8 dentes). Elas giram vinculadas, conforme indicado, sendo que B gira no sentido **horário**.



a) Em que sentido giram as engrenagens A e C?

b) Qual das engrenagens terá maior velocidade angular?

c) Quantas voltas a engrenagem C efetua para cada volta que A completa?

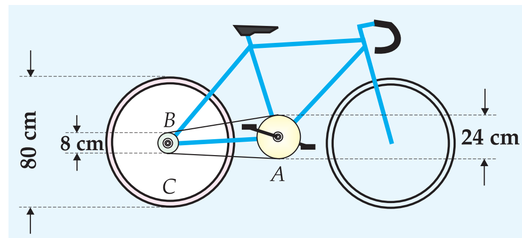
Resolução

a) *Na transmissão de MCU por contato direto entre engrenagens, sempre ocorre a permuta de sentido de giro, ou seja, as engrenagens A e C giram de modo oposto ao de B:* ***anti-horário****.*

b) *No sistema, a engrenagem de menor raio tem a maior velocidade angular, isto é, a engrenagem* ***C*** *é a que gira com maior freqüência.*

c) *Para cada volta de A, 16 dentes de cada engrenagem devem se tocar. Como C possui 8 dentes, ela deverá realizar* ***2 voltas****.*

03. A figura a seguir mostra as medidas dos diâmetros da roda (C), da catraca (B) e da coroa (A) de uma bicicleta comum.



Se um ciclista passeando com essa bicicleta pedalar com freqüência de 1,0 Hz, qual o módulo da velocidade de tráfego da bicicleta? (Use $\pi = 3$ e despreze escorregamentos)

Resolução

1) Para o sistema coroa-catraca, temos:

$$f_A \cdot R_A = f_B \cdot R_B$$

$$1{,}0 \cdot 12 = f_B \cdot 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_B = 3{,}0\,Hz}$$

2) Como a catraca B é solidária à roda C, ambas giram com a mesma freqüência (3,0 Hz). Devido ao rolamento da roda C no solo, a velocidade da bicicleta será $v = 2\pi R_C \cdot f_C$ *, isto é:*

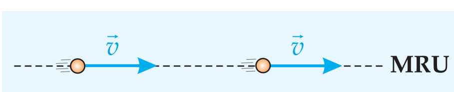
$$v = 2 \cdot 3 \cdot 0{,}40\,m \cdot 3{,}0\,Hz \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 7{,}2\ m/s}$$

Capítulo 09. Aceleração Vetorial

1. Variação do Vetor Velocidade

Sabemos que a velocidade possui uma **intensidade** associada a uma **direção** (tangente à trajetória) e **sentido**. Quando analisamos o vetor velocidade ($\vec{v}$) de um móvel, no decorrer do tempo, observamos que podem ocorrer mudanças tanto em sua intensidade quanto em sua direção. Eventualmente é seu sentido que se altera.

Existe apenas um tipo de movimento em que a velocidade vetorial permanece constante. Isso ocorre no **movimento retilíneo uniforme**, em que a velocidade tem intensidade constante (uniforme) e sempre a mesma direção (pois a trajetória é retilínea).



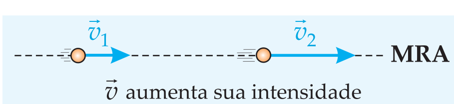
Há dois critérios básicos para se notar alterações na velocidade :

a) a intensidade de $\vec{v}$ varia, ou seja, o movimento é acelerado ou retardado;

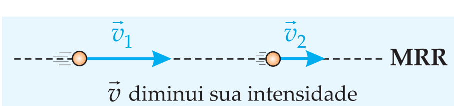
b) a direção de $\vec{v}$ varia, ou seja, o movimento tem trajetória curvilínea.

Combinando esses critérios, podemos elencar cinco tipos de movimentos em que ocorre variação do vetor velocidade:

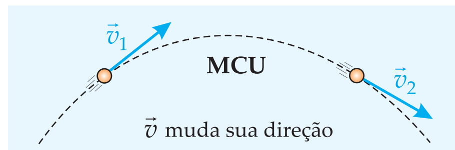
Movimento Retilíneo Acelerado



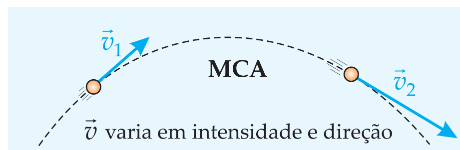
Movimento Retilíneo Retardado



Movimento Curvilíneo Uniforme



Movimento Curvilíneo Acelerado



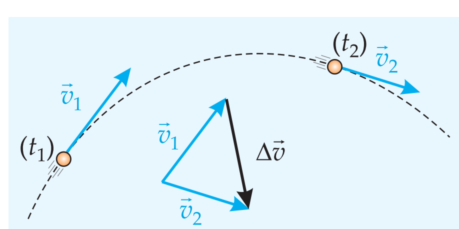
Movimento Curvilíneo Retardado

Exceto o **MRU**, todos os demais movimentos terão sua velocidade variando, seja em intensidade (movimentos acelerados e retardados) e/ou em direção (movimentos em trajetórias curvilíneas).

Para indicar a variação do vetor velocidade, ocorrida entre dois instantes, definimos o vetor:

$$\boxed{\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1}$$

Por exemplo, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ representam na figura abaixo as velocidades de uma partícula nos instantes t_1 e t_2. O vetor $\Delta\vec{v}$ mostra a variação ocorrida em sua velocidade entre t_1 e t_2.



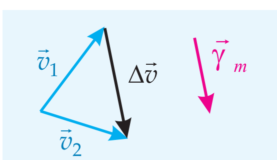
2. Aceleração Vetorial Média

Com o objetivo de estimar a rapidez com que o vetor velocidade de um móvel varia entre dois instantes, foi criada a grandeza aceleração vetorial média ($\vec{\gamma}_m$).

Aceleração vetorial média é a relação entre a variação da velocidade vetorial e o correspondente intervalo de tempo.

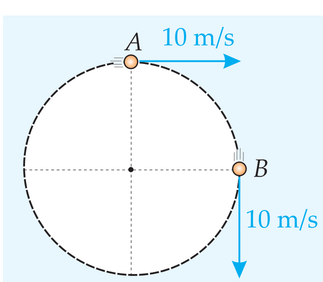
$$\boxed{\vec{\gamma}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}} \quad \text{onde} \quad \boxed{\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1}$$

Como o intervalo de tempo (Δt) é sempre positivo, o vetor aceleração média possui a mesma direção e o mesmo sentido que o vetor que representa a variação da velocidade vetorial ($\Delta\vec{v}$). Vejamos:



Exercícios Resolvidos

01. Uma partícula move-se em trajetória circular, com velocidade escalar constante de 10 m/s. A figura a seguir mostra suas passagens pelos pontos *A* e *B*, quando cumpre um quarto de volta em 2,0 segundos.



a) Essa partícula possui velocidade constante?

b) Determine o módulo do vetor $\Delta\vec{v}$ que indica a variação de sua velocidade entre os pontos *A* e *B*.

c) Qual o módulo de sua aceleração vetorial média entre os pontos *A* e *B*?

