

Física 2

Dinâmica e Gravitação

Pré-Vestibular

Teoria e Exercícios Propostos



Editora COC – Empreendimentos Culturais Ltda.
Rua General Celso de Mello Rezende, 301
Tel.: (16) 3603.9700 – CEP 14095-270
Lagoinha – Ribeirão Preto – SP



Capítulo 01. Introdução à Dinâmica

1. Conceito de Força	9
2. Efeitos de Forças	9
2.1. Deformação	9
2.2. Alteração de Velocidade	9
2.3. Equilíbrio	9
3. Medida de Forças	10
4. Tipos de Forças	10
4.1. Força Peso	10
4.2. Força de Tração	10
4.3. Força Normal	10
4.4. Força de Atrito	10
5. Resultante das Forças	11
6. Equilíbrio de uma Partícula	12
7. Equilíbrio Básico	12
8. Equilíbrio de Partícula sob a Ação de Três Forças	13
9. Equilíbrio de Partícula sob a Ação de Várias Forças	13

Capítulo 02. Leis de Newton

1. Introdução	15
2. Conceito de Inércia	15
3. Princípio da Inércia ou Primeira Lei de Newton	16
4. Referencial Inercial	16
5. Princípio Fundamental ou Segunda Lei de Newton	17
6. Massa: Medida da Inércia	18
7. Unidades de Medida	18
8. Componentes da Força Resultante	19
9. Resultante Tangencial	19
10. Resultante Centrípeta	20
11. Força Peso	21
12. Massa e Peso	21
13. Resistência do Ar	21
14. Velocidade Limite de Queda Vertical no Ar	22

Índice.física 2

15. Ação e Reação	23
16. Lei da Ação e Reação	23
17. Exemplos de Interações	24
17.1. Interações de Campo	24
17.2. Interações de Contato	24

Capítulo 03. Aplicações das Leis de Newton

1. Dinamômetro de Tração	26
2. Dinamômetro de Compressão	27
3. Sistemas de Blocos	28
4. Exemplos de Sistemas	28
4.1. Blocos Comprimidos	28
4.2. Blocos Tracionados	29
5. Máquina de Atwood	30
6. Sistema de Blocos Horizontal-Vertical	31
7. Plano Inclinado	32
8. Componentes do Peso	32
9. Lei de Hooke	34
10. Força Elástica	34

Capítulo 04. Força de Atrito

1. Introdução	36
2. Atrito Dinâmico	36
3. Força de Atrito Estático	38
4. Atrito Estático Máximo	38

Capítulo 05. Dinâmica do Movimento Circular

1. Introdução	41
2. Aplicações Usuais	41
2.1. Corpo Girado por um Fio	41
2.2. Carro Executando uma Curva	42
2.3. Avião Efetuando uma Curva	42
3. Movimentos em Curvas Verticais	43
3.1. Pêndulo Simples	43
3.2. Carro Executando Curvas Verticais	43
3.3. Globo da Morte	43
3.4. Gravidade Simulada em Naves	44

Índice.física 2

Capítulo 06. Equilíbrio de Corpo Extenso

1. Momento de uma Força	45
2. Equilíbrio Estático do Corpo Extenso	47

Capítulo 07. Gravitação Universal

1. Lei da Gravitação Universal	49
2. Campo Gravitacional	50
3. Campo Gravitacional da Terra	51
4. Campo Gravitacional na Superfície da Terra	51
5. Campo Gravitacional em um Ponto no Interior da Terra	51
6. Satélite em Órbita Circular	53
7. Velocidade Linear de Translação	53
8. Período de Translação	53
9. Satélites Geo-estacionários	54
10. Teorias Planetárias	54
11. Teoria Geocêntrica	54
12. Teoria Heliocêntrica	55
13. Leis de Kepler	56
13.1. 1ª Lei: Lei das Órbitas	56
13.2. 2ª Lei: Lei das Áreas	56
13.3. 3ª Lei: Lei dos Períodos	57

índice.física 2



Capítulo 01. Introdução à Dinâmica

A Dinâmica é o ramo da Mecânica que estuda as causas do movimento de um corpo. Estas causas estão relacionadas às forças que atuam sobre ele. Dessa maneira, o conceito de força é de fundamental importância no estudo da Dinâmica.

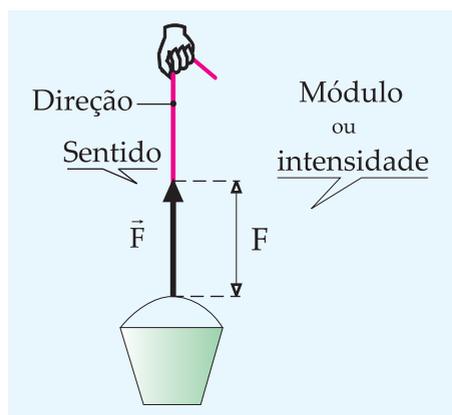
1. Conceito de Força

Tomemos um corpo inicialmente em repouso. Esse corpo jamais conseguirá sair do estado de repouso, a menos que receba a ação de uma força resultante não-nula.

Um corpo sozinho não exerce força sobre si mesmo. Logo:

“Força é o fruto da interação entre dois corpos.”

É importante lembrar que a grandeza física, força, é uma grandeza vetorial, isto é, para caracterizá-la precisamos definir sua **intensidade** (módulo), sua **direção** de atuação e seu **sentido**.



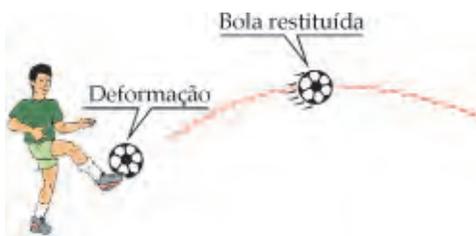
Quando assinalamos uma força (\vec{F}) num corpo, usando um vetor (seta), queremos simbolizar a ação que ele está sofrendo de um outro corpo. Logo, o número de forças que um corpo recebe está associado ao número de interações das quais ele participa.

2. Efeitos de Forças

Podemos reconhecer a existência de forças pelos efeitos que produzem quando aplicadas a um corpo.

2.1. Deformação

A deformação é um dos efeitos causados pela força. Por exemplo, quando você chuta uma bola, no ponto de contato entre o pé e a bola ocorre uma deformação.

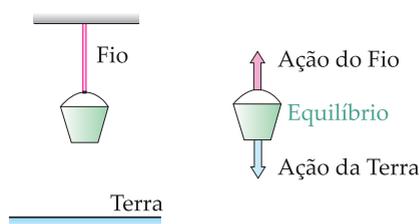


2.2. Alteração de Velocidade

Outro efeito que a força pode produzir no corpo é a alteração de sua velocidade, que consiste num aumento ou numa diminuição do módulo da velocidade, ou alteração da direção da velocidade. No exemplo acima, além do pé do jogador deformar a bola, simultaneamente seu chute altera a velocidade da bola.

2.3. Equilíbrio

O equilíbrio é outro efeito causado pela força. Por exemplo, você prende um corpo através de um fio num suporte. A força do fio no corpo produz um equilíbrio, evitando que ele caia pela ação da gravidade terrestre.

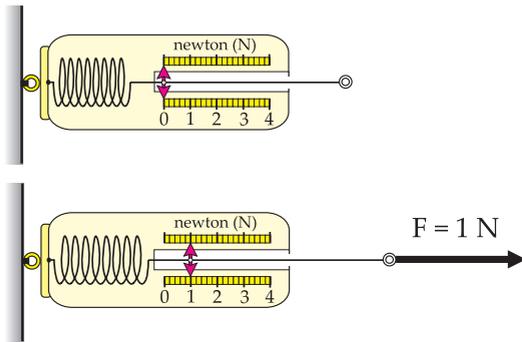


3. Medida de Forças

A intensidade de uma força pode ser medida através de um aparelho denominado **dinamômetro**.

O dinamômetro é um instrumento constituído de uma mola que se deforma quando recebe a ação de uma força. Logo, para cada deformação produzida, temos o dispositivo indicando a intensidade da força aplicada.

No SI, a unidade de medida de força é o **newton (N)**. Eventualmente pode-se utilizar a unidade prática **quilograma-força (kgf)**, sendo que $1 \text{ kgf} = 9,8 \text{ N}$.

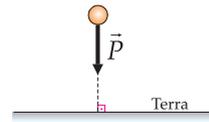


4. Tipos de Forças

As forças trocadas entre os corpos podem ser de **contato** ou de **campo** (ação à distância). Destacamos, a seguir, as orientações (direção e sentido) de algumas dessas forças que usaremos na Dinâmica.

4.1. Força Peso

Denomina-se força peso (\vec{P}) a força de campo gravitacional que a Terra exerce sobre qualquer objeto colocado próximo à sua superfície. Ela tem direção vertical e sentido para baixo.



4.2. Força de Tração

É a força de contato aplicada por um fio (ou eventualmente por uma barra) sobre um corpo. A força de tração (\vec{T}) tem a direção do fio e sentido de puxar.

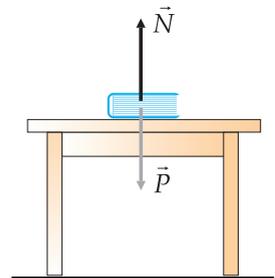


4.3. Força Normal

A força de reação normal de apoio, ou simplesmente força normal (\vec{N}), é a força de empurrão que uma superfície exerce sobre um corpo nela apoiado. É uma força de contato.

Quando um bloco (um livro, por exemplo) encontra-se em repouso sobre uma mesa, ele recebe dela uma força de compressão. Essa impede a penetração do bloco na mesa devido à ação da força peso.

A força normal tem direção **perpendicular** às superfícies de contato e sentido de empurrar.

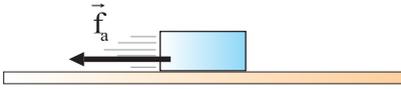


4.4. Força de Atrito

Quando se lança um corpo sobre uma mesa comum horizontal, ele pára após percorrer uma certa distância. Isso significa que houve uma resistência ao seu movimento. Essa resistência pode alterar a velocidade do corpo e é, portanto, medida por uma força.



Essa força de contato motivada por asperezas superficiais recebe o nome de força de atrito (\vec{f}_a).



Tal força de atrito é paralela às superfícies de contato e se opõe ao deslizamento relativo ou à tendência de escorregamento.

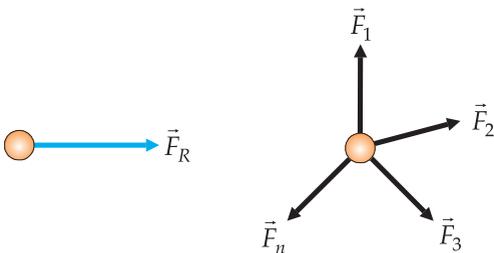
5. Resultante das Forças

Na maioria das situações práticas, o corpo em estudo fica sujeito a várias forças que agem simultaneamente: um carro movimenta-se numa estrada; um lustre preso ao teto através de correntes, etc. Normalmente, é possível substituir todas as forças aplicadas por uma única, chamada de **resultante das forças** ou **força resultante** (\vec{F}_R), cuja característica principal é a de produzir o mesmo efeito que todas as forças juntas.

Devemos tomar muito cuidado com a resultante, porque ela não é uma força aplicada no corpo e sim a que substitui as forças atuantes. Quando não-nula, a força resultante produz variações na velocidade do corpo.

Se n forças agem simultaneamente sobre um objeto, podemos obter a resultante das forças através da **adição vetorial** das n forças aplicadas. Assim temos:

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \Rightarrow \vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$



Força resultante

Força equivalente às atuantes. É obtida pela adição vetorial das forças atuantes.

Exercícios Resolvidos

01. Sobre um corpo de dimensões desprezíveis, atuam duas forças, cujas intensidades são $F_1 = 8,0 \text{ N}$ e $F_2 = 6,0 \text{ N}$.

Entre quais valores se situa a intensidade da força resultante?

Resolução

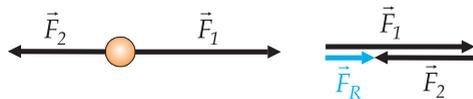
A resultante terá intensidade máxima, quando as duas forças tiverem a mesma direção e o mesmo sentido.



$$\begin{aligned} \vec{F}_R &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ F_R &= F_1 + F_2 = 8,0 + 6,0 \\ F_R &= 14 \text{ N} \end{aligned}$$

Nessas condições, a resultante tem a mesma direção e o mesmo sentido das forças componentes.

A resultante terá intensidade mínima, quando as duas forças tiverem a mesma direção e sentidos opostos.

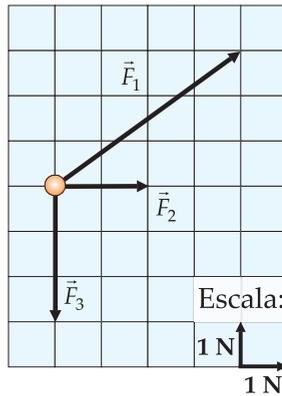


$$\begin{aligned} \vec{F}_R &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ F_R &= F_1 - F_2 = 8,0 - 6,0 \\ F_R &= 2,0 \text{ N} \end{aligned}$$

Nessas condições, a resultante tem a mesma direção das forças componentes e sentido coincidente com o de maior módulo.

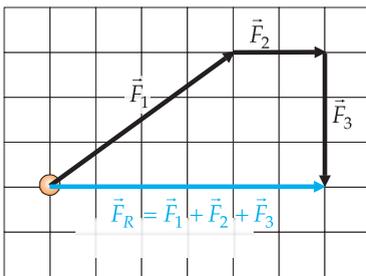
Em suma, a resultante dessas forças pode variar entre 14 N (máximo valor) e 2,0 N (mínimo valor).

02. Uma partícula encontra-se sob a ação exclusiva de três forças, como indica a figura em escala. Qual a intensidade, a direção e o sentido da resultante dessas forças atuantes?



Resolução

Usando-se a regra da poligonal para adição vetorial das forças atuantes, temos:



Pela figura acima, vem:

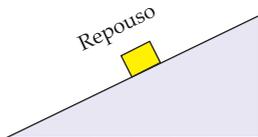
$$F_R = 6 \text{ N} , \text{ horizontal e para direita.}$$

03. Um automóvel faz uma curva. Existe força resultante agindo nele?

Resposta

Sim, pois ao realizar a curva, ocorre uma alteração na direção de sua velocidade..

04. Um bloco, depositado sobre um plano inclinado, permanece em repouso como ilustra a figura.

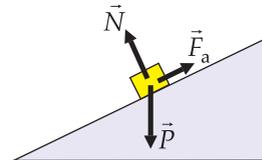


a) Usando vetores, indique as orientações das forças peso, normal e atrito atuantes no bloco.

b) O que se pode afirmar sobre a resultante das forças que atuam no bloco?

Resolução

a) A força peso é vertical para baixo. A normal é a força com que o plano inclinado empurra o bloco, sendo perpendicular a este. A força de atrito é paralela ao plano e oposta à tendência de escorregamento descendente do bloco. Ou seja:



b) Se existisse força resultante sobre o bloco, sua velocidade estaria variando. Como o bloco encontra-se em repouso (velocidade constante e nula), a resultante das forças é nula. Ou seja, as forças atuantes no bloco se equilibram.

6. Equilíbrio de uma Partícula

Dizemos que uma partícula encontra-se em equilíbrio quando ela não sofre a ação de forças ou quando as forças que nela atuam se neutralizam. Desse modo, a força resultante na partícula será nula e ela poderá se encontrar em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, que são estados de velocidade constante. Ou seja:

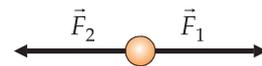
$$\vec{F}_R = \vec{0} \Rightarrow \text{Equilíbrio}$$

Equilíbrio { estático (repouso)
dinâmico(MRU)

7. Equilíbrio Básico

Se apenas duas forças atuarem numa partícula, seu equilíbrio ocorrerá quando tais forças possuírem **mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos**, isto é, quando essas forças forem vetores opostos.

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

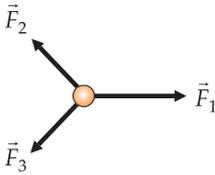


Sendo que em módulo: $F_1 = F_2$

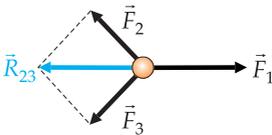


8. Equilíbrio de Partícula sob a Ação de Três Forças

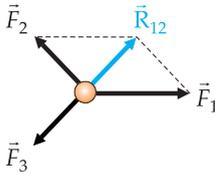
Um caso especial de equilíbrio de partícula refere-se ao equilíbrio de uma partícula sujeita à ação simultânea de três forças coplanares e não colineares. Por exemplo, consideremos uma partícula sob a ação das três forças mostradas na figura a seguir.



Neste caso, podemos observar que cada força é a **equilibrante** do sistema formado pelas outras duas forças.

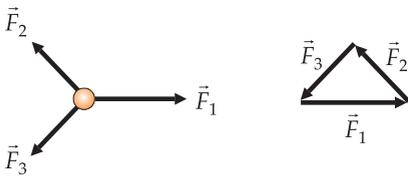


$$\vec{F}_1 = -\vec{R}_{23}$$



$$\vec{F}_2 = -\vec{R}_{12}$$

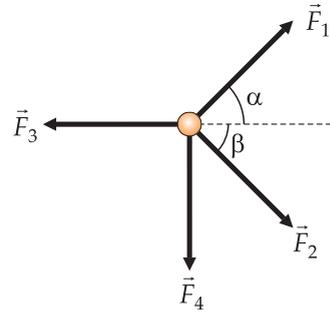
De modo geral, a resultante de três forças será nula quando a linha poligonal formada pelos vetores força for fechada. Observe:



$$\text{Equilíbrio} \Rightarrow \vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

9. Equilíbrio de Partícula sob a Ação de Várias Forças

Consideremos como caso geral uma partícula em equilíbrio sob a ação das quatro forças mostradas na figura a seguir.



Neste caso, iniciamos a resolução por meio da decomposição de todas as forças que se encontram inclinadas em relação aos eixos x e y .

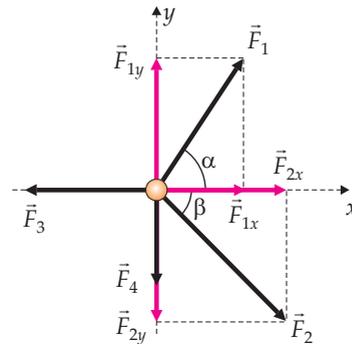
Assim, temos:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \beta$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \beta$$



Em seguida, determinamos as expressões que nos dão o equilíbrio da partícula. Lembrando que o somatório das forças deve ser igual a zero, escrevemos:

$$F_{1x} + F_{2x} - F_3 = 0 \text{ e } F_{1y} - F_{2y} - F_4 = 0$$

Ou seja: as resultantes, tanto no eixo x como no eixo y , devem ser iguais a zero.

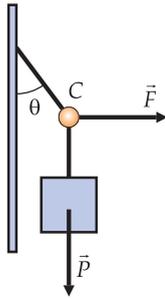
Portanto, o equilíbrio de uma partícula sujeita a um número qualquer de forças pode ser expresso pelas relações:

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0} \text{ e } \Sigma \vec{F}_y = \vec{0}$$

Exercícios Resolvidos

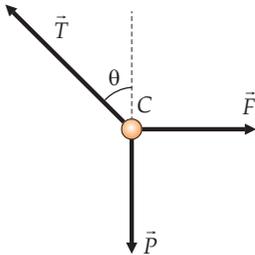
01. (ITA-SP) Um bloco de peso \vec{P} é sustentado por fios, como indica a figura.

Calcular o módulo da força horizontal \vec{F} .



Resolução

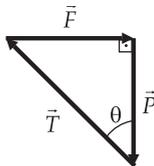
O esquema de forças no ponto C é:



Para que o ponto C esteja em equilíbrio, a resultante no ponto C deve ser nula.

$$\vec{F}_R = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0}$$

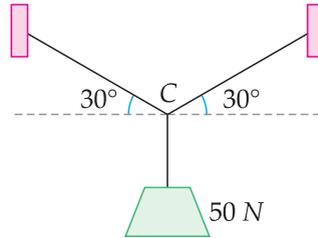
Portanto, o polígono das forças \vec{P} , \vec{T} e \vec{F} deve ser um triângulo retângulo.



