Física 3

Energia, Impulso e Hidrostática

Pré-Vestibular
Teoria e Exercícios Propostos

EDITORA COC
www.editora.coc.com.br
Editora COC – Empreendimentos Culturais Ltda.
Rua General Celso de Mello Rezende, 301
Tel.: (16) 3603.9700 – CEP 14095-270
Lagoinha – Ribeirão Preto – SP

índice.física 3

Capítulo 01. Trabalho

Capítulo 02. Energia

Capítulo 03. Potência Mecânica

Capítulo 04. Dinâmica Impulsiva

Capítulo 01. Trabalho

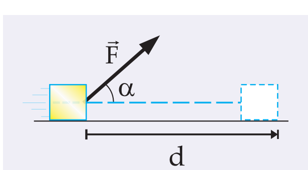
1. Introdução

Em nosso cotidiano, normalmente associamos a palavra **trabalho** a um esforço, em relação a qualquer atividade física ou mental. Mas, em Física, o termo **trabalho** é utilizado em sentido muito particular: a realização de trabalho está associada a uma **transferência de energia**.

A realização de um trabalho exige a presença de uma força, ou seja, o trabalho é **realizado por uma força**. Mas, para que uma força realize trabalho, é necessário que ela aja sobre um corpo que se **movimenta** e apresente uma componente na **direção do deslocamento** do corpo.

2. Trabalho de uma Força Constante

Suponha que um móvel, ao longo de um deslocamento de módulo *d*, sofra a ação de uma força constante de intensidade *F*, inclinada de α com o deslocamento.



O trabalho realizado por essa força, nesse percurso, é uma **grandeza escalar** definida por:

$$\boxed{\mathcal{T}(F) = F \cdot d \cdot \cos\alpha}$$

Pela definição acima, nota-se que o trabalho realizado por uma força constante corresponde ao trabalho de sua componente **tangencial** ao deslocamento ($F_T = F \cdot \cos\alpha$). Isto é:

$$\mathcal{T}(F) = (F \cdot \cos\alpha) \cdot d = F_T \cdot d$$

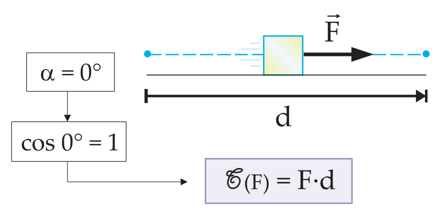
No Sistema Internacional (SI), o trabalho é medido em **joule** (**J**), sendo definido pelo produto das unidades de força (newton) e deslocamento (metro). Ou seja: **J** = **N** · **m**.

Quando o trabalho de uma força sobre um corpo for **positivo** (trabalho *motor*), este representa uma **doação de energia** ao corpo. Quando **negativo** (trabalho *resistente*), este indica uma **retirada de energia** do corpo.

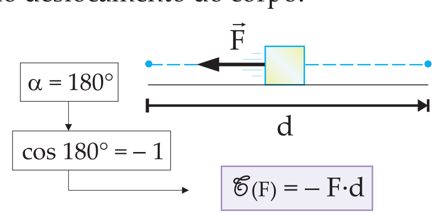
3. Cálculos Usuais

Existem três casos básicos de cálculo de trabalho de uma força constante.

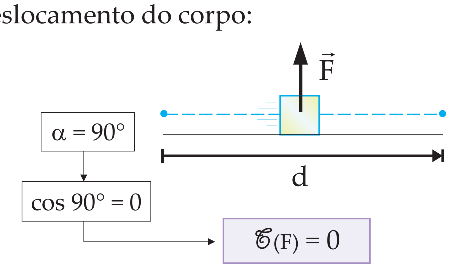
I. Quando a força atua no mesmo sentido do deslocamento do corpo:



II. Quando a força atua em sentido oposto ao deslocamento do corpo:



III. Quando a força for perpendicular ao deslocamento do corpo:

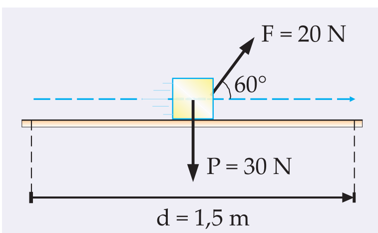


Observação final

Como trabalho é uma grandeza escalar, o **trabalho total** realizado sobre um corpo corresponde à **soma dos trabalhos** realizados por todas as forças atuantes. Esse trabalho **total** coincide com o trabalho realizado pela **força resultante**.

Exercícios Resolvidos

01. Um bloco de peso 30 N desliza 1,5 m sobre uma mesa, puxado por uma força constante de intensidade 20 N, inclinada de 60° com a horizontal.



Nesse deslocamento, determine o trabalho realizado:

a) pela força $\vec{F}$;
b) pela força peso.