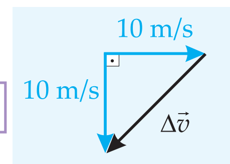
Resolução

a) Não, pois seu vetor velocidade varia em direção (na figura, $\vec{v}_A$ é horizontal e $\vec{v}_B$ é vertical).

b) $\Delta\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \Rightarrow$

$$|\Delta\vec{v}| = \sqrt{10^2 + 10^2}$$

$$\boxed{|\Delta\vec{v}| = 2\sqrt{10}\ m/s}$$



c) $|\vec{\gamma}_m| = \dfrac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \dfrac{2\sqrt{10}}{2,0} \Rightarrow \boxed{|\vec{\gamma}_m| = \sqrt{10}\ m/s^2}$

02. Verifique se as afirmações abaixo são corretas (C) ou erradas (E) de acordo com o caráter vetorial da grandeza velocidade.

I. Em qualquer movimento circular há variação de velocidade.

II. Movimento uniforme sempre possui velocidade constante.

III. A direção da velocidade será constante quando a trajetória for uma reta.

Resolução

I. (C) - Nos movimentos curvilíneos, o vetor velocidade sempre varia em direção.

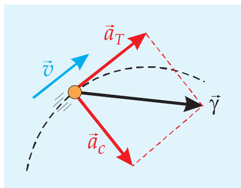
II. (E) - O vetor velocidade é constante só no movimento retilíneo uniforme (MRU).

III. (C) - Somente em trajetórias retilíneas o vetor velocidade mantém sua direção.

3. Aceleração Vetorial Instantânea

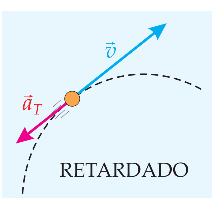
Sabemos que a velocidade ($\vec{v}$) pode variar em intensidade e em direção. Por esta razão, o **vetor aceleração** ($\vec{\gamma}$) de um móvel num certo instante é decomposto em duas acelerações perpendiculares: a **aceleração tangencial** $\vec{a}_T$, que indica a variação da intensidade de $\vec{v}$ e a **aceleração centrípeta** $\vec{a}_C$, que indica a variação da direção de $\vec{v}$. Desse modo, a aceleração instantânea ($\vec{\gamma}$) fica definida pela adição vetorial dessas componentes:

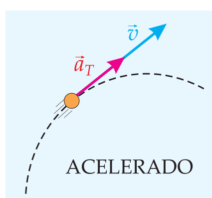
$$\boxed{\vec{\gamma} = \vec{a}_T + \vec{a}_c}$$



A aceleração tangencial $\vec{a}_T$ possui as seguintes características:

Módulo	$\lvert\vec{a}_T\rvert = \lvert a\rvert$ (módulo da aceleração escalar)
Direção	Tangente à trajetória (a mesma de $\vec{v}$)
Sentido	• Igual ao de $\vec{v}$, quando acelerado. • Oposto ao de $\vec{v}$, quando retardado.

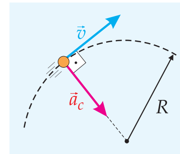




Nos movimentos uniformes, a intensidade da velocidade não varia e, portanto a aceleração tangencial é nula. A aceleração tangencial só existe em movimentos variados (acelerados ou retardados) e independe do tipo de trajetória (retilínea ou curvilínea).

A aceleração centrípeta $\vec{a}_C$ possui as seguintes características:

Módulo	$\lvert\vec{a}_c\rvert = \dfrac{v^2}{R}$ $\begin{cases} v\text{: velocidade escalar} \\ R\text{: raio instantâneo da curva} \end{cases}$
Direção	Perpendicular à $\vec{v}$
Sentido	Orientado para o centro da curva



Nos movimentos retilíneos, a direção da velocidade não varia e, portanto, a aceleração centrípeta é nula. A aceleração centrípeta só existe em movimentos de trajetórias curvas e independe do tipo de movimento (uniforme ou variado).

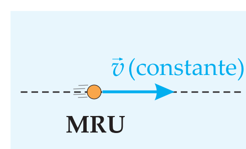
4. Análise Vetorial de Movimentos

Vamos, agora, identificar a aceleração vetorial em certos tipos de movimento e sua orientação com o vetor velocidade.

4.1. Movimento Retilíneo Uniforme

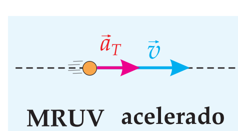
É o único movimento que não possui aceleração vetorial, pois sua velocidade mantém-se constante em intensidade (uniforme) e em direção (trajetória retilínea). Ou seja:

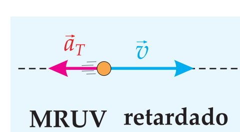
$$\left.\begin{aligned} \vec{a}_T &= \vec{0} \\ \vec{a}_C &= \vec{0} \end{aligned}\right\} \quad \vec{\gamma} = \vec{0}$$



4.2. Movimento Retilíneo Uniformemente Variado

A velocidade varia apenas em intensidade, pois é variado em trajetória retilínea. Logo, não possui aceleração centrípeta, ou seja, sua aceleração vetorial é tangencial (apenas para acelerar ou retardar).

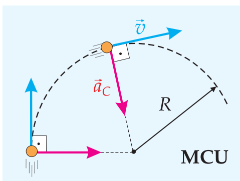




$$\boxed{\vec{\gamma} = \vec{a}_T} \Rightarrow \boxed{\gamma = a_T = \lvert a\rvert} \text{ (constante)}$$

4.3. Movimento Circular Uniforme

A velocidade tem intensidade constante, pois o movimento é uniforme. Logo, não possui aceleração tangencial. Entretanto, sua velocidade varia em direção (pois a trajetória é curva), ou seja, sua aceleração vetorial é centrípeta.



$$\boxed{\vec{\gamma} = \vec{a}_C} \Rightarrow \boxed{\gamma = a_C = \frac{v^2}{R}} \text{ (constante)}$$

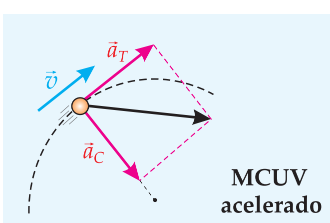
4.4. Movimento Circular Uniformemente Variado

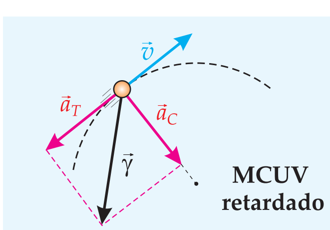
Pelo fato de a velocidade variar tanto em intensidade quanto em direção, esse movimento possui aceleração tangencial e aceleração centrípeta, sendo a aceleração vetorial do movimento a resultante de $\vec{a}_T$ e $\vec{a}_C$. Ou seja:

$$\boxed{\vec{\gamma} = \vec{a}_T + \vec{a}_C}$$

Como $\vec{a}_T$ é perpendicular a $\vec{a}_C$, temos:

$$\boxed{\gamma = \sqrt{a_T^2 + a_C^2}}$$





Exercícios Resolvidos

01. Uma partícula move-se em trajetória circular de raio 2 m, com velocidade angular constante de 2 rad/s.

a) Qual o ângulo entre os vetores velocidade e aceleração da partícula num certo instante?

b) Quais as intensidades dos vetores velocidade e aceleração da partícula?