Da figura:

$$\text{tg}\theta = \frac{F}{P} \Rightarrow F = P \cdot \text{tg}\theta$$

02. Um objeto de peso 50 N é equilibrado por duas cordas, que formam 30° com a horizontal.

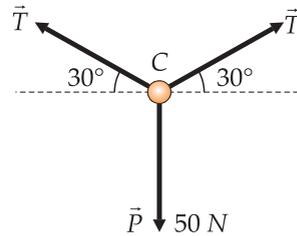


A tração em cada corda tem módulo, em newtons, de:

- a) 25
- b) 50
- c) 70
- d) 100
- e) 200

Resolução

O esquema de forças no ponto C é:



Projetando todas as forças na direção vertical, vem:

$$T \text{ sen } 30^\circ + T \text{ sen } 30^\circ$$

Para o equilíbrio na direção vertical, temos:

$$2T \text{ sen } 30^\circ = 50$$

$$2T \cdot \frac{1}{2} = 50$$

$$T = 50 \text{ N}$$

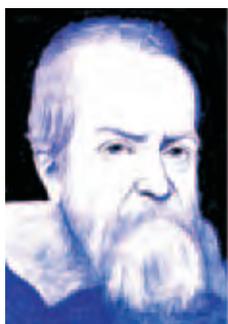
Resposta: B



Capítulo 02. Leis de Newton

1. Introdução

Durante séculos, o estudo do movimento e suas causas tornou-se o tema central da filosofia natural. Entretanto, nas épocas de Galileu e Newton foram realizados extraordinários progressos na solução dos movimentos.



Galileu Galilei



Isaac Newton

O inglês Isaac Newton (1642-1727), nascido no natal do ano da morte de Galileu, foi o principal arquiteto da Mecânica clássica. Ele conseguiu sintetizar as idéias de Galileu e de outros que o precederam, reunindo-as em três leis, publicadas pela primeira vez em 1686, no livro *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*.

Para que possamos entender a essência de tais leis, necessitamos antes apresentar algumas idéias de Galileu sobre o movimento.

2. Conceito de Inércia

Antes de Galileu, a maioria dos pensadores acreditava que um corpo em **movimento** encontraria-se num estado *forçado*, enquanto que o **repouso** seria o seu estado *natural*.

A experiência diária parece confirmar essa afirmativa. Quando depositamos um livro sobre uma mesa é fácil constatar seu estado natural de repouso. Se colocarmos o livro em movimento, dando-lhe apenas um rápido

empurrão, notamos que ele não irá se mover indefinidamente: o livro deslizará sobre a mesa até parar. Ou seja, é fácil observar que cessada a força de empurrão da mão, o livro retorna ao seu estado natural de repouso. Logo, para que o livro mantenha-se em movimento retilíneo uniforme é necessária a ação contínua de uma força de empurrão.

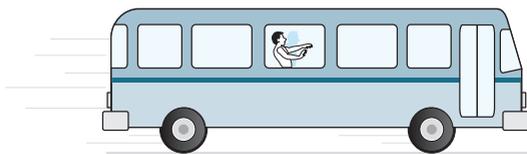
Galileu, entretanto, foi contra essa idéia de movimento ser um estado necessariamente forçado, argumentando que o livro só interrompeu seu deslizamento (vindo a parar) em razão da existência de atrito com a mesa. Isto é, se lançássemos o livro sobre uma mesa menos áspera, haveria menos resistência ao seu deslizamento. Se o seu lançamento ocorresse sobre uma mesa perfeitamente polida, livre de atritos, o livro manter-se-ia em movimento retilíneo uniforme indefinidamente, sem a necessidade de estar sendo continuamente empurrado.

Em virtude disso, Galileu conclui ser uma **tendência natural** dos corpos a manutenção de seu estado de **repouso** ou de seu estado de **movimento retilíneo uniforme**, promovendo aos corpos uma propriedade denominada **inércia**.

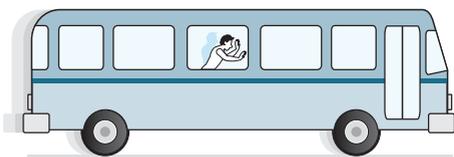
Inércia consiste na tendência natural que os corpos possuem em manter velocidade constante.

Assim, todo corpo em repouso tende a permanecer em repouso e todo corpo em movimento tende a permanecer em movimento retilíneo uniforme.

No cotidiano, notamos essas tendências ao observarmos uma pessoa de pé no interior de um ônibus. Quando o ônibus arranca, o passageiro por inércia tende a permanecer em repouso em relação ao solo terrestre. Como o ônibus vai para frente, a pessoa que não estava se segurando cai para trás no ônibus.



Agora, se o ônibus estivesse em movimento e de repente freasse, a pessoa cairia para frente. Graças à inércia, o passageiro exhibe, nesse caso, sua vontade de continuar em movimento em relação ao solo terrestre: o ônibus pára, o passageiro não.



Logo, o cinto de segurança nos automóveis tem a função de proteger o passageiro da inércia de seu movimento, no caso de uma freada brusca ou colisão.

3. Princípio da Inércia ou Primeira Lei de Newton

Sintetizando a idéia de inércia de Galileu, Newton enunciou sua primeira lei nestas palavras:

Todo corpo continua no estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme, a menos que seja obrigado a mudá-lo por forças a ele aplicadas.

(Tradução do Principia)

Notamos, no enunciado acima, a clara intenção de se definir **força** como o **agente que altera a velocidade do corpo**, vencendo assim a inércia (tendência natural de manter velocidade). Podemos concluir, então, que um corpo **livre de ação de forças**, ou com **resultante de forças nula**, conservará (por inércia) sua **velocidade constante**.

Ou seja:

Todo corpo em equilíbrio mantém, por inércia, sua velocidade constante.

Em resumo, podemos esquematizar o princípio da inércia assim:

$$\vec{F}_R = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = \text{constante} \begin{cases} \text{Repouso} \\ \text{ou MRU} \end{cases} \text{ (equilíbrio)}$$

4. Referencial Inercial

Sistema de referência inercial é aquele relativo ao qual um corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, quando nenhuma força (ou resultante) atua sobre ele. Isto é, um referencial inercial é aquele em que a primeira lei de Newton descreve corretamente o movimento de um corpo em equilíbrio.

Normalmente, adota-se como sistema de referência inercial todo sistema de referência em **repouso** ou em **translação retilínea e uniforme** em relação às **estrelas fixas**, que são estrelas que aparentam manter fixas suas posições no céu após muitos séculos de observações astronômicas.

Referencial inercial é todo aquele que torna válida a lei da inércia, ou seja, sistema de referência que não possui aceleração em relação às estrelas fixas.

Para a grande parte dos problemas de Dinâmica, envolvendo movimentos de curta duração na superfície terrestre, podemos considerar um sistema de referência fixo na superfície da Terra como inercial. Muito embora, a Terra não seja um perfeito referencial inercial por causa da sua rotação e translação curvilínea.

Quando um ônibus arranca, freia ou executa uma curva, ele possui aceleração em relação ao solo. Nessas situações, os passageiros não podem justificar seus comportamentos pela Dinâmica newtoniana, quando tomam o ônibus como referencial. Em tais casos, cada passageiro deve ter seu movimento analisado em relação ao solo terrestre (referencial inercial).



Exercícios Resolvidos

01. O filósofo grego Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.) afirmava aos seus discípulos:

“Para manter um corpo em movimento, é necessário a ação contínua de uma força sobre ele.”

Esta proposição é verdadeira ou falsa?

Resposta

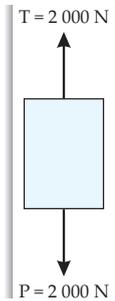
Falsa; se o corpo em movimento estiver livre da ação de forças (ou a resultante das forças atuantes for nula), ele se manterá em movimento retilíneo uniforme indefinidamente, de acordo com o Princípio da Inércia.

02. É correto afirmar que os planetas mantêm seus movimentos orbitais por inércia?

Resposta

Não, pois o único movimento mantido por inércia é o movimento retilíneo uniforme.

03. Um elevador de um prédio de apartamentos encontra-se, durante um certo tempo, sob a ação exclusiva de duas forças opostas: o peso e a tração do cabo, ambas de intensidade igual a 2 000 N.

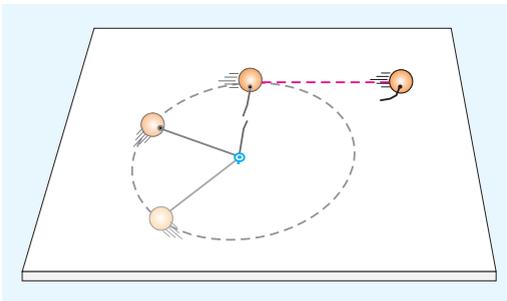


O elevador está parado?

Resposta

Como a resultante das forças atuantes é nula, o elevador pode se encontrar tanto em repouso (equilíbrio estático) quanto em movimento retilíneo uniforme (equilíbrio dinâmico).

04. Observe a figura a seguir.



Sobre uma mesa horizontal lisa, uma esfera deixa de executar seu movimento circular uniforme e sai tangente à curva, após o rompimento do fio que garantia sua circulação.

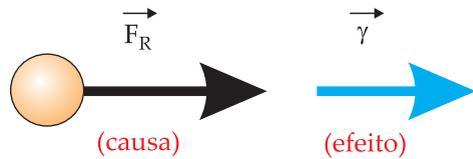
Qual o tipo de movimento que a esfera realiza após o rompimento do fio? Justifique.

Resposta

Após estar livre da força de tração do fio, que a obrigava a alterar a direção de sua velocidade, a esfera segue por inércia em movimento retilíneo uniforme.

5. Princípio Fundamental ou Segunda Lei de Newton

Quando uma força resultante (\vec{F}_R) está presente em uma partícula, esta adquire uma aceleração ($\vec{\gamma}$) na mesma direção e sentido da força, segundo um referencial inercial.



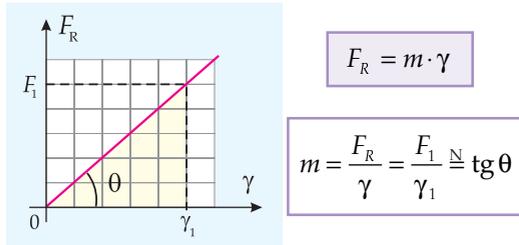
A relação, nesse caso, entre a causa (força resultante) e o efeito (aceleração adquirida) constitui o objetivo principal da segunda lei de Newton, cujo enunciado pode ser simplificado assim:

A resultante das forças que agem num corpo é igual ao produto de sua massa pela aceleração adquirida.

$$\vec{F}_R = m \cdot \vec{\gamma}$$

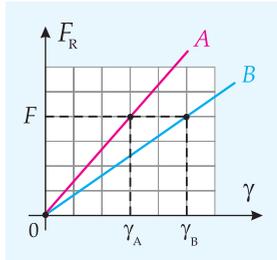
Isso significa que, sendo a massa do corpo constante, a força resultante e a aceleração produzida possuem intensidades diretamente proporcionais. Ou seja, quanto mais intensa for a força resultante, maior será a aceleração adquirida pelo corpo.

Logo, a relação entre as intensidades de \vec{F}_R e $\vec{\gamma}$ constitui uma função linear, onde a massa (constante) corresponde à declividade ($\text{tg}\theta$) da semi-reta do gráfico $F_R \times \gamma$.



6. Massa: Medida da Inércia

Os gráficos ao lado representam a relação força resultante x aceleração adquirida para dois corpos A e B de massas diferentes (gráficos com declividades diferentes).



Observe que, para um mesmo valor (F) de força resultante, a intensidade da aceleração adquirida pelo corpo A é menor que a adquirida por B, ou seja, o corpo A tende a variar menos a sua velocidade que B. Isso evidencia que o corpo A oferece maior resistência à alteração de sua velocidade, isto é, o corpo A possui **maior inércia**. A partir do gráfico acima, temos:

$$\left. \begin{aligned} m_A &= \frac{F}{\gamma_A} \\ m_B &= \frac{F}{\gamma_B} \end{aligned} \right\} \gamma_A < \gamma_B \Rightarrow m_A > m_B$$

Portanto, a **massa** de um corpo deve ser vista como uma propriedade da matéria que indica a resistência do corpo à alteração de sua velocidade.

7. Unidades de Medida

A unidade de massa no Sistema Internacional (SI) é o quilograma (kg), padrão definido por um cilindro de platina conservado no museu de Sèvres, em Paris.

Podemos definir a unidade de força **newton** (N) pela segunda lei de Newton, relacionando-a com as unidades internacionais de massa e aceleração. Observe:

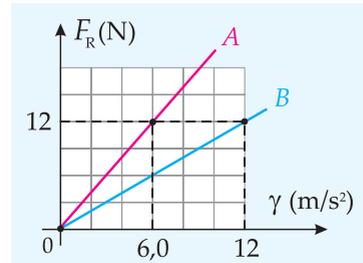
- unidade de massa $\rightarrow u(m) = \text{kg}$
- unidade de aceleração $\rightarrow u(\gamma) = \text{m/s}^2$
- $u(F) = u(m) \cdot u(\gamma) \rightarrow \boxed{N = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}$

Ou seja:

Um newton (1 N) é a intensidade de força que produziria, numa massa de um quilograma (1 kg), uma aceleração de módulo um metro por segundo, por segundo (1 m/s²).

Exercícios Resolvidos

01. O diagrama a seguir mostra a variação do módulo da aceleração (γ) de duas partículas A e B em função da intensidade da força resultante (F_R) sobre elas.



Calcule a massa de cada partícula.

Resolução

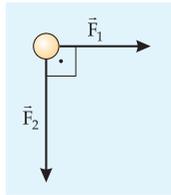
$$m = \frac{F_R}{\gamma}$$

$$m_A = \frac{12 \text{ N}}{6,0 \text{ m/s}^2} \Rightarrow m_A = 2,0 \text{ kg}$$

$$m_B = \frac{12 \text{ N}}{12 \text{ m/s}^2} \Rightarrow m_B = 1,0 \text{ kg}$$



02. O esquema ao lado mostra uma partícula de massa 2,0 kg sujeita à ação exclusiva de duas forças perpendiculares entre si, cujos módulos são: $F_1 = 6,0 \text{ N}$ e $F_2 = 8,0 \text{ N}$.



a) Qual o módulo da aceleração da partícula?

b) Orientando-se convenientemente tais forças, qual o módulo da maior aceleração que a resultante dessas forças poderia produzir na partícula?

Resolução

$$a) F_R = \sqrt{6^2 + 8^2}$$

$$F_R = 10 \text{ N}$$

$$F_R = m \cdot \gamma$$

$$10 = 2,0 \cdot \gamma$$

$$\gamma = 5,0 \text{ m/s}^2$$

b) Com tais forças, a maior aceleração que a partícula pode adquirir ocorre quando as forças se orientam na **mesma direção e sentido**, ou seja, quando a resultante das forças for máxima: $F_R = F_1 + F_2$.

Logo: $F_R = 6,0 \text{ N} + 8,0 \text{ N} = 14 \text{ N}$ (máxima)

$$F_{R_{\text{máx}}} = m \cdot \gamma_{\text{máx}}$$

$$14 = 2,0 \cdot \gamma_{\text{máx}} \Rightarrow \gamma_{\text{máx}} = 7,0 \text{ m/s}^2$$

8. Componentes da Força Resultante

Sabemos que a aceleração ($\vec{\gamma}$) de um móvel pode ser definida pela composição vetorial da aceleração tangencial (\vec{a}_t) com a aceleração centrípeta (\vec{a}_c), isto é: $\vec{\gamma} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$.

Substituindo-se essa relação na expressão da segunda lei de Newton, temos:

$$\vec{F}_R = m \cdot \vec{\gamma}$$

$$\vec{F}_R = m \cdot (\vec{a}_t + \vec{a}_c) \Rightarrow \boxed{\vec{F}_R = m \cdot \vec{a}_t + m \cdot \vec{a}_c}$$

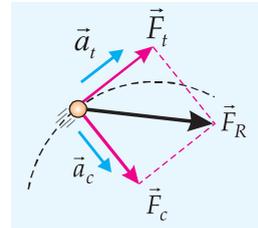
Ao produto $m \cdot \vec{a}_t$, denominamos **componente tangencial** (\vec{F}_t) da força resultante, e ao produto $m \cdot \vec{a}_c$, a **componente centrípeta** (\vec{F}_c) dessa força.

Isso significa que podemos aplicar o **Princípio Fundamental** em duas direções, separadamente: na direção **tangente** à trajetória (\vec{F}_t produz \vec{a}_t) e na direção **normal** à trajetória (\vec{F}_c produz \vec{a}_c). Ou seja:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_t + \vec{F}_c$$

$$\vec{F}_t = m \cdot \vec{a}_t$$

$$\vec{F}_c = m \cdot \vec{a}_c$$



9. Resultante Tangencial

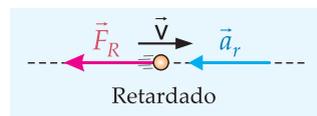
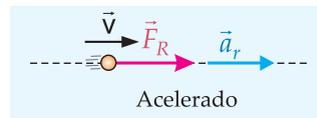
Nos movimentos retilíneos acelerados ou retardados, a força resultante é **tangencial** (mesma direção da velocidade), já que esses movimentos possuem apenas aceleração tangencial ($\vec{\gamma} = \vec{a}_t$). Ou seja:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_t \Rightarrow \boxed{\vec{F}_R = m \cdot \vec{a}_t}$$

onde $a_t = |a|$ (módulo da aceleração escalar).

No MRUV: $a_t = |a| = |\Delta v / \Delta t|$.

Quando o movimento é acelerado, a aceleração e a resultante tangenciais se orientam no mesmo sentido da velocidade do móvel; quando retardado, orientam-se em sentido oposto ao da velocidade do móvel.



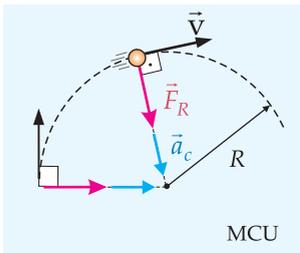
10. Resultante Centrípeta

Nos movimentos curvilíneos uniformes, a força resultante é centrípeta (perpendicular à velocidade), pois nesses movimentos há apenas aceleração centrípeta ($\vec{\gamma} = \vec{a}_c$). Ou seja:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_c \Rightarrow \boxed{\vec{F}_R = m \cdot \vec{a}_c}$$

onde $a_c = v^2/R$ (R : raio instantâneo da curva).

No MCU, os vetores força resultante e aceleração centrípeta mantêm-se perpendiculares à velocidade do móvel, ambos com sentido voltado para o centro da curva.



Exercícios Resolvidos

01. Um veículo de massa 1 200 kg freia bruscamente quando se movia a 90 km/h (ou seja, 25 m/s) numa pista horizontal. Devido ao travamento de suas rodas, nota-se que o carro desliza retilineamente por 62,5 m até parar. Admitindo-se que sua desaceleração seja constante, calcule a intensidade da força de atrito responsável pela sua frenagem.

Resolução

Usando-se a equação de Torricelli, vem:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta s$$

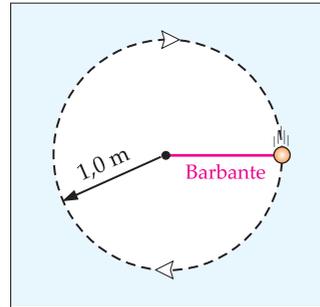
$$0^2 = 25^2 + 2 \cdot a \cdot (62,5) \Rightarrow \boxed{a = -5,0 \text{ m/s}^2}$$

Como o movimento é retilíneo retardado, a resultante das forças (atrito) é tangencial. Logo, pela segunda lei de Newton, temos:

$$F_R = m \cdot a_t \text{ (onde } a_t = |a|)$$

$$F_a = 1.200 \cdot 5 = 6.000 \text{ N} \Rightarrow \boxed{F_a = 6,0 \text{ kN}}$$

02. A figura a seguir mostra uma mesa horizontal lisa (vista de cima) sobre a qual uma pequena esfera de massa 0,50 kg, presa a um barbante horizontal, executa movimento uniforme numa trajetória circular de raio igual a 1,0 m.



a) Faça um esquema, desenhando numa posição qualquer da trajetória circular os vetores velocidade (\vec{v}), aceleração ($\vec{\gamma}$) e força resultante (\vec{F}_R) pertinentes à esfera.

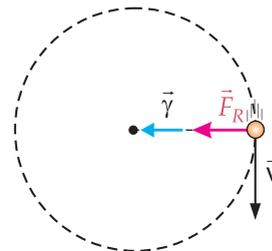
b) Determine a intensidade da força de tração que o barbante exerce na esfera, considerando que ela se mova a 2,0 m/s.

Resolução

a) \vec{v} : tangente à trajetória

$\vec{\gamma} = \vec{a}_c$: aceleração centrípeta

\vec{F}_R : resultante centrípeta



b) A força resultante centrípeta desse MCU é a força de tração do barbante. Logo, através da segunda lei de Newton, temos:

$$F_R = m \cdot a_c \text{ (onde } a_c = \frac{v^2}{R})$$

$$T = m \cdot \frac{v^2}{R} = 0,50 \cdot \frac{2,0^2}{1,0} \Rightarrow T = 2,0 \text{ N}$$

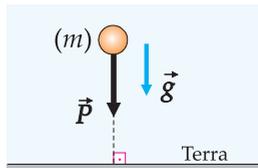


11. Força Peso

Denomina-se força peso (\vec{P}) a força de campo gravitacional que a Terra exerce sobre qualquer objeto colocado próximo à sua superfície. Ela tem direção vertical e sentido para baixo.