Resolução

a) Como se trata de um movimento circular uniforme, a sua aceleração é centrípeta. Logo, o ângulo entre os vetores velocidade (tangente à trajetória circular) e aceleração (radial) é 90°.

b) • $v = \omega \cdot R = 2 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{v = 4 \ m/s}$

• $\gamma = a_C = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{4^2}{2} \Rightarrow \boxed{\gamma = 8 \ m/s^2}$

02. Um ponto material move-se em trajetória circular de raio igual a 20 m, em movimento uniformemente acelerado. No instante $t = 0$, o módulo de sua velocidade vale 5,0 m/s e, 1,0 s após, vale 10 m/s.

Determine o módulo do vetor aceleração no instante $t = 1,0$ s.

Resolução

Vamos, inicialmente, obter as intensidades das componentes da aceleração vetorial para t = 1,0 s:

1) O módulo do vetor aceleração tangencial é constante e dado por:

$$a_T = |a| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10 - 5,0}{1,0} \Rightarrow \boxed{a_T = 5,0 \ m/s^2}$$

2) O módulo do vetor aceleração centrípeta, no instante t = 1,0 s, é dado por:

$$a_C = \frac{v^2}{R} = \frac{10^2}{20} \Rightarrow \boxed{a_C = 5 \ m/s^2}$$

O módulo do vetor aceleração instantânea é dado por:

$$\gamma = \sqrt{a_T^2 + a_C^2}$$

$$\gamma = \sqrt{5,0^2 + 5,0^2} \Rightarrow \boxed{\gamma = 5,0\sqrt{2} \ m/s^2}$$

03. Com relação à aceleração vetorial de uma partícula, assinale verdadeiro (V) ou falso (F) para as frases abaixo.

01 – Num movimento com trajetória retilínea, a aceleração é constante.

02 – Nos movimentos retilíneos e uniformemente variados, a aceleração é nula.

04 – Nos movimentos circulares e uniformes, o vetor aceleração é constante.

08 – Nos movimentos curvos, a aceleração é nula.

16 – Quando o módulo da aceleração centrípeta é constante, o movimento é retilíneo.

32 – Todo movimento uniforme é desprovido de aceleração.

Resolução

01 – (F) – Nos movimentos retilíneos, a aceleração centrípeta é nula e, portanto, a aceleração vetorial resume-se à aceleração tangencial. Se o movimento for uniforme, a aceleração será constantemente nula. Se o movimento for uniformemente variado, a aceleração será constante e diferente de zero. Se o movimento for variado, a aceleração vetorial não será constante.

02 – (F) – Nos movimentos uniformemente variados e retilíneos, a aceleração vetorial resume-se à aceleração tangencial, que é constante e não-nula.

04 – (F) – Nos movimentos circulares, a aceleração centrípeta varia em direção.

08 – (F) – Nos movimentos curvos deve existir aceleração centrípeta.

16 – (F) – Para que o movimento seja retilíneo, a aceleração centrípeta deve ser constantemente nula.

32 – (F) – No movimento uniforme em trajetória circular (MCU) a aceleração vetorial é não-nula ($\vec{a}_C \neq \vec{0}$). Para não haver aceleração, o movimento uniforme tem que ser retilíneo.

Capítulo 10. Vetores

1. Grandezas Escalares e Vetoriais

Algumas grandezas físicas exigem, para sua perfeita caracterização, apenas uma intensidade.

Essas grandezas são denominadas **grandezas escalares**. Assim, grandezas físicas, como massa, comprimento, tempo, temperatura, densidade e muitas outras, são classificadas como **grandezas escalares**.

Por outro lado, existem grandezas físicas que, para sua perfeita caracterização, exigem, além da intensidade, uma orientação espacial (direção e sentido).

Tais grandezas recebem o nome de **grandezas vetoriais**. Como exemplo de grandezas vetoriais, podemos citar: força, impulso, quantidade de movimento, velocidade, aceleração e muitas outras.

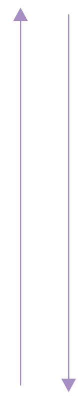
2. Vetores

As grandezas vetoriais são representadas por um ente matemático denominado **vetor**.

Um vetor reúne, em si, o **módulo**, representando o valor numérico ou intensidade da grandeza, e a **direção** e **sentido**, representando a orientação da grandeza.

É importante salientarmos as diferenças entre direção e sentido: um conjunto de retas paralelas tem a mesma direção.

e, a cada direção, podemos associar uma orientação.



A figura abaixo representa uma grandeza vetorial qualquer: um segmento de reta orientado (direção e sentido) com uma determinada medida (módulo).

$$A \xrightarrow{\vec{a}} B$$

$$\text{vetor } \vec{a} \begin{cases} \text{módulo: representado pelo comprimento do segmento AB} \\ \text{direção: reta determinada pelos pontos A e B} \\ \text{sentido: de A para B (orientação da reta AB)} \end{cases}$$

Para indicar um vetor, podemos usar qualquer uma das formas indicadas abaixo:

$$\vec{a} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AB}$$

$$\underset{\text{Origem}}{A} \xrightarrow{\qquad \vec{a} \qquad} \underset{\text{Extremidade}}{B}$$

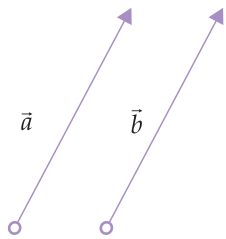
Para indicarmos o módulo de um vetor, podemos usar qualquer uma das seguintes notações:

a ou $|\vec{a}|$

Assim, $\vec{a}$ indica o **vetor** $\vec{a}$ e a indica o **módulo** do vetor $\vec{a}$.