Quando a força peso é a única força presente em um corpo (numa queda livre, por exemplo), este adquire uma aceleração vertical (para baixo) denominada aceleração da gravidade (g). Logo, pela relação causa-efeito contida na segunda lei de Newton, podemos obter a intensidade P da força peso sobre um corpo de massa m , assim:

$$P = m \cdot g$$



Por facilidade de cálculo, é usual adotarmos o valor 10 m/s^2 para a intensidade da aceleração gravitacional (g) próximo da superfície da Terra. Assim, um corpo de massa $m \text{ kg}$ teria peso $P = m \cdot 10 \text{ N}$. Por exemplo, um corpo de massa $2,0 \text{ kg}$ pesa 20 N .

12. Massa e Peso

É importante não confundirmos os conceitos de massa e peso. A **massa** é uma grandeza **escalar** que representa a **medida quantitativa da inércia** de um corpo, sendo **quilograma (kg)** a sua unidade no SI. O **peso** é uma grandeza **vetorial** que representa a **força gravitacional** que a Terra exerce sobre um corpo, sendo **newton (N)** a sua unidade no SI.

No cotidiano, é comum observarmos uma pessoa conjugando o verbo “pesar” quando se refere ao ato de medir sua **massa** (em kg) através de uma **balança**. Esse erro conceitual, difundido há muito tempo, pode ser explicado por dois motivos:

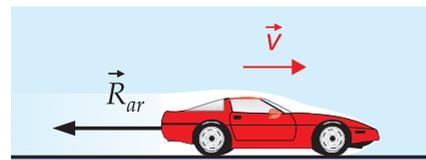
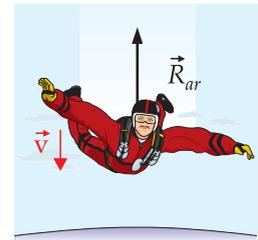
a) as **balanças comuns** avaliam a massa de uma pessoa através do peso aparente da pessoa ($m = P/g$), ou seja, normalmente são **dinamômetros** (medidores de força) adaptados como balança;

b) uma antiga unidade de força (hoje em desuso) denominada **quilograma-força (kgf)**, associava o valor numérico do peso de um corpo na Terra ao valor numérico de sua massa, ou seja, um corpo de massa **1 kg** pesava na Terra **1 kgf**. Dessa forma, uma pessoa de massa 60 kg teria peso de 60 kgf , fato que permitia, facilmente, a confusão verbal entre massa e peso.

Lembrando que a aceleração da gravidade é uma característica do astro, devemos salientar que o **peso** de um corpo **depende do local**, embora sua massa não. Isto é, ao transferirmos um objeto da Terra para a superfície de um outro astro (planeta ou Lua), o peso do objeto lá dependerá tanto de sua massa (constante) quanto da gravidade local (variável), ou seja: $P = m \cdot g_{\text{local}}$.

13. Resistência do Ar

Quando um corpo extenso se movimenta no ar (por exemplo, um paraquedista despenando, ou um carro numa estrada), este sofre a ação de uma força de oposição ao movimento denominada **resistência do ar**.



Para uma determinada faixa de valores da velocidade, essa força, com sentido oposto ao da velocidade do corpo, tem intensidade proporcional, aproximadamente, ao quadrado da velocidade do mesmo. Ou seja:

$$R_{\text{ar}} = k \cdot v^2$$

onde k é a constante de proporção, também conhecida como coeficiente aerodinâmico do corpo, sendo dependente do formato do corpo e da área de sua maior seção transversal (seção perpendicular ao movimento).

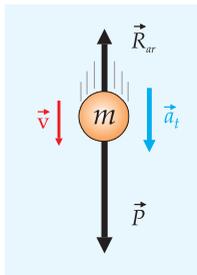
14. Velocidade Limite de Queda Vertical no Ar

Para um corpo extenso de massa m , solto em **queda livre** no vácuo (ausência de ar), sua **velocidade aumenta continuamente**, pois a única força que atua no corpo é o seu peso, que lhe provoca uma aceleração tangencial $a_t = g$, suposta **constante**. Mas, levando-se em conta a **resistência do ar**, sua **aceleração tangencial torna-se decrescente**, no decorrer da descida, até se **anular**, ou seja, a intensidade da **velocidade do corpo cresce até um valor limite**.

Podemos demonstrar isso através da segunda lei de Newton, Observe:

$$\begin{aligned} F_R &= m \cdot a_t \\ P - R_{AR} &= m \cdot a_t \\ m \cdot g - k \cdot v^2 &= m \cdot a_t \end{aligned}$$

$$a_t = g - \frac{k}{m} \cdot v^2 \quad (\text{se } v \text{ aumenta, } a_t \text{ diminui)}$$



Assim, a velocidade atinge um **limite** (valor máximo) quando a_t se **anula**, ou seja:

$$a_t = 0 \Rightarrow 0 = g - \frac{k}{m} \cdot v_{lim}^2 \Rightarrow v_{lim} = \sqrt{\frac{m \cdot g}{k}}$$

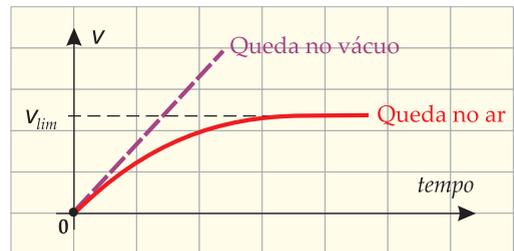
Em outras palavras, enquanto o peso do corpo for maior que a resistência do ar, teremos uma aceleração no mesmo sentido da velocidade, o que acarreta o seu aumento. Mas, aumentando-se a velocidade, aumenta a resistência do ar, e haverá um instante na queda em que teremos a resistência do ar com

a mesma intensidade do peso. A partir desse instante, o corpo fica em **equilíbrio dinâmico** (MRU), ou seja, sem aceleração ($a_T = 0$).

$$v_{lim} \Rightarrow R_{ar} = P \quad (\text{equilíbrio})$$

$$k \cdot v_{lim}^2 = m \cdot g \Rightarrow v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Observe o gráfico comparativo abaixo:



Observações

- Estamos, na análise acima, desprezando a força de empuxo do ar.
- Para corpos diminutos e com baixa velocidade de tráfego num fluido (líquido ou gás), a força de resistência do fluido é proporcional à velocidade, ou seja: $R = k \cdot v$.

Exercícios Resolvidos

01. Uma pedra lunar de massa 2,0 kg, encontrada por astronautas americanos do projeto *Apolo*, foi transportada para a Terra. Admitindo-se a aceleração da gravidade terrestre com intensidade $g_T = 10 \text{ m/s}^2$, e a lunar, com intensidade $g_L = 1,6 \text{ m/s}^2$, explique o que ocorreu com a **massa** e o **peso** da pedra, devido a essa mudança de lugar.

Resolução

a) A massa da pedra **não** depende do local. Assim, ao chegar na Terra, a sua massa continua a **mesma** (2,0 kg).

b) O peso da pedra, aqui na Terra, é maior (a aceleração da gravidade terrestre é mais intensa). Isto é:

$$P_L = m \cdot g_L = 2,0 \cdot 1,6 \Rightarrow P_L = 3,2 \text{ N}$$

$$P_T = m \cdot g_T = 2,0 \cdot 10 \Rightarrow P_T = 20 \text{ N}$$

Nota-se que o peso da pedra aqui na Terra é mais de seis vezes o valor de seu peso lá na Lua. Ou seja, o peso da pedra **aumentou**.



02. Um carro acelera numa estrada retilínea e horizontal, aumentando sua velocidade de 60 km/h para 90 km/h. Nesse evento, qual o aumento percentual (%) ocorrido na intensidade da força de resistência que o ar exerce sobre o carro?

Resolução

A força de resistência do ar é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade do carro, ou seja:

$$R_{ar} = k \cdot v^2$$

Logo, a razão entre as intensidades da força de resistência posterior (R_2) e anterior (R_1) é dada por:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{k \cdot v_2^2}{k \cdot v_1^2} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \left(\frac{90}{60}\right)^2 = 2,25$$

Portanto, houve um aumento de 125 % na intensidade da força de resistência do ar sobre o carro.

03. Uma bola de massa 0,50 kg é solta de uma grande altura e cai, verticalmente, sob a ação exclusiva da força peso e da força de resistência do ar. Admitindo-se $g = 10 \text{ m/s}^2$ e sabendo-se que a resistência do ar sobre a bola tem intensidade (em newtons) $R = 0,20 \cdot v^2$, onde v é a velocidade (em m/s) de queda da bola, calcule:

- a) a intensidade do peso da bola;
- b) a velocidade limite de queda da bola.

Resolução

a) $P = m \cdot g = 0,50 \cdot 10 \Rightarrow P = 5,0 \text{ N}$

b) $v_{lim} \Rightarrow R_{ar} = P$ (equilíbrio)

$$0,20 \cdot v_{lim}^2 = 5,0$$

$$v_{lim}^2 = 25 \Rightarrow v_{lim} = 5,0 \text{ m/s}$$

15. Ação e Reação

Sabemos que força é fruto da interação, ou seja, uma força atuante em um corpo representa a ação que este corpo recebe de um outro corpo.

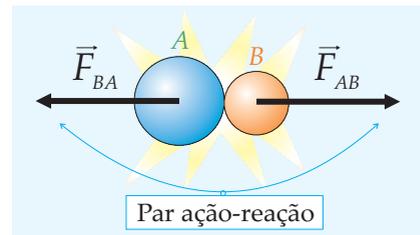
Isaac Newton percebeu que toda ação estava associada a uma reação, de forma que, numa interação, enquanto o primeiro corpo exerce força sobre o outro, também o segundo exerce força sobre o primeiro. Assim, em toda interação teríamos o nascimento de um par de forças: o par **ação-reação**.

16. Lei da Ação e Reação

O Princípio da Ação e Reação constitui a Terceira Lei de Newton e pode ser enunciado assim:

Se um corpo A aplicar uma força sobre um corpo B, aquele receberá deste uma força de mesma intensidade, mesma direção e sentido oposto à força que aplicou em B.

Podemos observar essa troca de forças entre dois corpos, por exemplo, na colisão abaixo.



A força que A exerce em B (\vec{F}_{AB}) e a correspondente força que B exerce em A (\vec{F}_{BA}) constituem o par **ação-reação** dessa interação de contato (colisão). Essas forças possuem **mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos**. Ou seja:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Ao aplicarmos a terceira lei de Newton, não podemos esquecer que as forças de ação e reação:

- a) estão associadas a uma única interação, ou seja, correspondem às forças trocadas entre apenas dois corpos;
- b) têm sempre a mesma natureza (ambas de contato ou ambas de campo), logo, possuem o mesmo nome (o nome da interação);
- c) atuam sempre em corpos diferentes, logo, não se equilibram.

17. Exemplos de Interações

Observe a seguir os pares **ação-reação** de algumas básicas interações de campo e de contato.

17.1. Interações de Campo

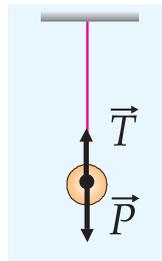
Par de forças gravitacionais	Par de forças elétricas	Par de forças magnéticas

17.2. Interações de Contato

Par de forças de tração	Par de forças normais	Par de forças de atrito

Exercícios Resolvidos

01. Uma bola de peso igual a 1 N encontra-se em repouso, suspensa através de um fio ao teto de uma sala. Considere que ela esteja sujeita a ação exclusiva de seu peso (\vec{P}) e da força de tração do fio (\vec{T}), como ilustra o esquema ao lado.



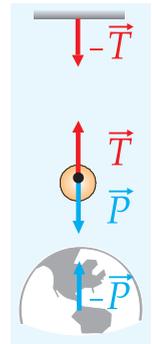
- Qual o módulo da força de tração?
- As forças \vec{P} e \vec{T} constituem um par ação-reação?

Resolução

a) Pelo fato da bola estar em equilíbrio estático (repouso), temos:

$$T = P \Rightarrow T = 1 \text{ N}$$

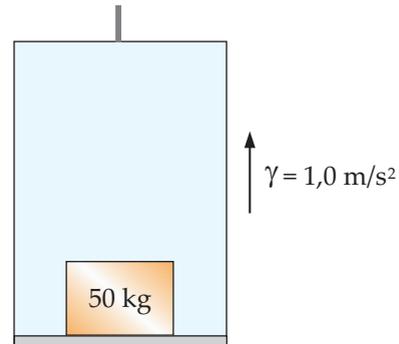
b) Embora \vec{P} e \vec{T} , atuantes na bola, tenham a mesma intensidade (1 N), a mesma direção (vertical) e sentido opostos, as forças peso e tração **não** constituem um par ação-reação, pelo seguinte motivo fundamental: as forças de ação e reação **nunca atuam no mesmo corpo**. Outro motivo: ação e reação devem ser ambas de campo ou ambas de contato, o que não ocorre com as forças peso (de campo) e tração (de contato).



Observação

Na situação apresentada, a bola sofre duas interações: uma de campo gravitacional com a Terra e uma de contato com o fio. O esquema ao lado ilustra, simplificado, os pares ação-reação dessas duas interações.

02. A figura a seguir mostra uma caixa de massa 50 kg sendo erguida verticalmente, com aceleração ascendente de $1,0 \text{ m/s}^2$, por um elevador de um prédio. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.



- Quais as intensidades das forças atuantes na caixa durante sua elevação?
- Qual a intensidade da força exercida pela caixa sobre o piso do elevador?



Resolução

a) As forças que atuam na caixa são: o peso e a força normal, devido ao contato com o piso do elevador. Primeiramente, calculemos a intensidade do peso da caixa:

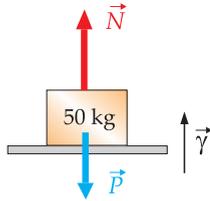
$$P = m \cdot g = 50 \cdot 10 \Rightarrow P = 500 \text{ N} = 0,50 \text{ kN}$$

Aplicando-se a Segunda Lei de Newton na caixa, vem:

$$N - P = m \cdot \gamma$$

$$N - 500 = 50 \cdot 1,0$$

$$N = 550 \text{ N} = 0,55 \text{ kN}$$

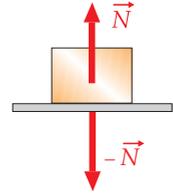


b) Pela Terceira Lei de Newton, a caixa interage com o piso do elevador trocando forças normais entre si. Ou seja, a força que a caixa exerce no piso do elevador constitui a reação à força normal recebida por ela.

Logo:

$$|-\vec{N}| = |\vec{N}| = 0,55 \text{ kN}$$

\vec{N} : ação do piso sobre a caixa.
 $-\vec{N}$: reação da caixa sobre o piso.

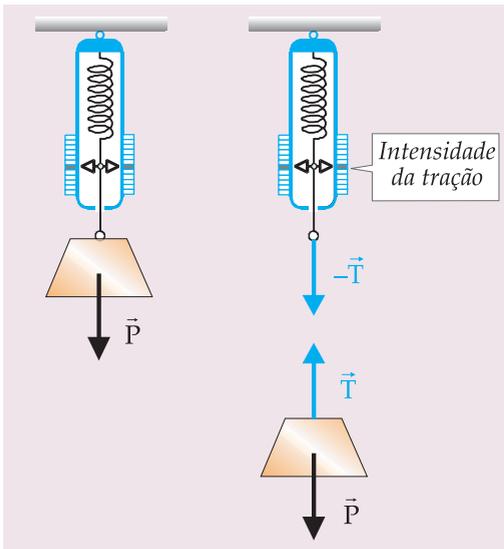


Capítulo 03. Aplicações das Leis de Newton

1. Dinamômetro de Tração

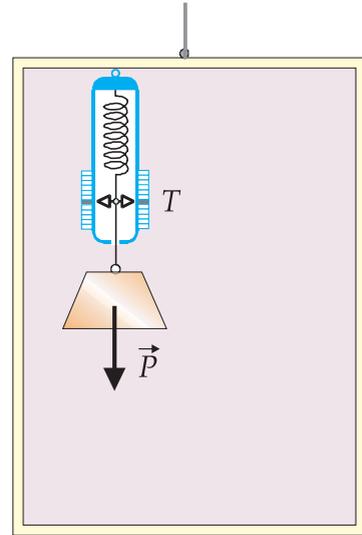
Denominamos **dinamômetro de tração** o instrumento utilizado para medir intensidade de forças de **tração** (puxão). Essencialmente, o dinamômetro é constituído por um corpo elástico (usualmente molas) que é deformado pela ação da força de tração que se pretende medir.

Quando um corpo é suspenso através de um dinamômetro, este procura indicar a intensidade da força de tração trocada entre ele e o corpo suspenso, de acordo com a *lei da Ação e Reação*.

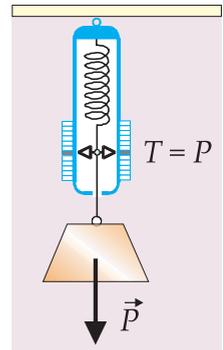


Dependendo do estado cinemático do corpo suspenso, o dinamômetro pode indicar uma intensidade de tração **maior**, **menor** ou **igual** à intensidade do **peso** (P) do corpo.

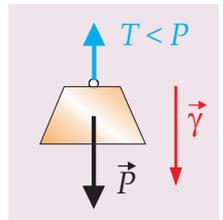
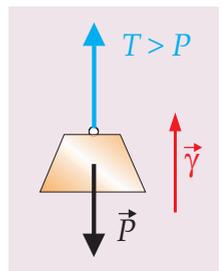
Podemos observar tais possíveis indicações ao colocarmos esse conjunto no interior de um elevador vertical, como indica a figura a seguir.



Se o elevador estiver em **repouso** ou em **movimento uniforme** (subindo ou descendo), o corpo suspenso, acompanhando esses estados do elevador, estará em **equilíbrio**. Nesses casos, a **leitura** no dinamômetro (valor da tração) será **igual ao valor do peso** do corpo suspenso.



Se o elevador possuir **aceleração vertical** ($\vec{\gamma}$), a indicação do dinamômetro poderá ser **maior** que o valor do **peso** do corpo (no caso da aceleração ser **ascendente**) ou **menor** que o valor do **peso** do corpo (quando a aceleração for **descendente**), de acordo com a segunda lei de Newton. Isso ocorre independentemente do sentido de movimento do elevador.

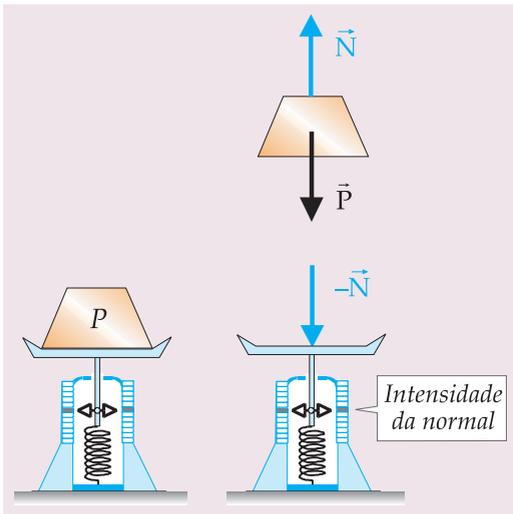




2. Dinamômetro de Compressão

Denominamos **dinamômetro de compressão** o instrumento utilizado para medir intensidade de força **normal** (compressão). Nesse caso, o elemento elástico (mola) do aparelho será comprimido pela força normal que se pretende medir.

Quando um corpo é apoiado sobre tal dinamômetro, este procura indicar a intensidade da **força normal** trocada entre ele e o corpo apoiado (ação e reação).



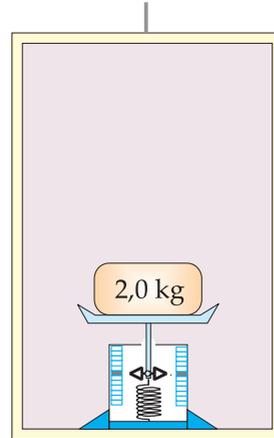
Analogamente ao que ocorreu no estudo anterior, a leitura deste dinamômetro (valor da normal) pode ser **maior**, **menor** ou igual ao valor do **peso** do corpo apoiado. Isto dependerá do estado cinemático do corpo.