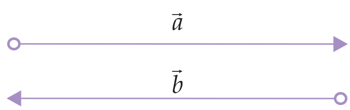
3. Vetores Iguais e Vetores Opostos

Dois vetores são iguais quando possuem o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido.



$$\vec{a} = \vec{b} \begin{cases} a = b & \text{(módulos iguais)} \\ \vec{a} \text{ e } \vec{b} & \text{são paralelos (mesma direção).} \\ \vec{a} \text{ e } \vec{b} & \text{possuem o mesmo sentido.} \end{cases}$$

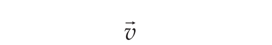
Dois vetores são opostos quando possuem o mesmo módulo, a mesma direção e sentidos contrários.



$$\vec{a} = -\vec{b} \begin{cases} a = b & \text{(módulos iguais)} \\ \vec{a} \text{ e } \vec{b} & \text{possuem a mesma direção.} \\ \vec{a} \text{ e } \vec{b} & \text{possuem sentidos contrários.} \end{cases}$$

4. Representação de Grandezas Vetoriais

Na prática, a representação de grandezas vetoriais é feita por meio de vetores desenhados em escala. Assim, para representarmos vetorialmente a velocidade de um partícula que se desloca horizontalmente para a direita a 80 km/h, utilizamos um segmento de reta, por exemplo, com 4 cm de comprimento, onde cada centímetro corresponde a 20 km/h.



escala: 1,0 cm: 20 km/h

5. Grandezas Proporcionais

As intensidades das grandezas físicas podem estar relacionadas proporcionalmente de dois modos.

5.1. Grandezas Diretamente Proporcionais

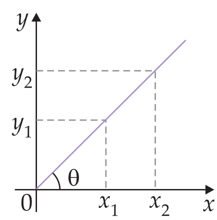
Duas grandezas x e y são diretamente proporcionais quando a razão entre suas intensidades é constante.

$$\frac{y}{x} = k \text{ (constante)}$$

ou

$$y = k \cdot x \text{ (função do 1º grau)}$$

Nesse caso, o gráfico $y \times x$ é:



$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \text{tg}\,\theta = k$$

5.2. Grandezas Inversamente Proporcionais

As grandezas x e y são ditas inversamente proporcionais quando o produto de suas intensidades é constante.

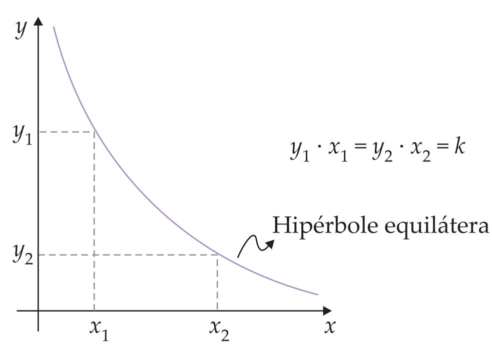
Nesse caso:

$$y \cdot x = k \text{ (constante)}$$

ou

$$y = \frac{k}{x} \text{ (função hiperbólica)}$$

O gráfico $y \times x$ é:



Exercícios Resolvidos

01. A velocidade de um projétil é 20 m/s, horizontal e para a direita. Interprete as informações.

Resolução

As informações caracterizam uma intensidade (20 m/s), uma direção (horizontal) e um sentido (para a direita).

Portanto, caracterizam a velocidade como grandeza vetorial.

02. Assinale **V** (verdadeiro), ou **F** (falso), para as frases abaixo.

( ) 01 – Temperatura é grandeza escalar.

( ) 02 – Massa é grandeza escalar.

( ) 04 – Força é grandeza vetorial.

( ) 08 – A aceleração da gravidade é grandeza vetorial.

( ) 16 – Volume é grandeza escalar.

Resolução

Todas as frases são verdadeiras. Temperatura, massa e volume são grandezas que ficam perfeitamente caracterizadas por um número (intensidade) e por um significado (unidade). Força e aceleração são grandezas que necessitam, além da intensidade, de uma direção e de um sentido.

03. Uma substância, mantida a temperatura constante, tem sua massa e volume representados na tabela.

m (kg)	0,8	2,4	4,0	8,0
V (ℓ)	1	3	5	10

a) massa e volume são grandezas diretamente proporcionais? Justifique!

b) esboce o gráfico $m \times v$ correspondente.

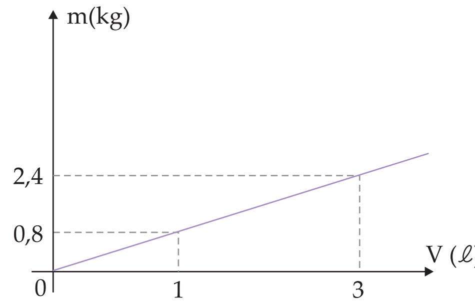
c) qual é a massa de substância correspondente ao volume de 0,7 ℓ?

d) qual é o volume correspondente à massa de 3,2 kg?

Resolução

a) Como $\dfrac{m}{v} = k$ *(constante), então* ***massa*** *e* ***volume*** *são grandezas* ***diretamente proporcionais****.*

b) O gráfico $m \times v$ *é uma reta, passando pela origem dos eixos.*



c) $\dfrac{m_1}{v_1} = \dfrac{m_2}{v_2} = \text{constante}$

$$\frac{m}{0,7} = \frac{0,8}{1} \qquad \boxed{m = 0,56\ kg}$$

d) do mesmo modo $\dfrac{0,8}{1} = \dfrac{3,2}{V}$

$$V = \frac{3,2}{0,8} \qquad \boxed{V = 4\text{L}}$$

6. Produto: Vetor x Escalar

Podemos multiplicar um vetor $\vec{a}$ por um escalar n (número real), obtendo um novo vetor $\vec{p}$.

$$\vec{p} = n \cdot \vec{a}$$

Esse novo vetor $\vec{p}$ tem as seguintes características:

– direção: a mesma da $\vec{a}$ (paralelo a $\vec{a}$)

$$\text{– sentido:} \begin{cases} \text{o mesmo de } \vec{a} \text{ se } n > 0 \\ \text{contrário ao de } \vec{a} \text{ se } n < 0 \end{cases}$$

– módulo: $p = |n| \cdot a$

7. Adição de Vetores

Para a adição de vetores vamos, inicialmente, definir vetor resultante:

Vetor resultante ou vetor soma, de dois ou mais vetores, é o vetor único que produz o mesmo efeito que os vetores somados.

Para a determinação do vetor resultante, ou seja, para efetuarmos a adição vetorial de dois ou mais vetores, podemos utilizar três métodos, denominados:

a) regra do polígono

b) regra do paralelogramo

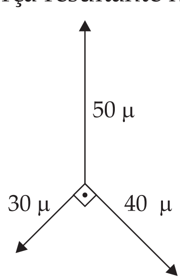
c) regra dos componentes vetoriais

7.1. Regra do Polígono

Para efetuarmos a adição de vetores pela regra do polígono, escolhemos, arbitrariamente, um dos vetores como ponto de partida e traçamos os vetores seguintes, colocando a origem do 2º vetor coincidindo com a extremidade do 1º e, assim, sucessivamente, até traçarmos todos os vetores. O vetor soma ($\vec{S}$) ou resultante ($\vec{R}$) é determinado pela origem do 1º vetor e pela extremidade do último vetor traçado.