Observações

- A leitura dos dinamômetros (valor da força de tração ou da força normal) é, eventualmente, denominada **peso aparente** do corpo que se encontra suspenso ou apoiado neles.
- Vulgarmente, tais dinamômetros são conhecidos como **balanças de mola**, já que podem ter suas escalas mudadas para informar a massa de corpos (em equilíbrio).

Exercícios Resolvidos

01. Num local onde $g = 10 \text{ m/s}^2$, um pacote de massa $2,0 \text{ kg}$ encontra-se apoiado sobre um dinamômetro (graduado em newtons), no interior de um elevador, como mostra a figura.



Determine a indicação do dinamômetro nos seguintes casos:

- o elevador está em equilíbrio;
- o elevador despenca em queda livre;
- o elevador sobe acelerado, com aceleração de $2,0 \text{ m/s}^2$.

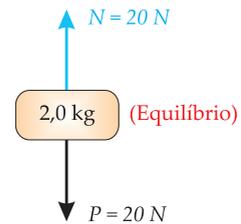
Resolução

A indicação do dinamômetro corresponde à intensidade da força **normal** trocada entre ele e o pacote.

a) Com o sistema em equilíbrio (repouso ou MRU), a força normal tem a mesma intensidade do peso do pacote. Ou seja:

$$\begin{aligned} N &= P \\ N &= m \cdot g \\ N &= 2,0 \cdot 10 \end{aligned}$$

$$N = 20 \text{ N}$$



b) Com o sistema em queda livre ($\vec{\gamma} = \vec{g}$), a única força atuante no pacote é o seu peso. Logo, a indicação do dinamômetro será **nula** (pois não existe força normal). Observa-se isso, quando aplicamos a Segunda Lei de Newton no pacote:

$$\vec{F}_R = m \cdot \vec{\gamma} = m \cdot \vec{g} = \vec{P} \Rightarrow N = 0$$

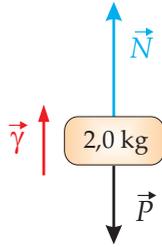
c) Aplicando-se o Princípio Fundamental da Dinâmica no pacote, temos:

$$F_R = m \cdot \gamma$$

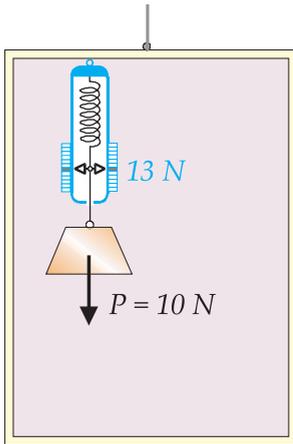
$$N - P = m \cdot \gamma$$

$$N - 20 = 2,0 \cdot 2,0$$

$$N = 24 \text{ N}$$



02. Um dinamômetro está preso ao teto de um elevador, num local onde a aceleração da gravidade vale 10 m/s^2 . Suspenso ao dinamômetro, encontra-se um bloco de peso 10 N , embora o aparelho indique um peso aparente de 13 N .



- a) Qual a aceleração do elevador?
 b) O elevador está subindo ou descendo?

Resolução

a) A indicação do dinamômetro corresponde ao valor da força de tração trocada entre ele e o bloco. Logo, aplicando-se o Princípio Fundamental da Dinâmica no pacote, vem:

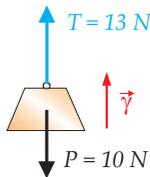
$$F_R = m \cdot \gamma$$

$$T - P = \frac{P}{g} \cdot \gamma$$

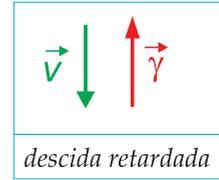
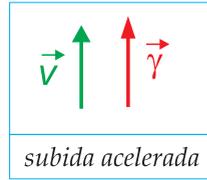
$$13 - 10 = \frac{10}{10} \cdot \gamma$$

$$\gamma = 3,0 \text{ m/s}^2$$

 (vertical para cima)



b) Como a aceleração do elevador é orientada para cima, o elevador pode estar **subindo** em movimento acelerado ou **descendo** em movimento retardado.



3. Sistemas de Blocos

Analisaremos, através das leis de Newton, o movimento retilíneo de sistemas de blocos sobre superfícies horizontais isentas de atrito.

O método de análise desses sistemas consiste, basicamente, nas seguintes regras:

a) procuramos indicar em cada bloco todas as forças atuantes, salientando que as forças trocadas internamente, entre dois blocos do sistema, constitui um par ação-reação, ou seja, possuem mesmas intensidades;

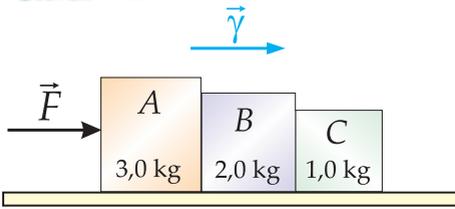
b) no caso de deslizamentos em planos horizontais, as forças verticais se neutralizam (equilíbrio). Logo, se houver resultante de forças em cada bloco do sistema, esta será uma força horizontal (o que explica a existência de uma aceleração horizontal);

c) apliquemos a segunda lei de Newton em cada bloco, lembrando que cada um, devido ao movimento em conjunto, possui a mesma aceleração. Em seguida, resolvemos o sistema de equações obtidas.

4. Exemplos de Sistemas

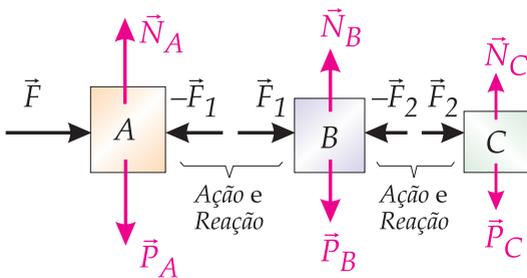
4.1. Blocos Comprimidos

Consideremos um sistema formado por três blocos (A, B e C), de massas $m_A = 3,0 \text{ kg}$, $m_B = 2,0 \text{ kg}$ e $m_C = 1,0 \text{ kg}$, encostados entre si e apoiados sobre uma superfície horizontal perfeitamente lisa. Empurrando-se o conjunto através de uma força horizontal $F = 12 \text{ N}$, o sistema adquire uma aceleração horizontal (γ), como ilustra a figura a seguir.



Determinemos, através do método de análise anteriormente exposto, as intensidades da aceleração do sistema e das forças internas de compressão trocadas pelos blocos.

a) Indicação das **forças atuantes**:



b) Observando o equilíbrio das forças verticais, identifiquemos a **intensidade da resultante horizontal** em cada bloco:

- Bloco A $\rightarrow F_R = F - F_1$
- Bloco B $\rightarrow F_R = F_1 - F_2$
- Bloco C $\rightarrow F_R = F_2$

c) Apliquemos a **Segunda Lei de Newton** ($F_R = m \cdot \gamma$) em cada bloco e, a seguir, somemos o sistema de equações.

- Bloco A $\rightarrow F - F_1 = m_A \cdot \gamma$
- Bloco B $\rightarrow F_1 - F_2 = m_B \cdot \gamma$
- Bloco C $\rightarrow F_2 = m_C \cdot \gamma$

$$F = (m_A + m_B + m_C) \cdot \gamma \quad (+)$$

Logo,
$$\gamma = \frac{F}{m_A + m_B + m_C}$$

Substituindo os valores:

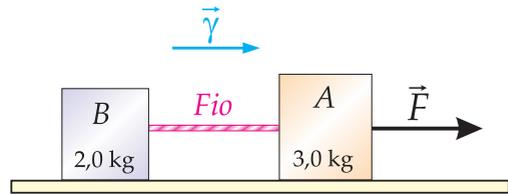
$$\gamma = \frac{12}{3,0 + 2,0 + 1,0} \Rightarrow \gamma = 2,0 \text{ m/s}^2$$

d) Retornemos às equações originais, para que possamos obter as intensidades das forças de compressão trocadas entre os blocos.

- Bloco A: $F - F_1 = m_A \cdot \gamma$
 $12 - F_1 = 3,0 \cdot 2,0 \Rightarrow F_1 = 6,0 \text{ N}$
- Bloco C: $F_2 = m_C \cdot \gamma$
 $F_2 = 1,0 \cdot 2,0 \Rightarrow F_2 = 2,0 \text{ N}$

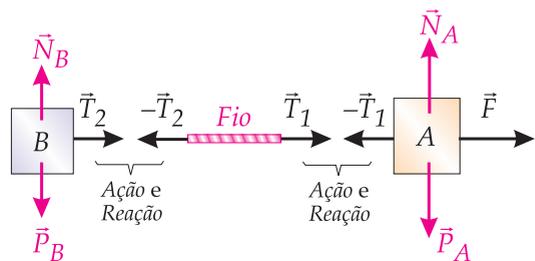
4.2. Blocos Tracionados

A figura a seguir mostra dois blocos A e B de massas iguais a 3,0 kg e 2,0 kg, respectivamente, apoiados numa superfície horizontal isenta de atritos. O fio que liga A a B é ideal, isto é, de massa desprezível e inextensível. A força horizontal \vec{F} , que puxa o sistema, tem intensidade igual a 20 N.



Vamos obter, através do método de análise já exposto, as intensidades da aceleração do sistema e das forças internas de tração trocadas pelos elementos do sistema.

a) Indicação das **forças atuantes**:



b) Observando o equilíbrio das forças verticais, identifiquemos a **intensidade da resultante horizontal** em cada bloco:

- Bloco A $\rightarrow F_R = F - T_1$
- Fio ideal $\rightarrow F_R = T_1 - T_2$
- Bloco B $\rightarrow F_R = T_2$

c) Apliquemos a **Segunda Lei de Newton** ($F_R = m \cdot \gamma$) em cada elemento:

- Bloco A $\rightarrow F - T_1 = m_A \cdot \gamma$
- Fio ideal $\rightarrow T_1 - T_2 = m_F \cdot \gamma$
- Bloco B $\rightarrow T_2 = m_B \cdot \gamma$

Como o fio é ideal ($m_F \approx 0$), $T_1 - T_2 = 0$.

Ou seja: $T_1 = T_2 = T$

Devido a isso, podemos reescrever as equações de A e B assim:

- Bloco A $\rightarrow F - T = m_A \cdot \gamma$
- Bloco B $\rightarrow T = m_B \cdot \gamma$

Somando-se as expressões acima, vem:

$$F = (m_A + m_B) \cdot \gamma$$

Logo,
$$\gamma = \frac{F}{m_A + m_B}$$

Substituindo os valores:

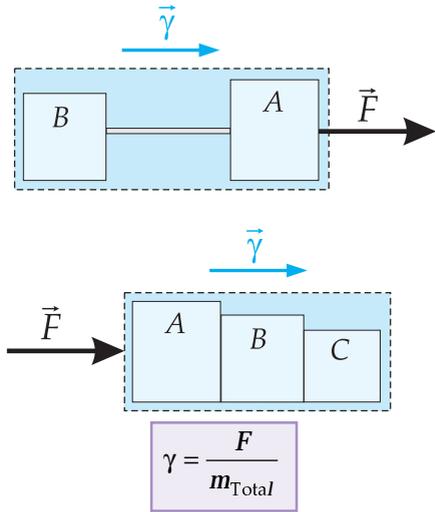
$$\gamma = \frac{20}{3,0 + 2,0} \Rightarrow \gamma = 4,0 \text{ m/s}^2$$

d) Retornemos às equações originais, para que possamos obter a intensidade da força de tração que o fio exerce nos blocos.

- Bloco A: $F - T = m_A \cdot \gamma$
 $20 - T = 3,0 \cdot 4,0 \Rightarrow T = 8,0 \text{ N}$
- Bloco B: $T = m_B \cdot \gamma$
 $F_2 = 2,0 \cdot 4,0 \Rightarrow T = 8,0 \text{ N}$

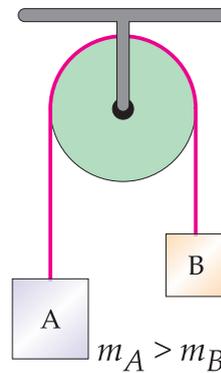
Observação final

Nos dois exemplos de sistemas apresentados, um cálculo rápido da aceleração pode ser feito considerando o conjunto de blocos como sendo um único corpo. Nessas condições, a força externa \vec{F} passa a ser a força resultante em tais sistemas, ou seja, podemos descartar as forças internas de tração ou compressão trocadas entre os elementos.

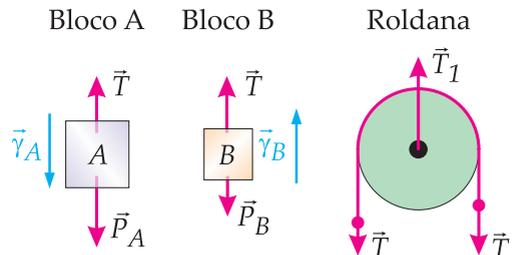


5. Máquina de Atwood

A figura abaixo representa a montagem realizada pelo físico inglês Atwood, no século XVIII, para estudar corpos em queda.



Supondo que a roldana apresente massa desprezível em relação às demais do sistema, temos os seguintes esquemas de forças atuantes, após o sistema ser liberado:





Como o peso do bloco A é maior que o do bloco B , o bloco A desce em movimento acelerado e o bloco B sobe em movimento acelerado, tal que $\gamma_A = \gamma_B = \gamma$. Assim, temos:

- Bloco $A \rightarrow F_{R(A)} = P_A - T = m_A \cdot \gamma$
- Bloco $B \rightarrow F_{R(B)} = T - P_B = m_B \cdot \gamma$

Somando-se as duas equações acima, obtemos:

$$P_A - P_B = (m_A + m_B) \cdot \gamma$$

$$(m_A - m_B) \cdot g = (m_A + m_B) \cdot \gamma$$

$$\gamma = \frac{(m_A - m_B) \cdot g}{m_A + m_B}$$

Após a determinação da aceleração dos blocos, podemos determinar o valor da tração no fio que os une, por meio da relação:

$$T = m_A (g - \gamma) \quad \text{ou} \quad T = m_B (g + \gamma)$$

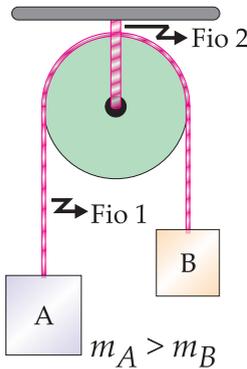
conforme utilizemos a equação da força resultante dos blocos A ou B .

Finalmente, pelo estado de equilíbrio da roldana (de peso desprezível), podemos concluir que o valor da tração no fio que a segura (T_1) é o dobro da tração T .

$$T_1 = 2 \cdot T$$

Aplicação numérica

Na figura abaixo, determinar as acelerações de cada um dos blocos A e B , de massas $6,0 \text{ kg}$ e $4,0 \text{ kg}$, respectivamente, e as trações nos fios 1 e 2. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Resolução

De acordo com a teoria exposta, podemos escrever:

$$\gamma = \frac{(m_A - m_B) \cdot g}{m_A + m_B}$$

$$\gamma = \frac{(6,0 - 4,0) \cdot 10}{6,0 + 4,0} \Rightarrow \gamma = 2,0 \text{ m/s}^2$$

A tração no fio 1 é dada por: $T_1 = m_A \cdot (g - \gamma)$

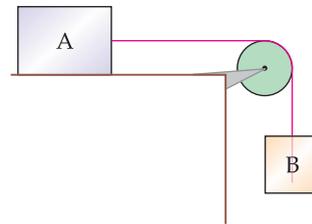
$$T_1 = 6,0 \cdot (10 - 2,0) \Rightarrow T_1 = 48 \text{ N}$$

A tração no fio 2 é dada por:

$$T_2 = 2 \cdot T_1 \Rightarrow T_2 = 96 \text{ N}$$

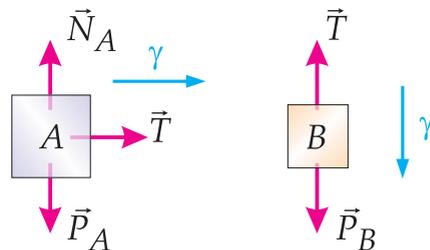
6. Sistema de Blocos Horizontal-Vertical

A figura abaixo apresenta um bloco A apoiado numa superfície horizontal perfeitamente lisa e ligado, através de um fio, a um bloco B , que se encontra dependurado.



Devido à inexistência de atrito entre o bloco A e o plano horizontal, podemos afirmar que, qualquer que seja a massa do bloco B , os blocos entrarão em movimento acelerado, sendo a aceleração de módulo igual para os dois blocos.

As figuras abaixo apresentam os diagramas das forças atuantes nos dois blocos:



e, de acordo com as figuras acima, as equações para os dois blocos são as seguintes:

- Bloco A $\rightarrow F_{R(A)} = T = m_A \cdot \gamma$
- Bloco B $\rightarrow F_{R(B)} = P_B - T = m_B \cdot \gamma$

Somando as duas equações correspondentes às forças resultantes, temos:

$$P_B = m_A \cdot \gamma + m_B \cdot \gamma$$

$$m_B \cdot g = (m_A + m_B) \cdot \gamma \Rightarrow \gamma = \frac{m_B \cdot g}{m_A + m_B}$$

A tração no fio que une os dois blocos é dada por:

$$T = m_A \cdot \gamma$$

Como exemplo numérico, consideremos $m_A = 8,0 \text{ kg}$, $m_B = 2,0 \text{ kg}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$. Nestas condições, temos:

a) $\gamma = \frac{m_B \cdot g}{m_A + m_B}$

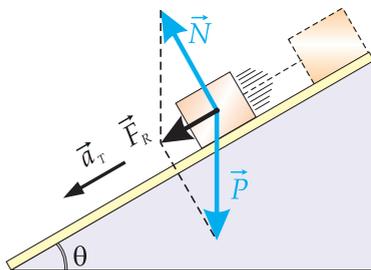
$$\gamma = \frac{2,0 \cdot 10}{8,0 + 2,0} \Rightarrow \gamma = 2,0 \text{ m/s}^2$$

b) $T = m_A \cdot \gamma$

$$T = 8,0 \cdot 2,0 \Rightarrow T = 16 \text{ N}$$

7. Plano Inclinado

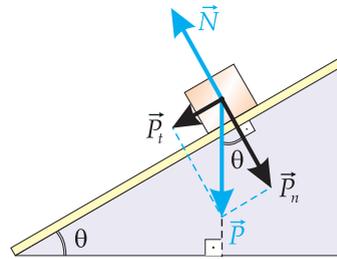
Quando soltamos um bloco sobre um plano inclinado liso, notamos que este entra em movimento, descendo a rampa de forma acelerada. Isso ocorre devido às forças atuantes no bloco (peso e normal) produzirem uma força resultante tangencial ao plano, como ilustra a figura abaixo.



8. Componentes do Peso

Para simplificar o estudo de um deslizamento ao longo de um plano inclinado, é usual decompor a força peso em duas parcelas:

- I. **Componente tangencial** ao plano (\vec{P}_t), que induz o bloco a descer a rampa;
- II. **Componente normal** ao plano (\vec{P}_n), responsável por comprimir o bloco contra a rampa.



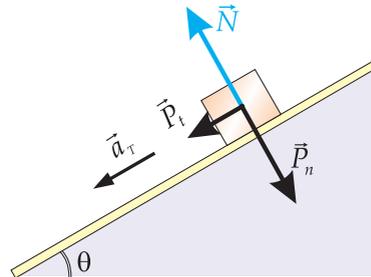
Por geometria, nota-se que o ângulo entre a força peso e sua componente normal (em destaque na figura anterior) é igual ao ângulo de inclinação do plano (θ) com a horizontal.

A partir disso, podemos exprimir as intensidades das componentes do peso do bloco assim:

$$P_t = P \cdot \text{sen } \theta$$

$$P_n = P \cdot \text{cos } \theta$$

Observando, agora, o deslizamento do bloco na rampa lisa, sob a ação das componentes de seu peso e da força normal, concluímos que a força normal do plano (\vec{N}) tem o papel de neutralizar a ação de \vec{P}_n , enquanto \vec{P}_t corresponde à força resultante, responsável pela aceleração do bloco.



$$N = P_n \Rightarrow N = P \cdot \text{cos } \theta$$

$$F_R = P_t \Rightarrow F_R = P \cdot \text{sen } \theta$$



Se utilizarmos a 2ª lei de Newton, poderemos obter a intensidade da aceleração tangencial (a_t) de deslizamento do bloco sobre a rampa lisa.

$$F_R = m \cdot a_t$$

$$P \cdot \text{sen } \theta = m \cdot a_t$$

$$mg \cdot \text{sen } \theta = m \cdot a_t \Rightarrow a_t = g \cdot \text{sen } \theta$$

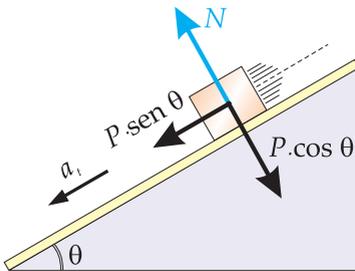
Observe que tal aceleração **independe da massa** do bloco (fenômeno análogo à queda livre vertical).

Exercícios Resolvidos

01. Um bloco de peso 10 N desliza, a partir do repouso, quando solto sobre um plano inclinado de θ com a horizontal, tal que $\text{sen } \theta = 0,60$ e $\text{cos } \theta = 0,80$. Despreze qualquer atrito e adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- Qual a intensidade da força normal que o plano exerce sobre o bloco?
- Qual o módulo da aceleração de deslizamento do bloco?
- Quanto tempo o bloco leva para deslizar os primeiros 3,0 m de rampa?

Resolução



a) $N = P \cdot \text{cos } \theta$

$$N = 10 \cdot 0,80 \Rightarrow N = 8,0 \text{ N}$$

b) Pela 2ª lei de Newton, temos:

$$P \cdot \text{sen } \theta = m \cdot a_t$$

$$mg \cdot \text{sen } \theta = m \cdot a_t$$

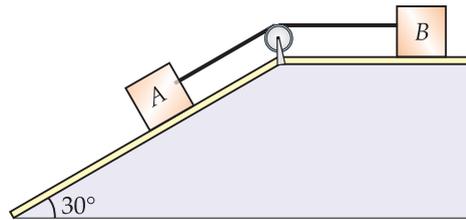
$$a_t = g \cdot \text{sen } \theta = 10 \cdot 0,60 \Rightarrow a_t = 6,0 \text{ m/s}^2$$

c) Considerando a aceleração escalar desse MUV com valor $a = a_t = 6,0 \text{ m/s}^2$, vem:

$$\Delta s = \frac{a}{2} \cdot t^2$$

$$3,0 = \frac{6,0}{2} \cdot t^2 \Rightarrow t = 1,0 \text{ s}$$

02. Um bloco A de massa 2,0 kg, que desliza sem atrito sobre um plano inclinado de 30° com a horizontal, está ligado através de um fio, que passa por uma polia, a um bloco B de mesma massa, que desliza sobre um plano horizontal liso.



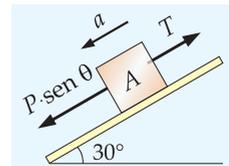
Sendo 10 m/s^2 o módulo da aceleração da gravidade local e considerando ideais a polia e o fio, pede-se:

- o módulo da aceleração do sistema;
- o módulo da força de tração no fio.

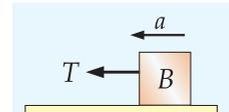
Resolução

a) Aplicamos a 2ª lei de Newton nos blocos.

- No bloco A:
 $P_A \cdot \text{sen } 30^\circ - T = m_A \cdot a$
 $20 \cdot 0,5 - T = 2 \cdot a$
 $10 - T = 2 \cdot a$



- No bloco B:
 $T = m_B \cdot a$
 $T = 2 \cdot a$



Resolvendo o sistema de equações, por substituição, temos:

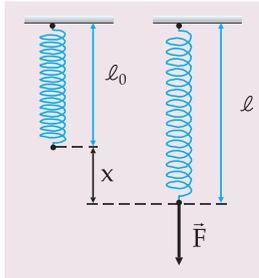
$$10 - (2 \cdot a) = 2 \cdot a$$

$$10 = 4 \cdot a \Rightarrow a = 2,5 \text{ m/s}^2$$

b) $T = 2 \cdot a$
 $T = 2 \cdot 2,5 \Rightarrow T = 5,0 \text{ N}$

9. Lei de Hooke

Consideremos uma mola vertical presa em sua extremidade superior, conforme mostra a figura ao lado. Ao aplicarmos uma força de intensidade F em sua extremidade



livre, essa mola sofrerá uma deformação x , que representa a variação ocorrida em seu comprimento ($x = l - l_0$).

Essa deformação é denominada **elástica** quando, retirada a força \vec{F} , a mola retorna ao seu comprimento original (l_0).

Robert Hooke (1635-1703), cientista inglês, verificou experimentalmente que, em regime de deformações elásticas, a intensidade da força aplicada à mola é diretamente proporcional à deformação produzida.

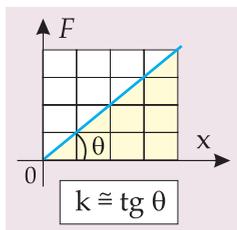
Isto é, se duplicarmos a intensidade da força aplicada à mola, sua deformação dobrará, e assim por diante enquanto a deformação for elástica.

Podemos sintetizar a lei de Hooke pela seguinte expressão:

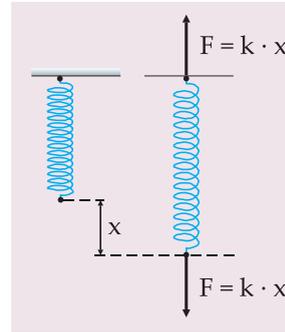
$$F = k \cdot x$$

onde k é uma constante de proporcionalidade característica da mola, chamada **constante elástica** da mola. Sua unidade no SI é newton por metro (N/m).

Podemos obter a constante elástica (k) de uma mola elástica através da declividade ($\text{tg } \theta$) da reta de seu gráfico *força x deformação*, como indicado ao lado.



Convém lembrar que, no processo de deformação, a mola sempre estará sujeita a ação de duas forças (uma em cada extremidade), sendo de mesma intensidade ($k \cdot x$) quando sua massa for desprezível (mola ideal).



10. Força Elástica

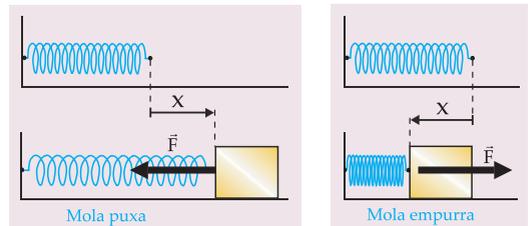
Quando um corpo está preso a uma mola deformada, a força de contato que a mola exerce nele chama-se **força elástica**.

Pelo princípio da ação-reação, as forças trocadas entre o corpo e a mola são de mesma intensidade. Logo, a intensidade da força elástica será dada, de acordo com a lei de Hooke, por:

$$F = k \cdot x$$

sendo k a constante elástica da mola e x sua deformação instantânea.

A força elástica sobre um corpo pode estar orientada no sentido de puxar (mola esticada) ou de empurrar (mola comprimida).

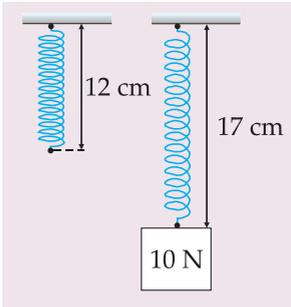


Portanto: $\vec{F} = -k \cdot \vec{x}$



Exercícios Resolvidos

01. A mola ideal da figura varia seu comprimento de 12 cm para 17 cm quando penduramos em sua extremidade um corpo A (em repouso) de peso 10 N.



- a) Qual a constante elástica da mola, em N/m ?
- b) Qual o comprimento dessa mola, quando ela sustentar em equilíbrio um corpo B de peso 20 N ?

Resolução

a) A deformação ocorrida na mola vale:

$$x = \ell - \ell_0 = 17 - 12 = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$$

Pelo fato do bloco A estar em equilíbrio, vem:

$$F = P$$

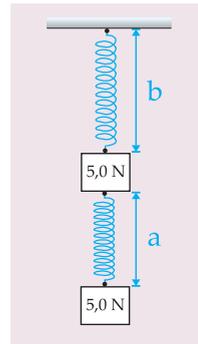
$$k \cdot x = P$$

$$k = \frac{P}{x} = \frac{10 \text{ N}}{0,05 \text{ m}} \Rightarrow k = 200 \text{ N / m}$$

b) Como o peso do corpo B é o dobro do peso de A, a mola terá sua deformação **duplicada** (de 5 cm para 10 cm). Logo, o comprimento da mola, quando esta sustenta o corpo B, será:

$$\ell = \ell_0 + x = 12 + 10 \Rightarrow \ell = 22 \text{ cm}$$

02. O sistema montado na figura apresenta-se em equilíbrio. As molas verticais são leves (pesos desprezíveis) e cada uma possui constante elástica $k = 50 \text{ N/m}$ e comprimento natural (não deformada) de 20 cm. Cada bloco tem peso de 5,0 N. Quais os comprimentos a e b das molas?



Resolução

1) Analisando o equilíbrio do bloco inferior, temos:

$$F_1 = P$$

$$k \cdot x_1 = P$$

$$x_1 = \frac{P}{k} = \frac{5,0 \text{ N}}{50 \text{ N / m}} = 0,10 \text{ m} \Rightarrow x_1 = 10 \text{ cm}$$

Logo:

$$a = \ell_0 + x_1 = 20 + 10 \Rightarrow a = 30 \text{ cm}$$

2) Observando as forças em equilíbrio no bloco superior e lembrando que a mola inferior traciona ambos os blocos com a mesma intensidade (F_1), tem-se:

$$F_2 = P + F_1$$

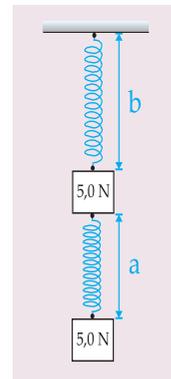
$$k \cdot x_2 = P + P$$

$$x_2 = \frac{2P}{k} = \frac{10 \text{ N}}{50 \text{ N / m}}$$

$$x_2 = 0,20 \text{ m} = 20 \text{ cm}$$

Logo:

$$b = \ell_0 + x_2 = 20 + 20 \Rightarrow b = 40 \text{ cm}$$



Observação final

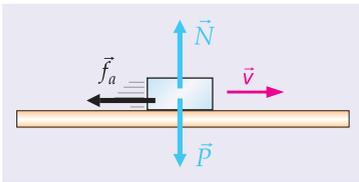
Pode-se obter também a deformação da mola superior considerando que o conjunto de blocos (peso total 10 N) produza sua deformação. Como as molas são idênticas, a mola superior sofrerá o **dobro** da deformação experimentada pela inferior, isto é: 20 cm.

Capítulo 04. Força de Atrito

1. Introdução

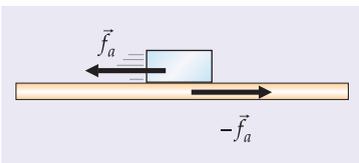
Quando lançamos um corpo sobre uma mesa comum horizontal, é freqüente observarmos que o corpo escorrega em movimento retardado, podendo até parar após percorrer uma certa distância. Isso significa que houve uma resistência ao seu movimento.

Essa força de resistência ao seu deslizamento, exercida pela mesa sobre o corpo, é denominada **força de atrito dinâmico** (\vec{f}_a), sendo motivada pelas rugosidades presentes nas superfícies de contato dos sólidos (corpo e mesa).



Tal força de atrito é paralela às superfícies em contato e se **opõe ao escorregamento relativo** entre elas.

Convém lembrar que, nessa interação de contato, as superfícies rugosas (do corpo e da mesa) sempre trocam forças de atrito de mesma intensidade (ação e reação), como ilustra a figura a seguir.



- \vec{f}_a : força de atrito atuante no corpo.
- $-\vec{f}_a$: força de atrito atuante na mesa.

2. Atrito Dinâmico

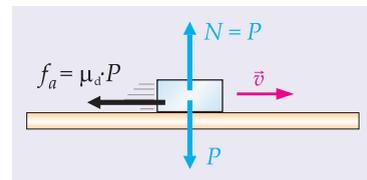
Experimentalmente, deduz-se que a intensidade da **força de atrito dinâmico** (f_a) depende basicamente do grau de rugosidade das superfícies em contato e da intensidade da força normal (N) de compressão entre elas, sendo portanto expressa assim:

$$f_a = \mu_d \cdot N$$

em que μ_d , denominado **coeficiente de atrito dinâmico** (indica o grau de rugosidade), depende da natureza dos sólidos em contato e do estado de polimento ou lubrificação de suas superfícies. O coeficiente μ_d não possui unidades, sendo geralmente um número menor que 1 ($\mu_d < 1$) para a maioria dos casos de pares de materiais em contato.

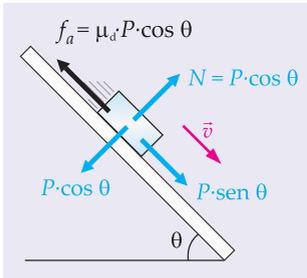
Nota-se, pela expressão acima, que quanto mais comprimidas estiverem as superfícies em contato (maior força normal), mais intensa será a força de atrito de oposição ao deslizamento entre elas.

Para o deslizamento usual de um bloco sobre uma superfície horizontal, a intensidade da força normal coincide com o valor do peso do bloco ($N = P$). Nesse caso, a intensidade da força de atrito dinâmico vale: $f_a = \mu_d \cdot P$.





Para um deslizamento simples de um bloco sobre um plano inclinado, formando o ângulo θ com a horizontal, a força normal tem intensidade igual à da componente normal do peso do bloco ($N = P \cdot \cos \theta$). Assim: $f_a = \mu_d \cdot P \cdot \cos \theta$.



Exercícios Resolvidos

01. Lança-se um bloco, com velocidade horizontal de módulo v_0 , sobre uma mesa horizontal que apresenta com o bloco um coeficiente de atrito dinâmico $\mu_d = 0,20$. Nota-se que o bloco desliza 1,0 m até parar. Despreze o efeito do ar e adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- Qual o módulo da aceleração escalar de frenagem do bloco?
- Qual o valor de v_0 ?

Resolução

a) Pela 2ª lei de Newton, temos:

$$f_a = m \cdot \gamma$$

$$\mu_d \cdot mg = m \cdot |a|$$

$$|a| = \mu_d \cdot g$$

$$|a| = 0,20 \cdot 10 \Rightarrow |a| = 2,0 \text{ m/s}^2$$

b) Pela equação de Torricelli (MUV), vem:

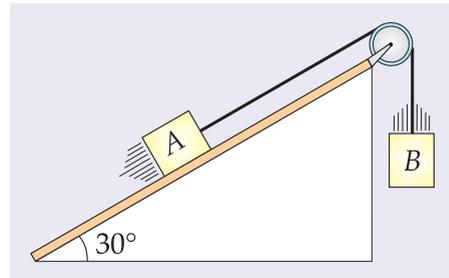
$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta s$$

$$0^2 = v_0^2 + 2 \cdot (-2,0) \cdot 1,0 \Rightarrow v_0 = 2,0 \text{ m/s}$$

02. O sistema montado na figura, formado pelos blocos **A** e **B** de 2,0 kg cada um, apresenta-se em movimento uniforme, com o bloco **B** em movimento descendente. Considere o fio e a polia como ideais e adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Determine:

- o módulo da força de tração do fio;
- o módulo da força de atrito em **A**;
- o coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco **A** e o plano inclinado.

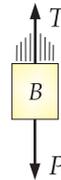


Resolução

a) Analisando o equilíbrio dinâmico (MRU) do bloco **B**, temos:

$$T = P = mg = 2 \cdot 10$$

$$T = 20 \text{ N}$$

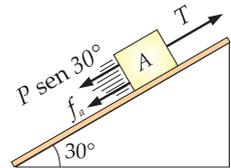


b) Como o bloco **A** também se encontra em equilíbrio (MRU), vem:

$$T = P \text{ sen } 30^\circ + f_a$$

$$20 = 20 \cdot 0,5 + f_a$$

$$f_a = 10 \text{ N}$$



c) No bloco **A**:

$$N = P \text{ cos } 30^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ N}$$

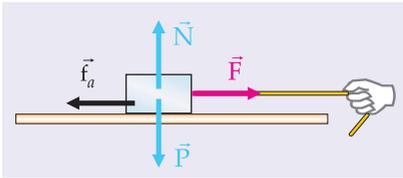
Logo: $f_a = \mu_d \cdot N$

$$10 = \mu_d \cdot 10\sqrt{3} \Rightarrow \mu_d = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3. Força de Atrito Estático

Quando tentamos retirar um corpo do repouso, empurrando-o ou puxando-o sobre um piso horizontal, notamos que nossos esforços não necessariamente colocam o corpo em deslizamento. Isso significa que há uma resistência ao escorregamento atuando sobre o corpo.

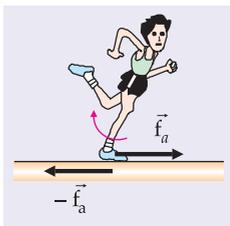
Essa força de resistência \vec{F} que **impede** seu deslizamento, exercida pelo piso sobre o corpo, é denominada **força de atrito estático** (\vec{f}_a).



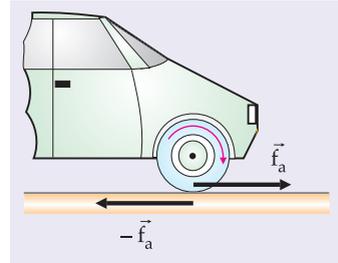
Tal força de atrito é paralela às superfícies em contato e se **opõe à tendência de escorregamento relativo** entre elas.

Convém lembrar que, nessa interação de contato, as superfícies rugosas (do corpo e do piso) sempre trocam forças de atrito de mesma intensidade (ação e reação). Isso nos permite compreender o papel da força de atrito estático na produção de certos movimentos. Observe os exemplos a seguir.

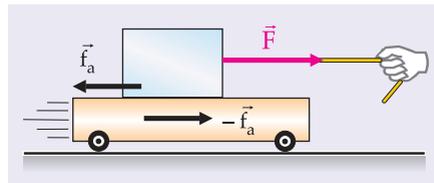
Uma pessoa andando, sem que seu pé patine no piso, tem seu movimento propiciado pela **força de atrito estático** que seu pé troca com o piso.



As rodas motrizes de um carro trocam **forças de atrito estático** com o asfalto, quando não patinam, permitindo assim a arrancada do veículo.



Um carrinho é posto em movimento quando se puxa um bloco depositado sobre ele. Não havendo escorregamento do bloco sobre o carrinho, a troca de **forças de atrito estático** entre eles permite que se movimentem em conjunto sobre o solo.

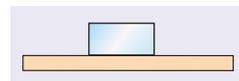


Podemos concluir, a partir de tais exemplos, que a força de atrito estático não é necessariamente uma força “contrária” ao movimento, mas sempre de **oposição ao escorregamento relativo** entre os sólidos em contato.

4. Atrito Estático Máximo

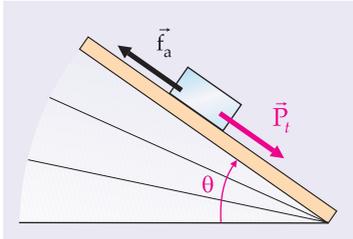
Experimentalmente, nota-se que a intensidade da **força de atrito estático** sobre um corpo pode variar, dependendo de sua maior ou menor tendência de escorregamento sobre a superfície em que se apóia.

Por exemplo, um bloco depositado sobre um plano horizontal não sofre desta ação de atrito estático, pois não há tendência do bloco deslizar sobre o plano. Ou seja: $f_a = 0$.





Por outro lado, se inclinarmos progressivamente o plano, haverá uma tendência cada vez maior do bloco deslizar devido à ação da componente tangencial de seu peso ($P_t = P \text{ sen}\theta$).



Não ocorrendo escorregamento, a força de atrito estático presente no bloco é quem neutraliza a ação de P_t . Ou seja: $f_a = P \text{ sen}\theta$. Dessa forma, a força de atrito estático tem seu valor crescendo à medida que θ aumenta.

Quando o bloco fica na iminência de deslizamento, dizemos que a intensidade da força de atrito estático atinge seu valor máximo. Deduz-se, a partir de experiências, que a intensidade **máxima** da força de atrito estático depende do grau de rugosidade das superfícies em contato e da intensidade da força normal (N) de compressão entre elas. Ou seja:

$$f_{a \text{ máx}} = \mu_e \cdot N$$

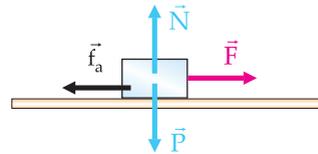
onde μ_e , denominado **coeficiente de atrito estático**, indica o grau de rugosidade entre os sólidos em contato. O coeficiente μ_e , análogo ao dinâmico μ_d , não possui unidades, sendo geralmente um número menor que 1 ($\mu_e < 1$) para a maioria dos casos de pares de materiais em contato. Na prática, observa-se que o coeficiente de atrito estático é maior que o seu correspondente dinâmico ($\mu_e > \mu_d$). Porém, às vezes a diferença entre eles é tão pequena que podemos considerá-los iguais e representá-los ambos por μ .