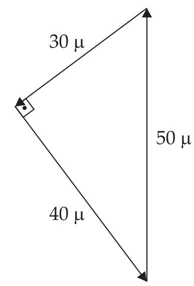
Exercícios Resolvidos

01. Aplicando o método do polígono, determine a força resultante no ponto C.



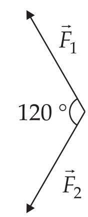
Resolução

Para construir o polígono, iniciamos por qualquer um dos vetores.



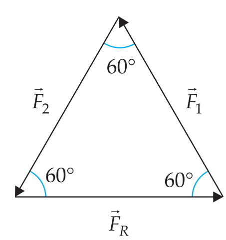
O polígono resultante é uma figura fechada, portanto a resultante no ponto C é nula.

02. Obter, pelo método do polígono, a resultante das forças $F_1 = F_2 = 100$ N

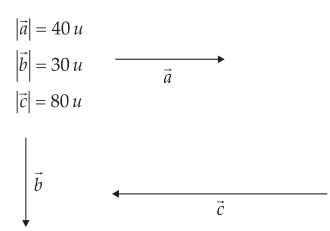


Resolução

Construindo o polígono, obtemos um triângulo eqüilátero, portanto o resultante tem intensidade igual à das forças componentes.



03. Dados três vetores $\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{c}$, sendo:

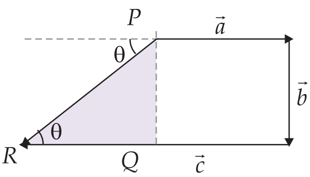


determine o vetor resultante:

$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Resolução

Traçamos os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ pela regra do polígono.



Para determinarmos o módulo do vetor $\vec{R}$ e do ângulo θ, aplicamos o teorema de Pitágoras, no triângulo PQR.

$$(R)^2 = (40)^2 + (30)^2$$

$$R = 50\,u$$

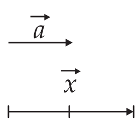
04. Dado o vetor $\vec{a}$, representar os vetores: $\vec{a}$

a) $\vec{x} = 2 \cdot \vec{a}$

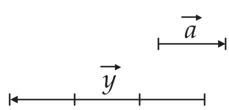
b) $\vec{y} = -3 \cdot \vec{a}$

Resolução

a) $\vec{x} = 2 \cdot \vec{a}$, então $x = 2 \cdot a$



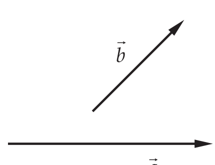
b) $\vec{y} = -3 \cdot \vec{a}$, então $y = 3 \cdot a$



7.2. Regra do Paralelogramo

Este método é utilizado para obter o vetor resultante de dois vetores.

Sejam os vetores

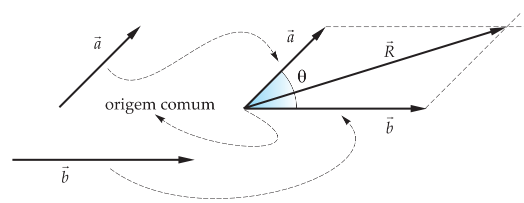


Para a determinação do vetor $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$ procedemos da seguinte maneira:

- Traçamos os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ com as origens coincidindo no mesmo ponto, mantendo seus módulos, direções e sentidos.
- Pela extremidade de $\vec{a}$, traçamos uma reta paralela a $\vec{b}$ e pela extremidade de $\vec{b}$, uma reta paralela a $\vec{a}$.
- O vetor resultante $\vec{R}$ será obtido unindo a origem dos dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ com o encontro das paralelas.
- O vetor $\vec{R}$ terá origem na origem dos vetores e extremidade no encontro das paralelas.
- O módulo do vetor $\vec{R}$ será calculado pela expressão abaixo, obtida a partir da lei dos cossenos.

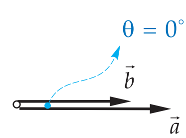
$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\theta}$$

onde θ é o ângulo formado pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e $0° \leq \theta \leq 180°$.



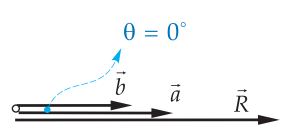
Vejamos alguns casos particulares:

a) $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm mesmo sentido

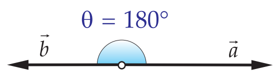


$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \underbrace{\cos\theta}_{1}} = \sqrt{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}$$

$$R = \sqrt{(a+b)^2} \Rightarrow \boxed{R = a + b}$$

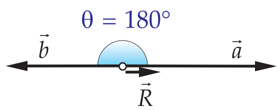


b) $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm sentidos opostos



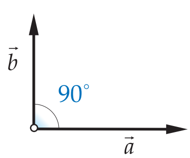
$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \underbrace{\cos 180°}_{-1}} = \sqrt{a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2}$$

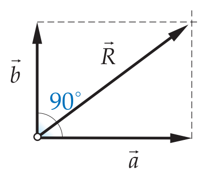
$$R = \sqrt{(a-b)^2} \Rightarrow \boxed{R = |a - b|}$$



Obs: o vetor resultante terá o mesmo sentido do vetor de maior módulo (no caso o vetor $\vec{a}$).

c) $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são ortogonais





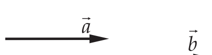
$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \underbrace{\cos 90°}_{0}}$$

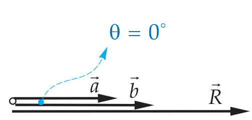
$$\boxed{R = \sqrt{a^2 + b^2}} \text{ ou } \underset{\text{(Pitágoras)}}{R^2 = a^2 + b^2}$$

Exercícios Resolvidos

01. Dados os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, obter o vetor $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$ nos casos abaixo, onde a = 3 e b = 4.

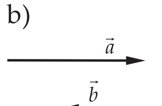
a)

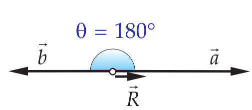




$$R = a + b = 3 + 4 \quad \boxed{R = 7}$$

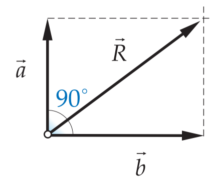
b)





$$R = |a - b| = |3 - 4| \quad \boxed{R = 1}$$

c)

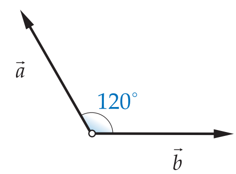


$$R = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

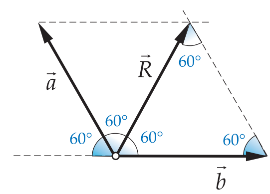
$$R = \sqrt{25}$$

$$\boxed{R = 5}$$

02. Dados os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ com a = b = 20, obter o vetor $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$