Exercícios Resolvidos

01. Um bloco de peso 100 N encontra-se inicialmente em repouso sobre um piso horizontal, tal que os coeficientes de atrito estático e dinâmico, entre o bloco e o piso, são 0,30 e 0,25, respectivamente. Aplicando-se ao bloco uma força horizontal de valor crescente, variando de 0 até 40 N (máximo), responda às questões.

a) Para que valores de \vec{F} o bloco estará ainda em repouso?

b) Esboce o gráfico $f_a \times F$, que mostra a variação da intensidade da força de atrito atuante no bloco, em função do valor da força aplicada.



Resolução

a) O bloco permanecerá em repouso enquanto a força \vec{F} não superar a máxima força de atrito estático que o piso pode lhe oferecer. Lembrando que a força normal tem a mesma intensidade do peso, temos:

$$f_{a \text{ máx}} = \mu_e \cdot N = 0,30 \cdot 100 \text{ N} = 30 \text{ N}$$

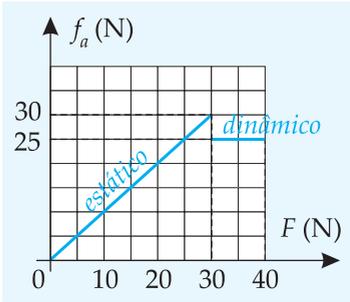
Portanto, o bloco ficará em equilíbrio estático ($F = f_a$) para os seguintes valores de F :

$$0 \leq F \leq 30 \text{ N}$$

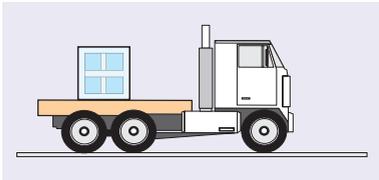
b) Enquanto F não superar 30 N, teremos o bloco em equilíbrio, ou seja, $F = f_a$. Para $F > 30 \text{ N}$, o bloco entrará em movimento e o atrito atuante passa a ser **dinâmico**, com o seguinte valor **constante**:

$$f_a = \mu_d \cdot N = 0,25 \cdot 100 = 25 \text{ N}$$

Logo:



02. Um caminhão está inicialmente em repouso e possui uma caixa depositada em sua carroceria (sem estar amarrada), como mostra a figura. Sabendo-se que $g = 10 \text{ m/s}^2$ e que o coeficiente de atrito estático entre a caixa e a carroceria vale $0,40$, calcule a máxima aceleração que pode ser imprimida ao caminhão sem que a caixa escorregue.



Resolução

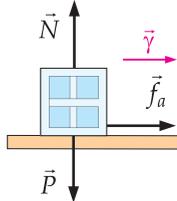
Contrária à tendência de deslizamento da caixa, a força de atrito estático, que a carroceria exerce na caixa, funciona como força aceleradora para a caixa. Dessa forma, aplicando-se a 2ª lei de Newton na caixa e considerando-a na iminência de escorregamento, temos:

$$f_{a, \text{máx}} = m \cdot \gamma_{\text{máx}}$$

$$\mu_e \cdot mg = m \cdot \gamma_{\text{máx}}$$

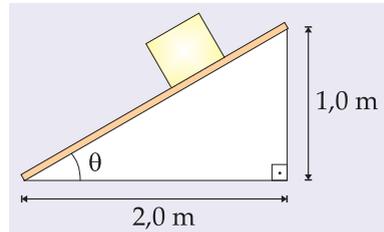
$$\gamma_{\text{máx}} = \mu_e \cdot g$$

$$\gamma_{\text{máx}} = 0,40 \cdot 10 = \boxed{4,0 \text{ m/s}^2}$$



03. Um bloco de peso 10 N está na iminência de deslizar sobre o plano inclinado mostrado na figura abaixo. Nessas condições, determine:

- o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície do plano.
- o módulo da força total que o plano inclinado exerce sobre o bloco.



Resolução

a) Analisando as forças em equilíbrio sobre o bloco, temos:

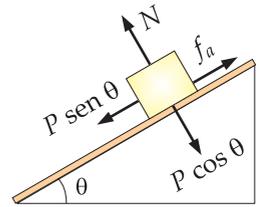
$$f_{a, \text{máx}} = P \cdot \text{sen } \theta$$

$$\mu_e \cdot N = P \cdot \text{sen } \theta$$

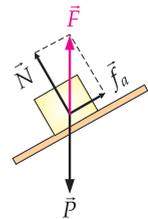
$$\mu_e \cdot P \cdot \text{cos } \theta = P \cdot \text{sen } \theta$$

$$\mu_e = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} = \text{tg } \theta$$

$$\mu_e = \text{tg } \theta = \frac{1,0 \text{ m}}{2,0 \text{ m}} \Rightarrow \boxed{\mu_e = 0,50}$$



b) A força total (\vec{F}) que o plano exerce no bloco corresponde à resultante das forças normal e de atrito. Isto é: $\vec{F} = \vec{N} + \vec{f}_a$. Como o bloco encontra-se em equilíbrio, \vec{F} deve neutralizar o peso do bloco. Logo, ela deve ser oposta ao peso e de mesma intensidade. Ou seja: $F = 10 \text{ N}$.



Capítulo 05. Dinâmica do Movimento Circular

1. Introdução

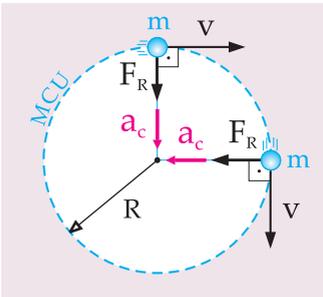
Neste módulo, abordaremos as forças envolvidas nos movimentos circulares, especialmente no MCU.

Já sabemos que nos movimentos **circulares uniformes** a força resultante é **centrípeta**, pois esta deve produzir a **aceleração centrípeta** necessária para alterar a direção da velocidade. Recordando a 2ª lei de Newton, temos:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_c \Rightarrow \vec{F}_R = m \cdot \vec{a}_c$$

onde $\vec{a}_c = v^2/R$ (R : raio do trajeto circular).

Convém lembrar que, no movimento circular uniforme, os vetores força resultante (\vec{F}_R) e aceleração centrípeta (\vec{a}_c) possuem **módulos constantes** e orientam-se **perpendiculares à velocidade** do móvel, ambos com sentido voltado para o centro da curva.



2. Aplicações Usuais

Vamos agora analisar alguns movimentos **uniformes** sendo realizados numa trajetória **circular horizontal**.

2.1. Corpo Girado por um Fio

Considere um corpo de massa m , amarrado a um fio ideal, efetuando dois tipos de MCU com velocidade escalar v e raio R : um que se realiza sobre um **plano horizontal** liso e outro denominado **pêndulo cônico**, ambos

sem a consideração da resistência do ar. Observe-os através das figuras a seguir.

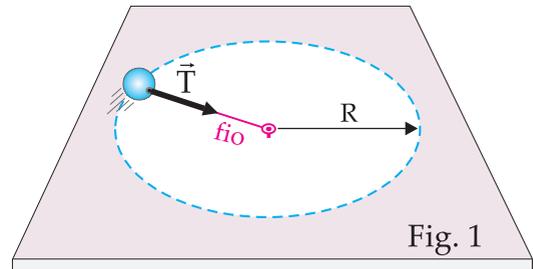


Fig. 1

Na figura (1), a resultante centrípeta (horizontal) corresponde à força de tração do fio sobre o corpo (as forças verticais, normal e peso, estão em equilíbrio). Nesse caso:

$$F_R = T \Rightarrow T = m \cdot a_c = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

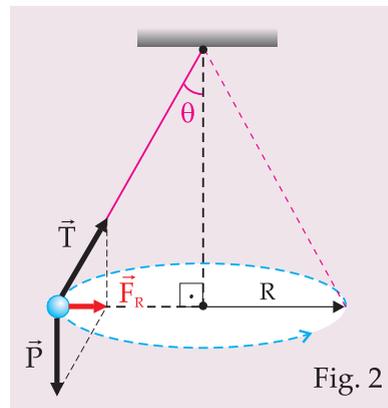
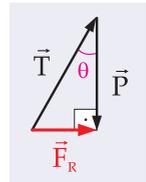


Fig. 2

Na figura (2), a resultante centrípeta do pêndulo cônico é horizontal e corresponde ao vetor soma das forças atuantes (tração e peso). Pelo triângulo retângulo de forças, temos:



$$\text{tg } \theta = \frac{F_R}{P} \Rightarrow F_R = P \cdot \text{tg } \theta$$

Logo:

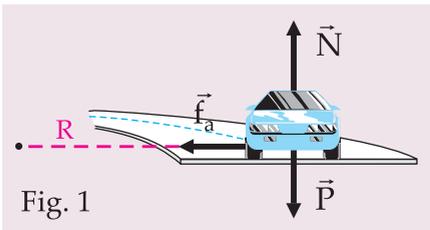
$$m \cdot a_c = mg \cdot \text{tg } \theta \Rightarrow a_c = g \cdot \text{tg } \theta$$

Como $a_c = v^2/R$, podemos obter o módulo da velocidade desse movimento pendular assim:

$$\frac{v^2}{R} = g \cdot \text{tg } \theta \Rightarrow v = \sqrt{R \cdot g \cdot \text{tg } \theta}$$

2.2. Carro Executando uma Curva

Considere um carro de massa m descrevendo uma curva horizontal de raio R , com velocidade escalar constante v , em dois tipos diferentes de pista: **horizontal** e **sobrelevada** (inclinada), como indicam as figuras (1) e (2). Em ambas situações, despreze o efeito do ar.



Na figura (1), a resultante centrípeta (horizontal) corresponde à força de atrito estático, que impede o seu escorregamento lateral. As forças verticais, normal e peso, estão em equilíbrio. Nesse caso:

$$F_R = f_a \Rightarrow f_a = m \cdot a_c = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

Conhecendo-se o coeficiente de atrito estático (μ_e) entre pneus e pista, podemos prever a maior velocidade que o carro poderia executar tal curva, sem risco de derrapagem lateral, assim:

$$f_{a \text{ máx}} = m \cdot \frac{v_{\text{máx}}^2}{R}$$

$$\mu_e \cdot mg = m \cdot \frac{v_{\text{máx}}^2}{R} \Rightarrow v_{\text{máx}} = \sqrt{\mu_e \cdot R \cdot g}$$

Na figura (2), é possível o carro executar a curva mesmo não existindo atrito lateral sobre si, pois as forças normal e peso, de modo análogo às forças peso e tração no pêndulo cônico, conseguem produzir uma resultante centrípeta no carro.

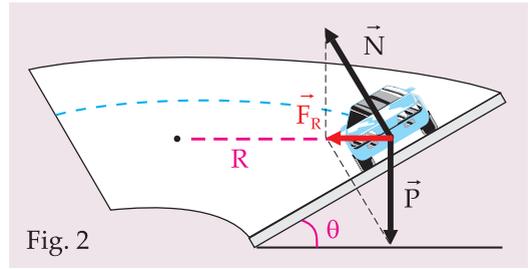
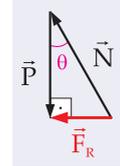


Fig. 2

Ou seja:

$$\text{tg } \theta = \frac{F_R}{P}$$

$$F_R = P \cdot \text{tg } \theta$$



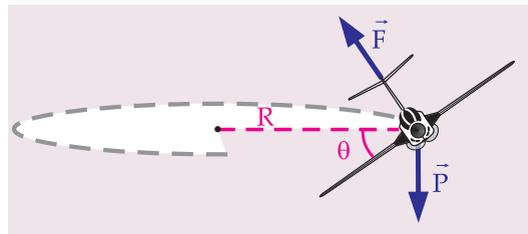
A partir disso, podemos obter a velocidade de que permite que o carro efetue a curva, sem tendência de derrapar.

$$F_R = mg \cdot \text{tg } \theta = m \cdot a_c \Rightarrow a_c = g \cdot \text{tg } \theta$$

$$a_c = \frac{v^2}{R} = g \cdot \text{tg } \theta \Rightarrow v = \sqrt{R \cdot g \cdot \text{tg } \theta}$$

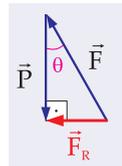
2.3. Avião Efetuando uma Curva

Pelas mesmas razões apresentadas nos estudos do pêndulo cônico e do carro numa curva com sobrelevação, podemos entender o motivo de um avião ter suas asas inclinadas no momento que efetua uma curva horizontal de raio R . A força de sustentação aerodinâmica (\vec{F}), normal às asas, e o peso (\vec{P}) do avião geram, por composição, a sua resultante centrípeta horizontal.



$$\text{tg } \theta = \frac{F_R}{P} \Rightarrow F_R = P \cdot \text{tg } \theta$$

$$m \cdot \frac{v^2}{R} = mg \cdot \text{tg } \theta \Rightarrow R = \frac{v^2}{g \cdot \text{tg } \theta}$$

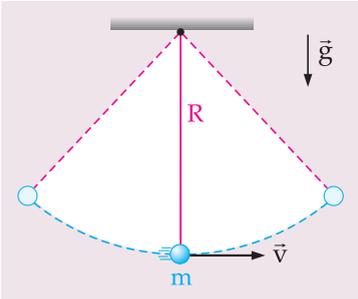




3. Movimentos em Curvas Verticais

3.1. Pêndulo Simples

Considere um corpo de massa m , suspenso por um fio ideal, oscilando no plano vertical sob a ação da gravidade \vec{g} e livre dos efeitos do ar.

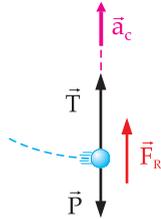


Ao passar pelo **ponto mais baixo** de sua trajetória circular de raio R , animado com velocidade horizontal \vec{v} , o corpo pendular deve possuir uma força resultante centrípeta **orientada para cima**. Logo, nesse ponto, a força de **tração** do fio sobre o corpo deve ser **mais intensa** que o valor de seu **peso** para gerar essa resultante. O valor dessa tração pode ser deduzido assim:

$$F_R = T - P = m \cdot a_c$$

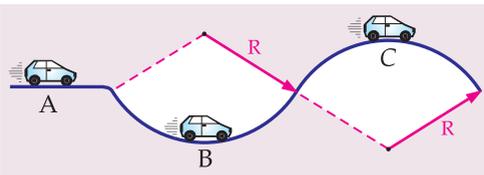
$$T - mg = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$T = mg + m \cdot \frac{v^2}{R}$$



3.2. Carro Executando Curvas Verticais

Suponha um carro de massa m , com velocidade escalar constante v , percorrendo uma estrada cujo perfil é mostrado, em corte vertical, pela figura a seguir. Despreze os efeitos do ar e considere g para o valor da gravidade local.



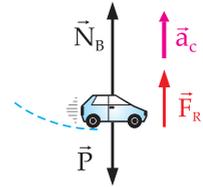
Ao passar pelo ponto A, onde a pista é plana e horizontal, a força normal exercida pela estrada sobre o carro tem a **mesma** intensidade do peso do carro (equilíbrio vertical). Ou seja: $N_A = P = mg$.

No entanto, quando o carro passa por B, ponto mais baixo da **depressão circular** de raio R , a intensidade da força normal sobre o carro deve **superar** o valor de seu peso, de modo que se produza uma resultante centrípeta **ascendente**. Ou seja:

$$F_R = N_B - P = m \cdot a_c$$

$$N_B - mg = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$N_B = mg + m \cdot \frac{v^2}{R}$$

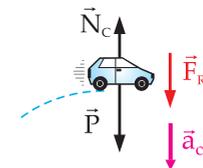


Em seqüência, quando o carro atinge o ponto C, ápice da **lombada circular** de raio R , a força normal sobre o carro tem valor **inferior** ao de seu peso, para que o carro tenha uma resultante centrípeta **descendente**. Ou seja:

$$F_R = P - N_C = m \cdot a_c$$

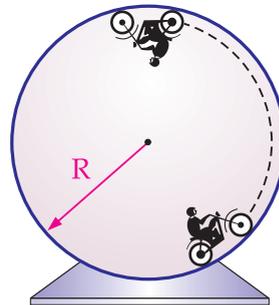
$$mg - N_C = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$N_C = mg - m \cdot \frac{v^2}{R}$$



3.3. Globo da Morte

Uma atração muito popular nos circos é o "Globo da Morte", que consiste numa gaiola de forma esférica no interior da qual se movimenta uma pessoa pilotando uma motocicleta. O momento crucial desse número circence ocorre quando o piloto passa pelo topo do globo. Considere o conjunto (moto + piloto) com massa total m e admita g para o valor da gravidade local.

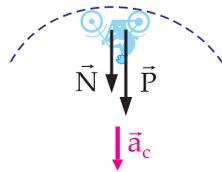


Quando a motocicleta atinge o ponto mais alto do globo, com velocidade escalar v , a intensidade da força normal com que a superfície interna do globo **empurra** a moto pode ser obtida assim:

$$F_R = N + P = m \cdot a_c$$

$$N + mg = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$N = m \cdot \frac{v^2}{R} - mg$$



A partir disso, podemos prever o módulo da **velocidade mínima** que a motocicleta deve ter nesse ponto para não perder o contato com o interior do globo.

$$N_{\text{mín}} + mg = m \cdot \frac{v_{\text{mín}}^2}{R}$$

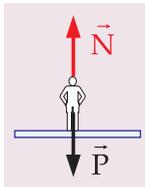
$$v_{\text{mín}} \Rightarrow N_{\text{mín}} = 0 \text{ (iminência de perda de contato)}$$

$$mg = m \cdot \frac{v_{\text{mín}}^2}{R} \Rightarrow v_{\text{mín}} = \sqrt{R \cdot g}$$

Observe que essa velocidade crítica não depende da massa do conjunto.

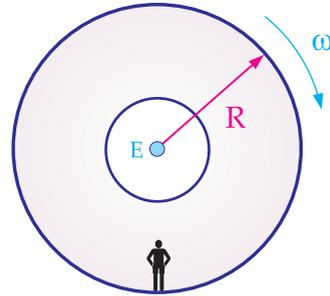
3.4. Gravidade Simulada em Naves

Para nós aqui na Terra, a sensação de ter peso está associada à presença da **força normal** que recebemos no contato com pisos horizontais. Quando em equilíbrio: $N = P = mg$.



Já no espaço sideral, podemos evitar a flutuação de astronautas no interior de uma nave espacial criando uma **gravidade aparente**. Esta gravidade é **simulada** pela rotação da nave espacial, que obriga os astronautas a trocarem **forças normais** com ela.

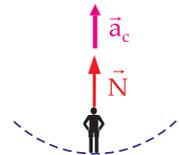
Suponha uma nave espacial, em forma de cilindro oco de raio R , mostrada abaixo, girando com velocidade angular constante (ω) em torno de um eixo E .



Um astronauta de massa m , solidário à essa nave girante, deve receber do piso da nave uma força normal que funcione como sua resultante centrípeta. Ou seja:

$$N = m \cdot a_c$$

$$N = m \cdot \omega^2 \cdot R$$



Para que o astronauta tivesse nessa nave a mesma "sensação de peso" que possui aqui na Terra, tal força normal deveria ter a mesma intensidade de seu peso terrestre, isto é: $N = P = mg$. A partir disso, podemos obter a velocidade angular da nave para que esta produza essa sensação.

$$N = m \cdot g = m \cdot \omega^2 \cdot R \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

Capítulo 06. Equilíbrio de Corpo Extenso

1. Momento de uma Força

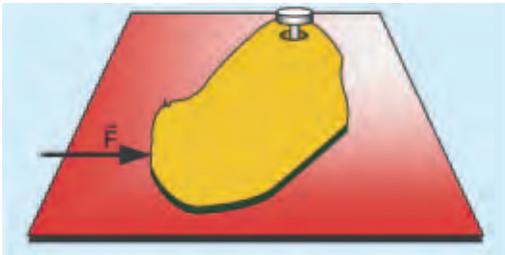
Quando aplicamos uma força a um corpo extenso podemos:

- deformá-lo;
- deslocá-lo num movimento de translação;
- provocar um movimento de rotação;
- ocasionar a ocorrência de mais de um dos fenômenos acima.

Estudemos o caso em que, devido à ação da força, o corpo tende a sofrer rotação.

À capacidade apresentada por uma força de acarretar movimento de rotação em um corpo extenso denominamos **torque ou momento da força**. Apesar de ser uma grandeza vetorial podemos dar-lhe um tratamento escalar, tendo em vista haver somente duas possibilidades de sentido de rotação no plano (horário ou anti-horário; ou ainda para a direita ou para a esquerda), bastando para tanto que adotemos um dos sentidos convencionalmente como positivo.

Como a capacidade de uma força de fazer um corpo girar independe da existência de outras forças, vejamos o exemplo abaixo, representando uma tábua pregada a uma mesa horizontal, podendo girar livremente em torno do prego, solta e sujeita à ação de uma força \vec{F} também horizontal.

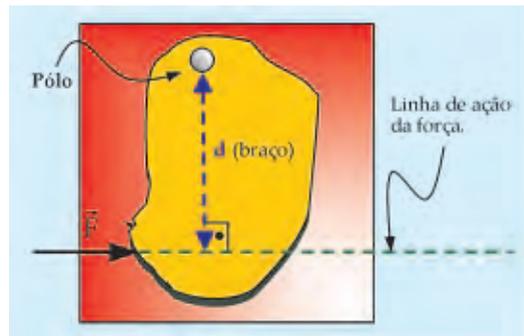


Olhando de cima, podemos caracterizar as grandezas que permitem medir a capacidade que a força tem de fazer a tábua girar, ou seja, o momento dessa força.

O ponto P (centro de rotação) é denominado **pólo**, a distância d do pólo à linha de ação da força é denominada **braço** da força.

Definimos o **momento escalar (M)** da força \vec{F} em relação ao pólo P como:

$$M = \pm |\vec{F}| \cdot d$$



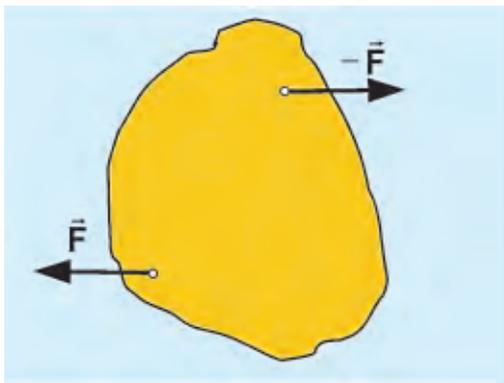
O sinal do momento M depende do sentido de rotação convencionalmente previamente adotado. No exemplo da figura anterior, se houvéssimos adotado o sentido anti-horário como positivo, o momento da força seria positivo, pois ela tende a girar a tábua no sentido anti-horário.

Quando a linha de ação da força passa pelo pólo, o momento é nulo, pois nesse caso o braço (d) é zero.

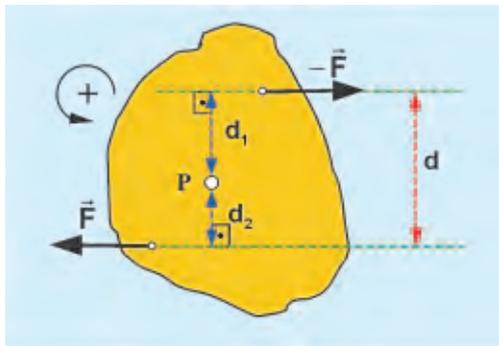
A unidade de momento no Sistema Internacional de Unidades é o newton vezes metro ($N \cdot m$).

Uma situação especial a que um corpo pode estar sujeito é o caso de termos duas forças paralelas (de mesma direção), mesma intensidade, sentidos opostos, mas com linhas de ação não coincidentes. Nesse caso, esse sistema de forças, denominado **Binário ou Conjugado**, tem a capacidade de fazer o corpo girar.

Consideremos o binário da figura abaixo atuando sobre um corpo.



Adotando um ponto **P** qualquer como pólo e convencionando o sentido anti-horário como positivo, calculemos o momento resultante dos momentos de cada uma das forças.



Os momentos dessas forças são:

$M_1 = |-\vec{F}| \cdot d_1$ e $M_2 = -|\vec{F}| \cdot d_2$, pois ambas tendem a fazer o corpo girar no sentido horário.

Sendo $|\vec{F}| = |-\vec{F}|$, então o momento resultante, denominado Binário ou Conjugado é:

$$C = M_1 + M_2 \Rightarrow C = |-\vec{F}| \cdot d_1 + (-|\vec{F}| \cdot d_2)$$

$$C = -|\vec{F}| \cdot (d_1 + d_2) \Rightarrow C = -|\vec{F}| \cdot d$$

Importante

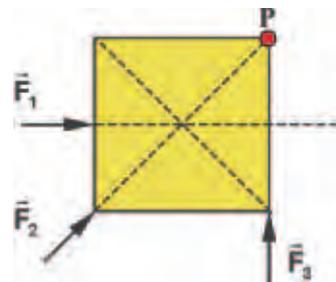
- Se o sentido adotado como positivo fosse o horário, o sinal do binário seria positivo
- A resultante das forças sobre o corpo é nula, ou seja, não há aceleração de translação, mas o corpo entra em movimento de rotação acelerado.

Exercício Resolvido

O quadrado de lado 0,2 m da figura está sujeito às três forças, cujos módulos são: $F_1 = 10 \text{ N}$; $F_2 = 20 \text{ N}$ e $F_3 = 15 \text{ N}$.

Em relação ao vértice P, tomado como pólo, fazem-se as afirmações:

- I – O momento de \vec{F}_1 tem intensidade $1 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- II – O momento de \vec{F}_2 é nulo.
- III – O momento de \vec{F}_3 tem intensidade $3 \text{ N} \cdot \text{m}$.

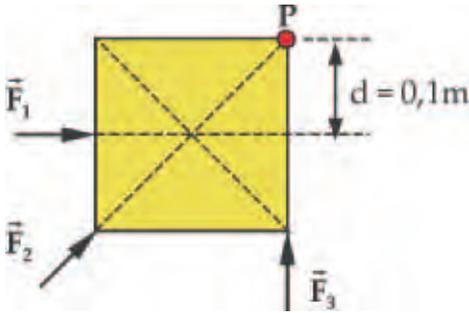


Assinale a alternativa correta.

- a) Somente I é correta.
- b) Somente II é correta.
- c) Somente I e II são corretas.
- d) Somente I e III são corretas.
- e) Todas são corretas.



Resolução



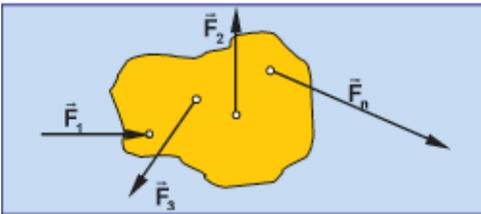
O momento de \vec{F}_1 é: $M_1 = F_1 \cdot d \Rightarrow M_1 = 10 \cdot 0,1$
 $M_1 = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$

Como as linhas de ação das forças \vec{F}_2 e \vec{F}_3 passam pelo pólo P, seus momentos são nulos.

Resposta: C

2. Equilíbrio Estático do Corpo Extenso

Um corpo extenso, sujeito à ação de várias forças, está em equilíbrio estático quando não está sofrendo nem movimento de translação nem movimento de rotação, em relação a um referencial.



Duas são as condições para que isso aconteça:

1ª) Para que não sofra translação, a **resultante das forças externas** que agem no corpo deve ser **nula**.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = \vec{0}$$

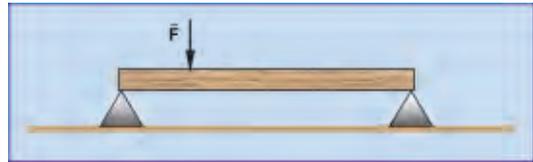
2ª) Para que não sofra rotação, a **soma dos momentos** dessas forças deve ser **nula**, independentemente do pólo considerado.

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots + \vec{M}_n = \vec{0}$$

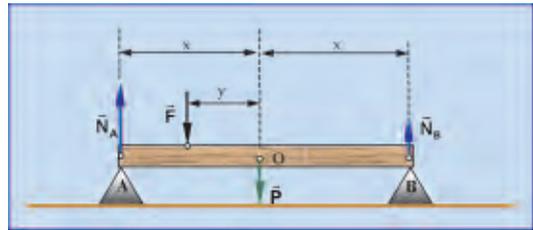
Importante!!

No caso de ser um ponto material em equilíbrio, basta a primeira condição, como já foi visto anteriormente, pois suas dimensões são desprezíveis e dessa forma não sofre rotação.

Vejamos o caso de uma barra homogênea em equilíbrio estático, apoiada sobre dois suportes horizontais e sujeita a uma força \vec{F} , conforme a figura.



Analisando as forças que agem na barra temos:



Onde \vec{N}_A e \vec{N}_B são as reações normais dos apoios A e B sobre a barra e \vec{P} é o peso da barra que, por ser homogênea, tem seu centro de massa coincidente com o seu centro geométrico O (ponto médio da barra).

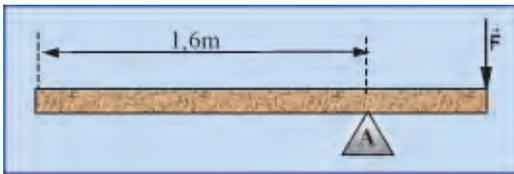
Adotando o sentido horário como positivo e pólo no ponto O, as condições de equilíbrio são:

$$\vec{F}_R = \vec{0} \Rightarrow F + P = N_A + N_B$$

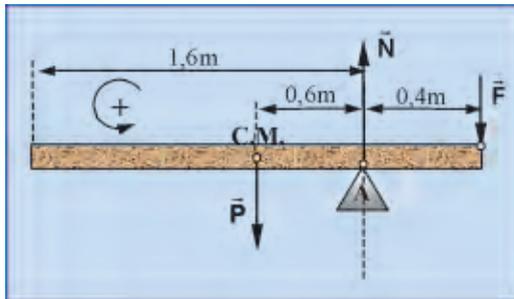
$$\begin{aligned} \Sigma \vec{M} = \vec{0} &\Rightarrow M_{N_A} + M_F + M_P + M_{N_B} = 0 \\ -F \cdot y + N_A \cdot x - N_B \cdot x &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow N_A \cdot x &= N_B \cdot x + F \cdot y \end{aligned}$$

Exercícios Resolvidos

01. Qual deve ser o valor da força \vec{F} aplicada à barra homogênea de peso 20 N e comprimento 2,0 m da figura, de modo a mantê-la na horizontal, quando apoiada no suporte A?



Resolução



Adotando pólo no ponto A e convencionando o sentido anti-horário como positivo, temos:

$$M_P + M_N - M_F = 0$$

como $M_N = 0$ (a linha de ação N passa pelo pólo), então:

$$M_P - M_F = 0$$

$$M_F = M_P \Rightarrow F \cdot 0,4 = 20 \cdot 0,6$$

$$F \cdot 0,4 = 1,2$$

e, assim: $F = 30 \text{ N}$

02. Na questão anterior, qual o valor da força que a barra aplica no apoio A?

Resolução

A força que a barra aplica no apoio A tem intensidade igual à que o apoio aplica na barra (ação e reação).

Do equilíbrio da barra podemos escrever:

$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow N = P + F \Rightarrow N = 20 + 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = 50 \text{ N}$$

Capítulo 07. Gravitação Universal

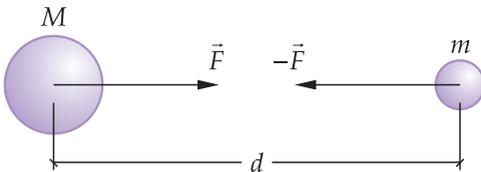
1. Lei da Gravitação Universal

A partir dos estudos de Galileu Galilei, começou-se a acreditar que os movimentos dos corpos na Terra e dos corpos celestes (planetas) obedeciam a leis universais. Isaac Newton, baseando-se no estudo dos movimentos da Lua e dos planetas, elaborou a base teórica que deu origem à Lei da Gravitação Universal:

“Matéria atrai matéria na razão direta do produto das massas e na razão inversa do quadrado da distância entre elas”

que podemos entender assim:

Dois corpos quaisquer se atraem com forças cuja intensidade é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre seus **centros de massa**.



A intensidade da força de atração é a mesma em ambos os corpos, independente dos valores de suas massas e pode ser determinada pela expressão:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2}$$

em que **G** tem um valor constante e é denominada: **constante da gravitação universal**.

Seu valor, medido experimentalmente, é:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$$

Pelo fato de esse valor ser muito pequeno, é necessário que a massa de pelo menos um dos corpos seja muito grande para que percebamos a força gravitacional entre eles.

Quando um corpo encontra-se próximo à superfície da Terra, a **força-peso** ou, simplesmente, **peso**, aplicada pela Terra, prevalece sobre outras forças gravitacionais de corpos próximos, pois a massa da Terra sempre é muito maior que a massa desses corpos.

A constante da gravitação universal **G** não deve ser confundida com a aceleração da gravidade local **g**, pois esta, entre tantas razões:

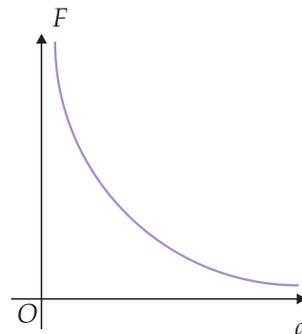
- varia conforme a altitude e a latitude local;
- varia de planeta para planeta, ou de estrela para estrela;
- é uma grandeza vetorial.

Variando-se somente a distância **d** entre os dois corpos, observamos uma variação na intensidade **F** da força gravitacional.

Como:

$$F \cdot d^2 = G \cdot M \cdot m \quad (\text{constante})$$

então a curva correspondente ao gráfico **F x d** é uma hipérbole quadrática.



Exercícios Resolvidos

01. (UFMA-MA) Seja **F** a força de atração do Sol sobre um planeta. Se a massa do Sol se tornasse três vezes maior, a do planeta, cinco vezes maior, e a distância entre eles fosse reduzida à metade, a força de atração entre o Sol e o planeta passaria a ser:

- a) 3 F
- b) 15 F
- c) 7,5 F
- d) 60 F

Resolução

A força de atração do Sol é: $F = G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2}$

Com as alterações, a nova força de atração F' passaria a ser: $F' = G \cdot \frac{3M \cdot 5m}{\left(\frac{d}{2}\right)^2}$

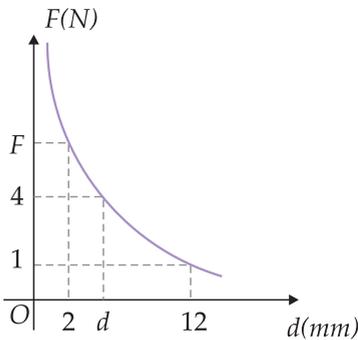
Assim, temos:

$$F' = G \cdot \frac{15 \cdot M \cdot m}{\left(\frac{d^2}{4}\right)} \Rightarrow F' = G \cdot \frac{15 \cdot M \cdot m \cdot 4}{d^2}$$

$$F' = 60 \cdot \left[G \cdot \frac{M \cdot m^2}{d^2} \right] \Rightarrow F' = 60 \cdot F$$

Resposta: D

02. Dado o gráfico $F \times d$, representativo da intensidade F da força gravitacional entre dois corpos, em função da distância d entre seus centros de massa, determine os valores de **F** e **d** assinalados no gráfico.



Resolução

Como as massas dos corpos permanecem constantes, então:

$$F \cdot d^2 = G \cdot M \cdot m = \text{constante, e assim:}$$

$$F \cdot 2^2 = 1 \cdot 12^2, \text{ ou seja, } F = 36 \text{ N}$$

e

$$4 \cdot d^2 = 1 \cdot 12^2, \text{ ou seja, } d^2 = 36, \text{ então:}$$

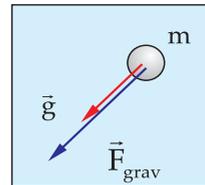
$$d = 6 \text{ mm}$$

2. Campo Gravitacional

Consideremos um ponto de uma dada região, no qual colocamos uma massa de prova **m**. Se essa massa ficar sujeita à ação (força) de natureza gravitacional, então, podemos afirmar que nesse ponto existe um **campo gravitacional**, com as seguintes características:

- direção: a mesma da reta suporte da força
- sentido: o mesmo da força
- intensidade: $g = \frac{F_{\text{grav}}}{m}$

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_{\text{grav}}}{m}$$



A unidade de campo gravitacional no Sistema Internacional de Unidades é:

N/kg (newton por quilograma)

ou

m/s² (metro por segundo por segundo)

Importante:

O campo gravitacional não depende da massa de prova **m**, colocada no ponto, pois sua existência antecede à colocação dessa massa de prova, que está sendo utilizada, justamente, para comprovar a existência desse campo gravitacional.



3. Campo Gravitacional da Terra

Como já vimos, as forças gravitacionais entre corpos só são perceptíveis caso a massa de pelo menos um deles seja muito grande.

Todo corpo material causa campo gravitacional ao seu redor, pois qualquer massa será atraída por ele.

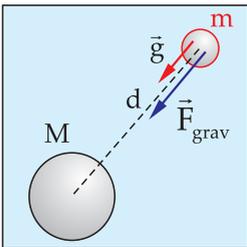
A Terra (massa M) causa no espaço ao seu redor um campo gravitacional, facilmente perceptível, pois qualquer corpo (massa m) abandonado próximo a ela fica sujeito à força gravitacional \vec{F}_{grav} .

Pela Lei da Gravitação Universal, sabemos que: $F = G \frac{M \cdot m}{d^2}$ e, sendo $g = \frac{F}{m}$, ou seja,

$$F = m \cdot g, \text{ podemos escrever: } m \cdot g = G \frac{M \cdot m}{d^2}.$$

Dessa forma, obtemos a intensidade do campo gravitacional da Terra (\vec{g}) num ponto situado a uma distância d de seu centro:

$$g = \frac{G \cdot M}{d^2}$$

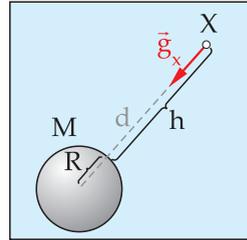


Nas proximidades da superfície da Terra, o valor médio do campo gravitacional é: $9,8m/s^2$.

À medida que nos afastamos da Terra, esse valor vai diminuindo e podemos determiná-lo para uma certa altitude h , lembrando que a distância d do ponto ao centro do planeta é: $d = R + h$, onde R é o raio da Terra, considerada esférica.

Assim, num ponto X, a uma altitude h :

$$g_x = \frac{G \cdot M}{(R + h)^2}$$



4. Campo Gravitacional na Superfície da Terra

Quando estamos na superfície da Terra, temos $h = 0$, e, dessa forma o valor do campo é:

$$g_0 = \frac{G \cdot M}{R^2}$$

Podemos entender esses conceitos para outros astros celestes e verificar que o campo gravitacional na superfície de qualquer astro depende:

- diretamente da massa (M) do astro;
- inversamente do quadrado de seu raio (R).

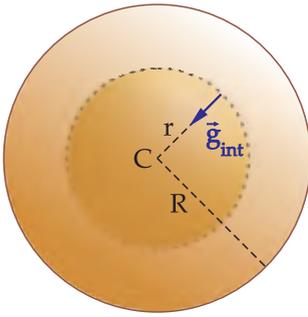
5. Campo Gravitacional em um Ponto no Interior da Terra

Considerando a Terra esférica e homogênea, de massa M e raio R , sua densidade pode ser considerada constante e igual a

$$\mu = \frac{M}{V_{esfera}} \text{ e sendo } V_{esfera} = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3, \text{ então:}$$

$$\mu = \frac{M}{\frac{4\pi \cdot R^3}{3}} \Rightarrow M = \frac{\mu \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$$

Por simetria, o campo gravitacional da Terra em um ponto interno, situado a uma distância r , é devido somente à porção de massa (M_{int}) da esfera de centro C (centro da Terra) e raio $r < R$ como indica a figura a seguir.



Dessa forma temos: $g_{int} = \frac{G \cdot M_{int}}{r^2}$ e como

$$M_{int} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r^3}{3}, \text{ então}$$

$$g_{int} = \frac{G}{r^2} \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r^3}{3}$$

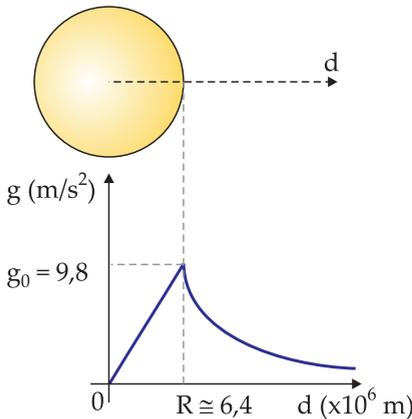
$$g_{int} = \frac{G \cdot 4 \cdot \pi \cdot \mu}{3} \cdot r, \text{ ou seja:}$$

A intensidade do campo gravitacional em pontos internos é diretamente proporcional à distância do ponto ao centro da Terra.

Já que $\frac{g_{int}}{r} = \frac{G \cdot 4 \cdot \pi \cdot \mu}{3}$ (constante).