$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \underbrace{\cos 120°}_{-\frac{1}{2}}}$$



$$R = \sqrt{20^2 + 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 20 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$R = \sqrt{20^2 + 20^2 - 20^2} = \sqrt{20^2}$$

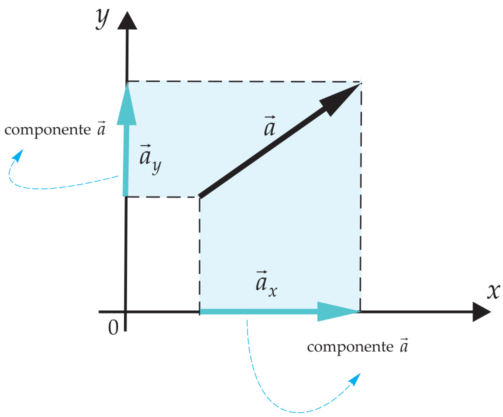
$$\boxed{R = 20}$$

8. Adição Vetorial

8.1. Método das Componentes Vetoriais

Todo vetor $\vec{a}$, em um plano, pode ser representado por dois outros vetores, chamados de componentes retangulares.

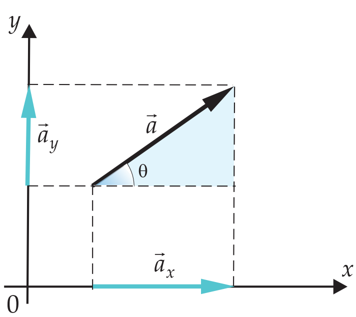
Dado um vetor $\vec{a}$ e duas direções de referência OX e OY, determinamos as componentes retangulares do vetor $\vec{a}$ através das projeções perpendiculares da origem e da extremidade do vetor nas direções dadas, conforme figura a seguir.



O vetor $\vec{a}$ pode ser representado pelas suas componentes retangulares $\vec{a}_x$ e $\vec{a}_y$, sendo válida a relação

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

Para determinarmos os módulos das componentes $\vec{a}_x$ e $\vec{a}_y$, devemos usar as relações trigonométricas no triângulo retângulo.



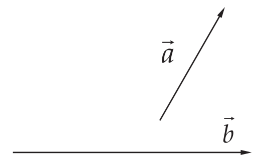
$$\cos\theta = \frac{a_x}{a} \Rightarrow a_x = a \cdot \cos\theta$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{a_y}{a} \Rightarrow a_y = a \cdot \text{sen}\,\theta$$

$$\text{e} \;\; a^2 = a_x^2 + a_y^2$$

9. Subtração Vetorial

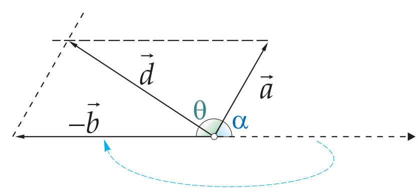
Dados dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, a operação $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ ($\vec{d}$ é o vetor diferença entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$) é realizada através da adição do vetor $\vec{a}$ com o vetor oposto a $\vec{b}$, ou seja, com o vetor $-\vec{b}$.



$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Para essa adição utilizamos a regra do paralelogramo.



Como $\alpha + \theta = 180°$, então $\cos\theta = -\cos\alpha$

Assim,

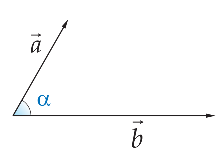
$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + 2.a.b.\cos\theta} =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + 2.a.b.(-\cos\alpha)}$$

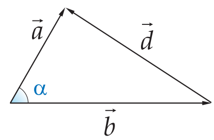
$$\boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\alpha}}$$

Outro modo de obtermos o vetor $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ é:

- Fazer as origens de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ coincidirem.



- Unir as extremidades de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e o vetor $\vec{d}$ obtido terá sentido apontado para o vetor que se lê primeiro na expressão $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, no caso, o vetor $\vec{a}$.

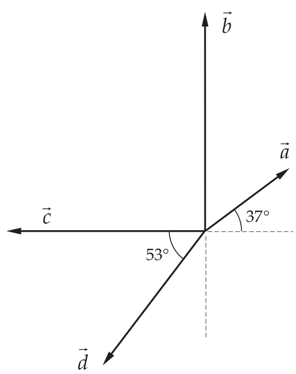


- Seu módulo será dado por:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\alpha}$$

Exercício Resolvido

Dados os vetores abaixo, obter o vetor resultante $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$

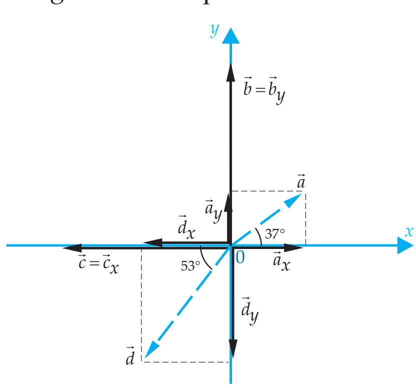


$a = 20\ u \quad b = 42\ u \quad c = 38\ u \quad d = 30\ u$

sen 37° = cos 53° = 0,6

cos 37° = sen 53° = 0,8

Inicialmente determinamos as componentes retangulares dos quatro vetores dados.



$a_x = a \cdot \cos 37° = 20\ .\ 0{,}80 = 16\ u$

$a_y = a \cdot \text{sen}\ 37° = 20\ .\ 0{,}60 = 12\ u$

$d_x = d \cdot \cos 53° = 30\ .\ 0{,}60 = 18\ u$

$d_y = a \cdot \text{sen}\ 53° = 30\ .\ 0{,}80 = 24\ u$

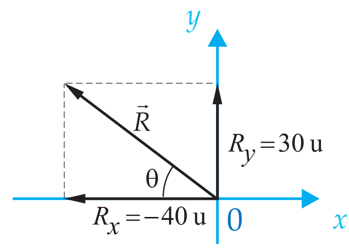
As resultantes R_x e R_y valem:

$R_x = + a_x + b_x - c_x - d_x = 16 + 0 - 38 - 18$

$R_x = - 40\ u$

$R_y = a_y + b_y + c_y - d_y = 12 + 42 + 0 - 24$

$R_y = 30\ u$



O vetor resultante é dado por

$R^2 = R_x^2 + R_y^2$ (Pitágoras)

$R^2 = (- 40)^2 + 30^2$

$R = \sqrt{2\,500}$

$\boxed{R = 50\ u}$

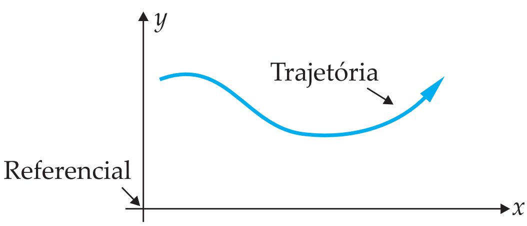
$$\text{tg}\ \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{30}{40} = 0{,}75$$

$\boxed{\theta = 37°}$

Leitura Complementar

Vetor Posição

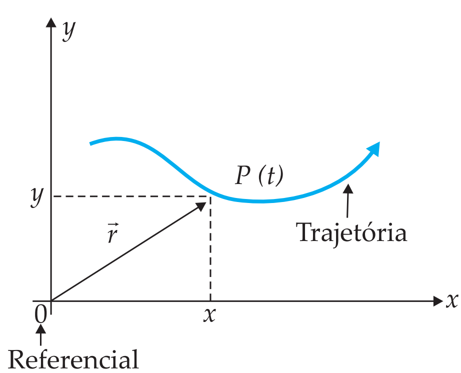
Consideremos um corpo descrevendo uma trajetória curva em relação a um sistema de coordenadas retangulares xy, conforme a figura.



A posição P do corpo, num instante t qualquer, pode ser fornecida pelas coordenadas x e y, e o movimento do corpo pode ser descrito pelas funções horárias.

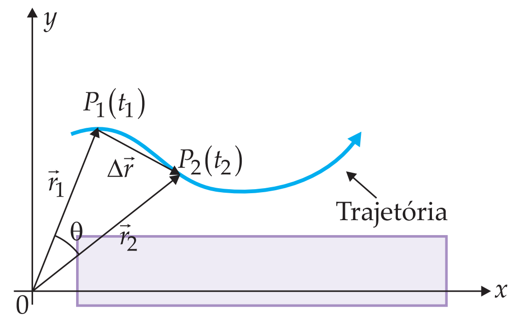
$$x = \mathrm{f}(t) \text{ e } y = \mathrm{f}(t)$$

Podemos também fornecer a posição do corpo pelo vetor $\vec{r}$, um vetor com origem no ponto 0 (referencial) e extremidade no ponto P. Esse vetor r recebe o nome de **vetor posição**.



Deslocamento Vetorial

Quando um corpo se movimenta numa trajetória curva qualquer, o vetor posição $\vec{r}$ varia no decorrer do tempo. Essa variação no vetor posição ocorre, obrigatoriamente, na direção e no sentido, mas não obrigatoriamente no módulo.



Se o móvel se movimenta do ponto P_1 para o ponto P_2, dizemos que ele sofreu um deslocamento vetorial $(\Delta\vec{r})$ dado por

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1}$$

O vetor $\Delta\vec{r}$, que representa o deslocamento vetorial do móvel entre os instantes t_1 e t_2, é um vetor com origem em P_1 (posição inicial) e extremidade em P_2 (posição final).

O módulo do vetor deslocamento $(\Delta\vec{r})$ é dado por:

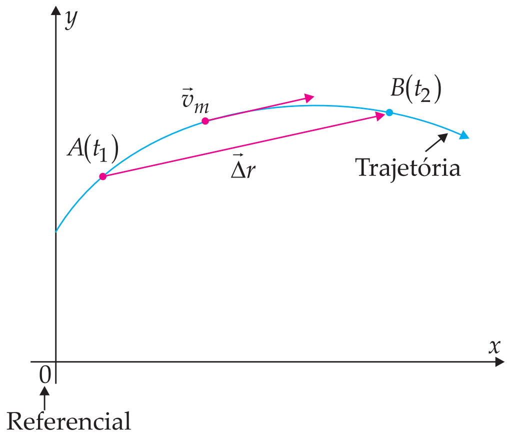
$$\Delta r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \cos\theta}$$

Velocidade Vetorial Média

O vetor velocidade vetorial média $(\vec{v}_m)$ é definido pela relação entre o vetor deslocamento $(\Delta\vec{r})$ e o correspondente intervalo de tempo (Δt).

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$$

Como o intervalo de tempo Δt é sempre positivo, o vetor velocidade vetorial média possui a mesma direção e o mesmo sentido que o vetor deslocamento $\Delta\vec{r}$.



Comparando o módulo do vetor velocidade vetorial média $|\vec{v}_m|$ com o módulo da velocidade escalar média (v_m), podemos afirmar que:

- nas trajetórias curvas, temos

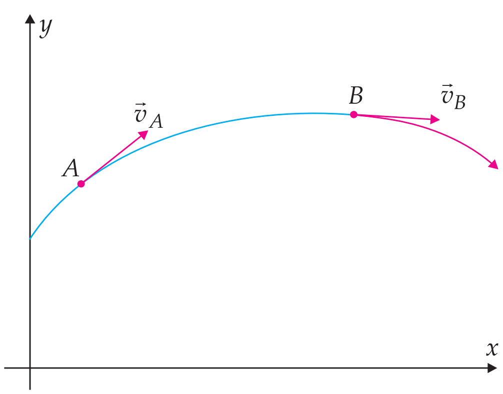
$$|v_m| > |\vec{v}_m| \text{ e,}$$

- nas trajetórias retilíneas, temos

$$|v_m| = |\vec{v}_m|$$

A velocidade vetorial instantânea $\vec{v}$ representa a velocidade vetorial média quando o intervalo de tempo Δt tende a zero, ou seja, representa a velocidade vetorial instantânea do móvel num instante t qualquer.

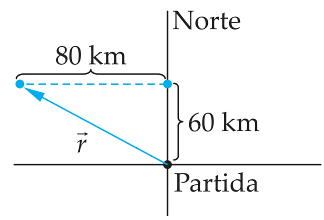
O vetor velocidade instantânea é sempre **tangente à trajetória** no ponto considerado.



Exercícios Resolvidos

01. Um automóvel se desloca 60 km para o norte e, em seguida, 80 km para o oeste. Calcule o módulo do vetor posição em relação ao ponto de partida.

Resolução



Da figura:

$$r^2 = (60)^2 + (80)^2$$

$$\boxed{r = 100\ km}$$

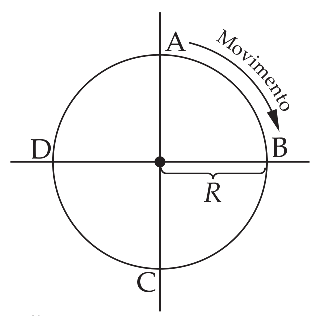
02. Considere um ponto material descrevendo uma circunferência de raio R.

Calcule o módulo do vetor deslocamento

a) entre os pontos A e B;

b) entre os pontos A e C;

c) para uma volta completa.