- Se o ponto interno for o centro da Terra, então, $r = 0$ e, nesse caso, $g_{int} = 0$.
- Para um ponto da superfície temos: $r = R$ e $g_0 = \frac{4}{3} \cdot G \cdot \pi \cdot \mu \cdot R \cong 9,8 \text{ m/s}^2$

Gráfico: $g = f(d)$



Observando que para:

$$d \leq R, \text{ a função é: } g = k \cdot d$$

em que $k = \frac{4}{3} \cdot G \cdot \pi \cdot \mu$ e que se

$$d > R, \text{ a função é: } g = \frac{G \cdot M}{d^2}$$

Exercícios Resolvidos

01. Sendo g_0 a intensidade do campo gravitacional na superfície da Terra, suposta esférica, de raio R , determine a que altitude situa-se o ponto no qual a intensidade do campo é a metade da intensidade do campo na superfície.

Resolução:

Como $g_0 = \frac{G \cdot M}{R^2}$ (campo na superfície),

$g = \frac{GM}{(R+h)^2}$ (campo a uma altitude h) e, sendo $g = \frac{g_0}{2}$, então,

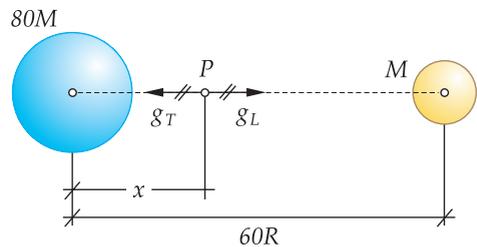
$$\frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow (R+h)^2 = 2R^2$$

$$R+h = R \cdot \sqrt{2}$$

$$h = R \cdot \sqrt{2} - R \Rightarrow h = R \cdot (\sqrt{2} - 1)$$

02. Sendo a massa da Terra oitenta vezes a massa da Lua, e a distância entre a Lua e a Terra igual a $60R$, onde R é o raio da Terra, determine a que distância do centro da Terra localiza-se o ponto no qual é nulo o campo gravitacional resultante dos campos da Lua e da Terra.

Resolução:





Como:

$$g_T = \frac{G \cdot 80M}{x^2}$$

$$g_L = \frac{GM}{(60R - x)^2} \text{ e para que o campo resultante}$$

seja nulo, então: $g_T = g_L$

$$\frac{G \cdot 80M}{x^2} = \frac{GM}{(60R - x)^2} \Rightarrow 80 \cdot (60R - x)^2 = x^2$$

$$\sqrt{80} \cdot (60R - x) = x$$

$$8,9 \cdot 60R - 8,9x = x$$

$$9,9 \cdot x = 534R \Rightarrow x \cong 53,4R$$

6. Satélite em Órbita Circular

Ao redor da Terra existem vários satélites artificiais em órbita, lançados pelo homem, para a comunicação, meteorologia, astronomia e pesquisas científicas quer do espaço, quer da Terra.

Suas órbitas são elípticas, mas de excentricidade tão pequena que podemos considerá-las praticamente circulares.

Em decorrência desse fato, a pequena variação apresentada pela sua velocidade linear será desprezada e assim seu movimento será uniforme.

Dessa forma estaremos estudando os satélites descrevendo Movimento Circular Uniforme ao redor da Terra.

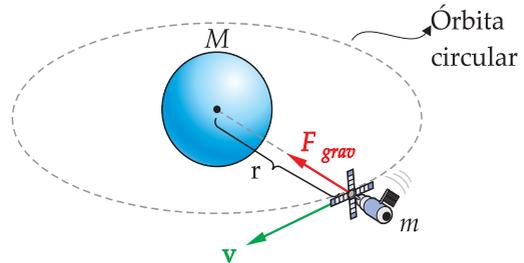
7. Velocidade Linear de Translação

Sendo m a massa do satélite, M a massa da Terra, r o raio de sua órbita e G a constante de gravitação universal, podemos escrever:

$$F_{\text{grav}} = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

(Lei da gravitação universal)

Acontece que essa força gravitacional pode ser considerada única, tendo em vista serem desprezíveis as demais e, assim, ela atuará como resultante centrípeta sobre o satélite.



$$F_{\text{grav}} = m \cdot a_{\text{cP}} \Rightarrow G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

$$\text{Logo, } v^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Observamos que a velocidade linear de translação do satélite só depende da massa M do planeta e do raio r de sua órbita já que G é a constante de gravitação universal.

Assim, quanto mais baixa for a órbita, do satélite (menor r), maior deverá ser a velocidade linear v para que ele se mantenha em órbita.

8. Período de Translação

Como a velocidade linear é constante, então:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM}{r}}} \Rightarrow T = 2\pi r \cdot \sqrt{\frac{r}{GM}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

Da mesma forma, o período T de translação de um satélite só depende da massa M do planeta e do raio r de sua órbita.

9. Satélites Geo-estacionários

São satélites utilizados para comunicação e necessitam estar sempre no mesmo ponto do céu, para o qual estão voltadas as antenas parabólicas de emissão e recepção de sinais de rádio, televisão e microondas (telefonía).

Acontece que a Terra gira em torno de seu eixo, completando uma volta a cada 24 horas e, assim sendo, esses satélites devem girar no mesmo sentido de rotação da Terra e pelo mesmo período, ou seja, 24 horas.

Eles estão localizados de tal modo que suas órbitas e a linha do equador estão no mesmo plano.

$$T_{\text{satélite}} = T_{\text{Terra}} = 24 \text{ h}$$

Exercício Resolvido

Sendo a massa da Terra igual a $6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ e considerando a constante de gravitação universal $G = 7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, determine para um satélite estacionário:

- o raio de sua órbita;
- sua velocidade de translação.

Adote $\pi^2 = 10$

Resolução

a) Sendo o período de translação do satélite estacionário: $T = 24 \text{ h} = 86,4 \cdot 10^3 \text{ s}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{r^3}{GM}$$

$$r^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}$$

$$r^3 = \frac{7 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot (86,4 \cdot 10^3)^2}{4 \cdot 10}$$

$$r^3 \cong 78.382 \cdot 10^{18} \Rightarrow r \cong 42,8 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$r \cong 42.800 \text{ km}$$

$$b) \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{7 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{42,8 \cdot 10^6}}$$

$$v = \sqrt{10 \cdot 10^6} \Rightarrow v \cong 3,2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

$$v = 3,2 \text{ km/s}$$

10. Teorias Planetárias

Desde a época do homem das cavernas o ser humano foi, e sempre será fascinado pelo universo, seus mistérios, suas peculiaridades, seus fenômenos e seu misticismo. Em todas as civilizações e por muitos séculos, filósofos, astrônomos e astrólogos procuraram explicar o modo como o Sol, a Lua, os planetas, as estrelas, os cometas e a Terra deveriam, de alguma forma, se organizar no céu, pois seus movimentos eram sabidamente periódicos e dessa forma, previsíveis.

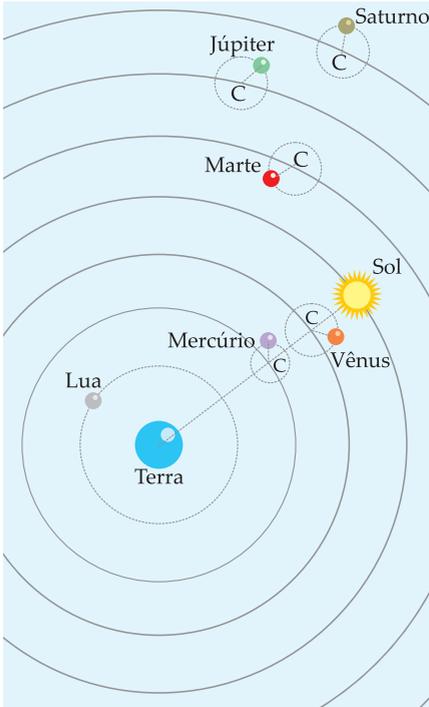
Por séculos elaboraram-se muitas teorias sobre essa organização dos astros e era inevitável que por muito tempo prevalecesse a idéia de que giravam ao redor da Terra. O Sol e a Lua cruzando o céu, desaparecendo de um lado e surgindo no lado oposto e as estrelas em trajetórias circulares não intrigaram tanto ao homem quanto o movimento dos planetas que, em determinadas épocas do ano, pareciam recuar, para depois seguirem em frente na sua trajetória pelo céu.

11. Teoria Geocêntrica

No início da era cristã (século II), Cláudio Ptolomeu propôs, como tantos outros o haviam feito, um sistema que era capaz de explicar e prever esses movimentos com razoável precisão.

Esse sistema recebeu o nome de **Sistema Geocêntrico** e situava a Terra como centro do universo, em torno da qual se moviam em trajetórias circulares: a Lua, Mercúrio, Vênus, o Sol, Marte, Júpiter e Saturno, nessa ordem.

Para explicar o retrocesso de alguns planetas durante seu movimento, Ptolomeu justificava que o movimento dos planetas era circular em torno de um ponto C (movimento denominado: "epiciclo"), e este é que gira ao redor da Terra, conforme a figura.



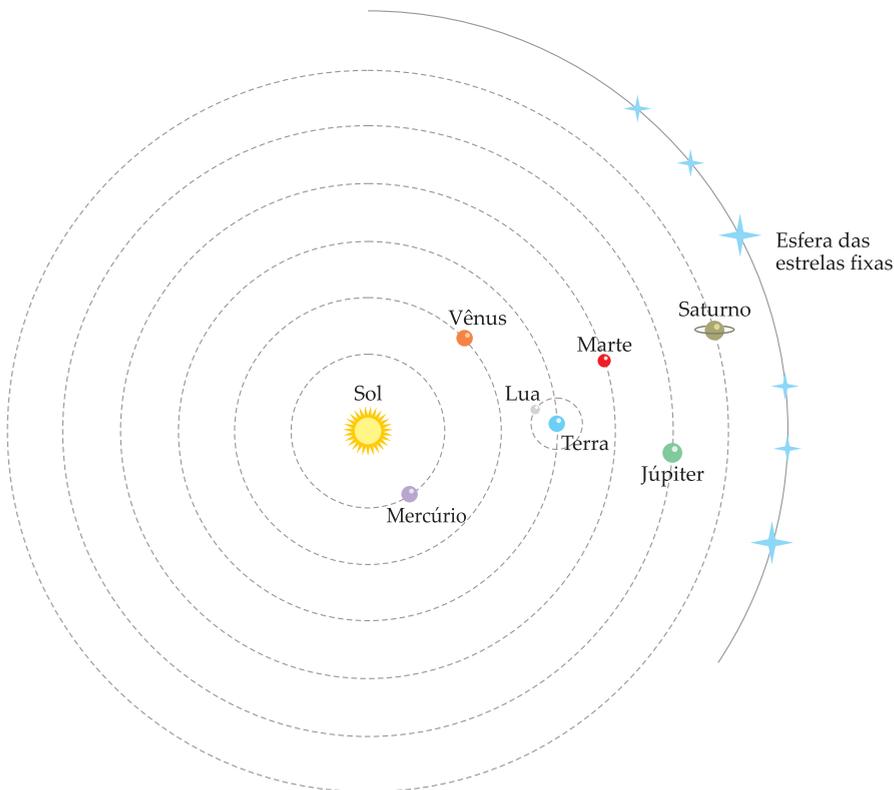
Apesar da complexidade e imprecisão, pois os calendários e as cartas de navegação, nele baseados, precisavam ser corrigidos de tempos em tempos, o sistema de Ptolomeu prevaleceu por catorze séculos.

12. Teoria Heliocêntrica

No século XVI, surge um astrônomo polonês de nome Nicolau Copérnico (1473-1543), propondo um novo modelo para explicar a organização do universo.

Esse modelo recebeu o nome de **Sistema Heliocêntrico**, pois propunha ser o Sol o centro do universo (idéia já proposta, antigamente, por Aristarco e rejeitada pelos outros astrônomos gregos), em torno do qual circulam todos os planetas e a Terra, que também é um planeta. Ao redor da Terra circula a Lua, que é seu satélite.

No sistema de Copérnico havia ainda uma esfera imóvel, na qual situavam-se as estrelas "fixas", já que ele não conseguira perceber que se movimentam, pois estão muito distantes da Terra.



Tycho Brahe (1546-1601), um astrônomo dinamarquês que passou a maior parte de sua vida observando o céu noturno, propôs em 1585 um modelo que, em parte, conciliava os modelos de Ptolomeu e Copérnico.

Seu sistema também era geocêntrico, tendo a Terra como centro, os planetas girando ao redor do Sol e este ao redor da Terra, tudo num mesmo plano.

Em 1600, Tycho Brahe recebeu Johannes Kepler (1571-1630), um jovem astrônomo alemão, a quem encarregou de estudar a órbita de Marte e ajudá-lo a organizar dados coletados durante vinte anos de observações.

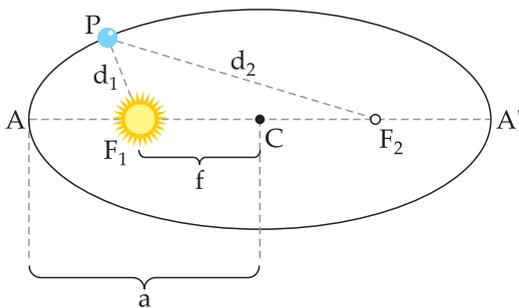
13. Leis de Kepler

Após analisar dados obtidos por Tycho Brahe, que viera a falecer um ano após a sua chegada, Kepler formulou três leis, baseadas no modelo heliocêntrico de Copérnico.

13.1. 1ª Lei: Lei das Órbitas

Os planetas descrevem, ao redor do Sol, órbitas elípticas pouco excêntricas, das quais o Sol ocupa um dos focos.

Tal lei era coerente com o sistema de Copérnico, só discordando deste quanto à forma da órbita dos planetas ao redor do Sol, pois para que houvesse coerência com os dados encontrados, a órbita de Marte só poderia ser uma elipse e não uma circunferência.



Na elipse da figura, o segmento AA' é denominado eixo maior e a medida f do segmento F₁C é a distância focal.

Pela definição de elipse tem-se que, para qualquer ponto da elipse:

$$d_1 + d_2 = 2 \cdot a \quad (\text{constante})$$

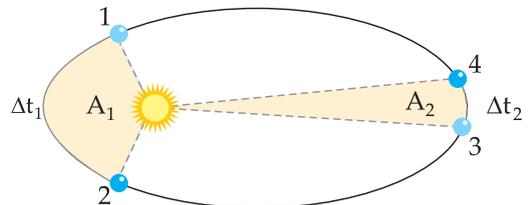
A circunferência é um caso particular da elipse em que os focos são coincidentes entre si e também coincidem com o centro dela.

13.2. 2ª Lei: Lei das Áreas

Esta lei pode ser enunciada de três modos diferentes:

1º modo

O segmento de reta imaginário que une o planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.



Sendo Δt₁ o intervalo de tempo para o planeta ir de 1 para 2, e Δt₂ o intervalo de tempo para ir de 3 para 4, então:

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 \quad \text{implica} \quad A_1 = A_2$$

2º modo

As áreas varridas pelo segmento imaginário que une o planeta ao Sol são proporcionais aos tempos gastos em varrê-las.



Nesse caso, temos $A = K \cdot \Delta t$ onde K é uma constante de proporcionalidade.

3º modo

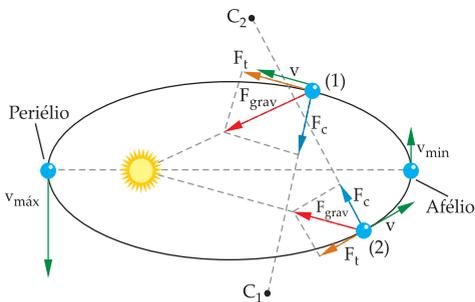
A velocidade areolar de um planeta é constante.

Define-se velocidade areolar como sendo o quociente entre a área varrida A e o intervalo de tempo Δt gasto em varrê-la.

$$v_{\text{areolar}} = \frac{A}{\Delta t} = K \text{ (constante)}$$

Pela 2ª lei de Kepler observamos que o planeta, no mesmo intervalo de tempo, percorre o arco de elipse entre as posições 1 e 2 com uma velocidade média maior do que aquela que tem entre as posições 3 e 4.

Assim, na posição de **periélio** (mais próximo do Sol) a velocidade linear do planeta é **máxima**, e na posição **afélio** (mais distante do Sol) sua velocidade linear é **mínima**.



Essa variação na velocidade do planeta é devida à força de atração do Sol que obriga o planeta a descrever um movimento curvo, ao mesmo tempo que acelera ou retarda seu movimento.

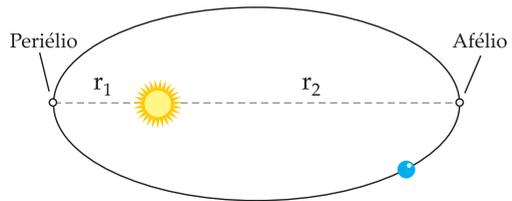
Note que:

- quando o planeta vai do afélio para o periélio, na posição (1) seu movimento é acelerado pois existe uma componente tangencial \vec{F}_t no mesmo sentido da velocidade \vec{v} .
- a componente centrípeta \vec{F}_c tem seu sentido voltado para o ponto C_1 , que é o centro de curvatura da trajetória nesse instante.

- quando o planeta vai do periélio para o afélio, na posição (2) seu movimento é retardado pois a componente tangencial \vec{F}_t é no sentido oposto ao da velocidade \vec{v} .
- a componente centrípeta \vec{F}_c tem seu sentido voltado para o ponto C_2 , que é o centro de curvatura da trajetória nesse outro instante.

13.3. 3ª Lei: Lei dos Períodos

O quadrado do período de translação de um planeta é diretamente proporcional ao cubo do raio médio de sua órbita.



Se T o intervalo de tempo gasto pelo planeta para completar uma volta ao redor do Sol, denominado “período de translação” e R o “raio médio” de sua órbita, tal que:

$$R = \frac{r_1 + r_2}{2}, \text{ podemos escrever:}$$

$$\frac{T^2}{R^3} = K \text{ (constante)}$$

No estudo de satélites em órbita circular de raio r , em torno de um planeta de massa M , deduzimos o valor do período T de translação do satélite e obtivemos o seguinte valor:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M}} \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$$

Tal expressão é condizente com a lei dos períodos de Kepler, considerando-se que as órbitas dos planetas são circunferências de raios iguais a R .

Observe que o valor da constante é:

$$K = \frac{4\pi^2}{G \cdot M} \text{ e que só depende da massa } M \text{ do Sol.}$$

Para os planetas do sistema solar, temos:

$$\frac{T_{\text{Mercúrio}}^2}{R_{\text{Mercúrio}}^3} = \frac{T_{\text{Vênus}}^2}{R_{\text{Vênus}}^3} = \frac{T_{\text{Terra}}^2}{R_{\text{Terra}}^3} = \dots = \frac{T_{\text{Plutão}}^2}{R_{\text{Plutão}}^3}$$

O período de translação do planeta Mercúrio é o menor de todos, pois é o planeta que se encontra mais próximo do Sol, já o período de translação de Plutão é o maior de todos, pois é o planeta que está mais distante do Sol.

Exercícios Resolvidos

01. Dois planetas X e Y gravitam ao redor de uma estrela e suas órbitas são tais que o raio médio R_x da órbita de X é nove vezes o raio R_y da órbita de Y. Qual a razão T_x/T_y entre os períodos de translação dos planetas?

Resolução

Pela 3ª lei de Kepler: $\frac{T^2}{R^3} = K(\text{constante})$

$$\frac{T_x^2}{R_x^3} = \frac{T_y^2}{R_y^3}$$

$$\frac{T_x^2}{T_y^2} = \frac{R_x^3}{R_y^3}$$

$$\left(\frac{T_x}{T_y}\right)^2 = \left(\frac{R_x}{R_y}\right)^3$$

Sendo $R_x = 9 R_y \Rightarrow \frac{R_x}{R_y} = 9$, então

$$\left(\frac{T_x}{T_y}\right)^2 = (3^2)^3 \Rightarrow \left(\frac{T_x}{T_y}\right)^2 = (3^3)^2 \Rightarrow \frac{T_x}{T_y} = 27$$

02. Entre zero hora do dia 1º de janeiro e zero hora de 21 de janeiro, o segmento imaginário que une a Terra ao Sol varre uma área A_1 no espaço. Entre zero hora de 11 de abril e zero hora de 21 de maio varre uma área A_2 . A

razão A_1/A_2 vale:

- a) $1/20$
- b) $1/10$
- c) $1/5$
- d) $1/2$
- e) 1

Resolução

Entre zero hora de 1º de janeiro e zero hora de 21 de janeiro temos $\Delta t_1 = 20$ dias e entre zero hora de 11 de abril e zero hora de 21 de maio temos $\Delta t_2 = 40$ dias.

Pela 2ª lei de Kepler:

$$\frac{A_1}{\Delta t_1} = \frac{A_2}{\Delta t_2}$$

$$\frac{A_1}{20} = \frac{A_2}{40} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{2}$$

Resposta: D