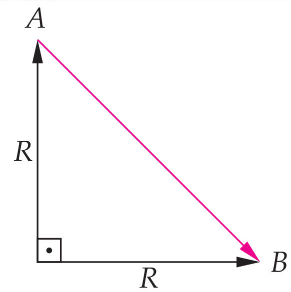


Resolução

a) Entre os pontos A e B, o vetor deslocamento tem a direção da reta AB, sentido de A para B e seu módulo é dado pela aplicação do teorema de Pitágoras.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$$

$$\boxed{\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2}R}$$



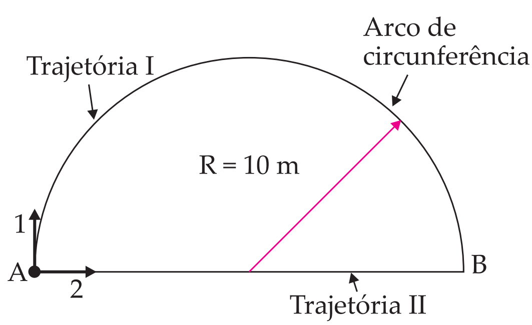
b) Entre os pontos A e C, o vetor deslocamento tem a direção da reta AC, sentido de A para C e módulo 2R.

c) Para uma volta completa, a posição final coincide com a inicial e, portanto, o deslocamento é nulo.

03. Duas partículas 1 e 2 encontram-se no ponto A da figura a seguir, no instante t = 0. Elas movimentam-se conforme as trajetórias I e II indicadas, chegando juntas em B, após 10 s da partida de A. Determine:

a) a velocidade escalar média para cada partícula;

b) o módulo do vetor velocidade vetorial média para cada partícula.



Resolução

a) A velocidade escalar média é dada por

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t};$$

$$part.\ 1: v_m = \frac{\pi \cdot R}{\Delta t} = \frac{31{,}4}{10} \Rightarrow \boxed{v_m = 3{,}1\,m/s}$$

$$part.\ 2: v_m = \frac{2R}{\Delta t} = \frac{20}{10} \Rightarrow \boxed{v_m = 2{,}0\,m/s}$$

b) O módulo do vetor velocidade vetorial é dado por $|\vec{v}_m| = \dfrac{\Delta r}{\Delta t}$.

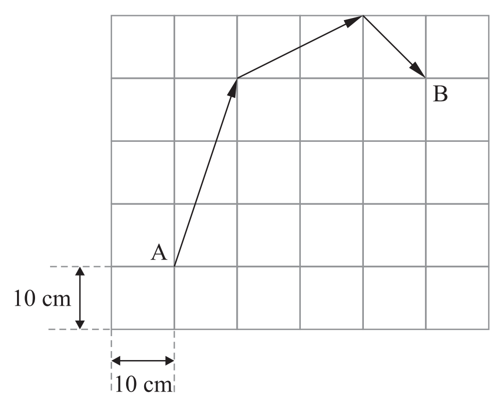
Como o módulo do vetor deslocamento é igual para as duas partículas, temos:

$$|\vec{v}_m| = \frac{2R}{\Delta t} = \frac{20}{10}$$

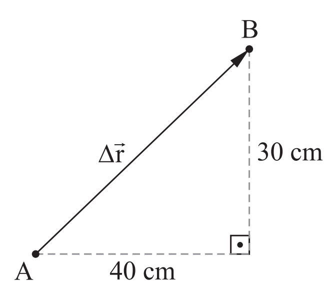
$\boxed{|\vec{v}_m| = 2{,}0\,m/s}$ *(para as duas partículas)*

04. (Mackenzie-SP) A figura em escala mostra os vetores deslocamento de uma formiga, que, saindo do ponto A, chegou ao ponto B, após 3 minutos e 20 s. O módulo do vetor velocidade média do movimento da formiga, nesse trajeto, foi de:

a) 0,15 cm/s
b) 0,20 cm/s
c) 0,25 cm/s
d) 0,30 cm/s
e) 0,40 cm/s



Resolução



$|\Delta\vec{r}|^2 = 30^2 + 40^2$

$\boxed{|\Delta\vec{r}| = 50\,cm}$

A velocidade vetorial média tem módulo dado por:

$$|\vec{v}_m| = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \frac{50}{200}$$

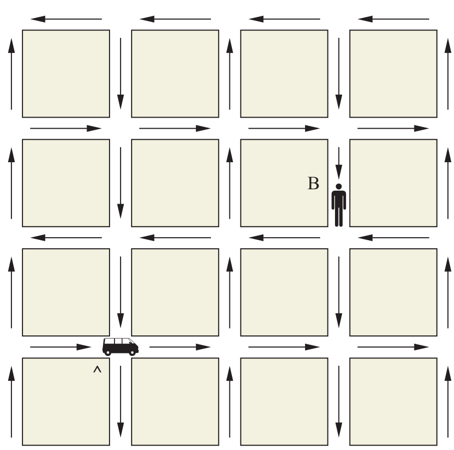
$\boxed{|\vec{v}_m| = 0{,}25\,cm/s}$

Resposta: *C*

05. (Unicamp-SP) A figura abaixo representa um mapa da cidade de Vectoria o qual indica a direção das mãos do tráfego. Devido ao congestionamento, os veículos trafegam com a velocidade média de 18 km/h. Cada quadra desta cidade mede 200 m por 200 m (do centro de uma rua ao centro da outra rua). Uma ambulância localizada em A precisa pegar um doente localizado bem no meio da quadra B, sem andar na contramão.

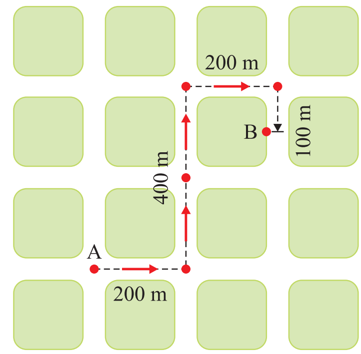
a) Qual o menor tempo gasto (em minutos) no percurso de A para B?

b) Qual é o módulo do vetor velocidade média (em km/h) entre os pontos A e B?



Resolução

a) Para gastar o menor tempo possível de A até B, a ambulância deverá percorrer o menor trajeto possível, como indicado a seguir.



Portanto: $\Delta s = 900\,m$ (mínimo)

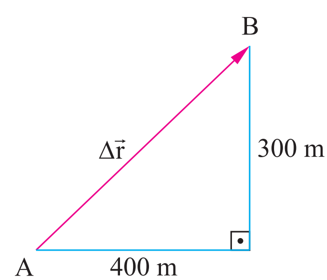
Como $v_m = 18\,km/h = 5\,m/s$, temos:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v_m} = \frac{900\,m}{5\,m/s}$$

$$\Delta t = 180\,s = \boxed{3\,\text{min}}$$

b) Para calcular o módulo do vetor velocidade média $(|\vec{v}_m|)$, deve-se ter o módulo do vetor deslocamento $(\Delta\vec{r})$, que só depende dos pontos A e B:



$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{300^2 + 400^2} \Rightarrow |\Delta\vec{r}| = 500\,m$$

Então:

$$|\vec{v}_m| = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} \Rightarrow |\vec{v}_m| = \frac{500}{180} \cdot 3{,}6 \Rightarrow \boxed{|\vec{v}_m| = 10\,km/h}$$