Resolução

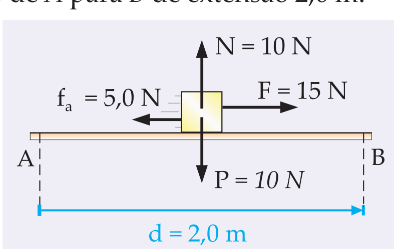
a) $\mathcal{T}(F) = F \cdot d \cdot \cos 60° = 20 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}5$

$$\mathcal{T}(F) = 20 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}5 \Rightarrow \boxed{\mathcal{T}(F) = 15\ \text{J}}$$

b) A força peso é perpendicular ao deslocamento do corpo. Logo, ***não*** *realiza trabalho. Ou seja:*

$$\boxed{\mathcal{T}(P) = 0}$$

02. A figura a seguir mostra as forças constantes que atuaram sobre um corpo no percurso de *A* para *B* de extensão 2,0 m.



No percurso *AB*:

a) que forças não realizaram trabalho?
b) qual o trabalho total realizado sobre o corpo?

Resolução

a) As forças $\vec{P}$ e $\vec{N}$ *não realizam trabalho, pois atuam perpendicularmente ao movimento.*

b) As únicas forças que realizam trabalho são $\vec{F}$ e $\vec{f_a}$*. Logo,*

$$\mathcal{T}_{Total} = \mathcal{T}(F) + \mathcal{T}(f_a)$$
$$\mathcal{T}_{Total} = F \cdot d + (-f_a \cdot d)$$
$$\mathcal{T}_{Total} = 15 \cdot 2{,}0 + (-5{,}0 \cdot 2{,}0)$$
$$\boxed{\mathcal{T}_{Total} = 20\ \text{J}}$$

Podemos também obter o trabalho ***total*** *através do trabalho da força resultante. Isto é:*

$$F_R = F - f_a = 15\,\text{N} - 5{,}0\,\text{N} = 10\,\text{N}$$

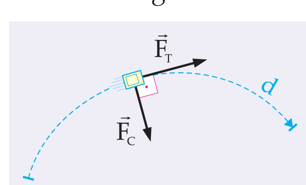
Como a força resultante tem o mesmo sentido do movimento, vem,

$$\mathcal{T}(F_R) = F_R \cdot d = 10 \cdot 2{,}0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{T}(F_R) = 20\ \text{J}}$$

4. Trabalho da Resultante Centrípeta

Neste módulo, vamos analisar o cálculo de trabalho quando realizado por **força variável**, ou seja, força que pode variar em direção, como também em intensidade.

Já sabemos que o trabalho de uma força é realizado por sua componente **tangencial** ao movimento. Por exemplo, um carro, em movimento acelerado numa curva, possui uma força resultante ($\vec{F}_R$) variável. Essa força possui duas componentes: a **componente tangencial** ($\vec{F}_T$) e a **componente centrípeta** ($\vec{F}_C$), como indica a figura abaixo.



Ao longo de um deslocamento linear *d*, nessa curva, $\vec{F}_C$ mantém-se perpendicular ao movimento. Logo, o trabalho realizado pela **força centrípeta** é **nulo**.

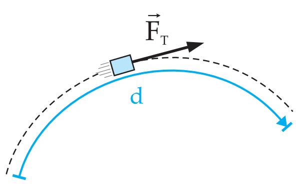
Dessa forma, o trabalho da força resultante é realizado apenas por sua componente tangencial. Se o módulo de $\vec{F}_T$ for **constante**, temos:

$$\boxed{\mathcal{T}(F_R) = \mathcal{T}(F_T) = F_T \cdot d}$$

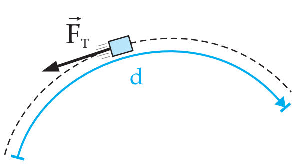
5. Trabalho de uma Força Tangencial

Suponha que um móvel, ao longo de um deslocamento linear *d*, sofra a ação de uma força tangencial $\vec{F}_T$, orientada **a favor** ou **contra** o seu movimento, como indicam as figuras a seguir.

Se o **módulo** de $\vec{F}_T$ for **constante** em cada caso, teremos:

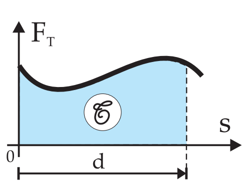


$$\boxed{\mathcal{T}(F_T) = F_T \cdot d}$$



$$\boxed{\mathcal{T}(F_T) = -\,F_T \cdot d}$$

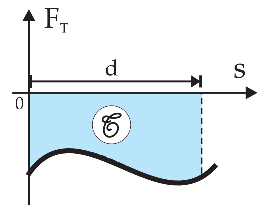
Quando tal força tangencial apresentar **intensidade variável**, ao longo do percurso linear *d*, podemos obter seu trabalho através da área sob o gráfico F_T x *s*, que indica a sua variação com a posição (espaço *s*) do móvel em sua trajetória. Ou seja:



$$\boxed{\mathcal{T}(F_T) = \text{área}}$$

Observação

Se a força tangencial operar em sentido oposto ao movimento, esta será indicada no gráfico com valor algébrico **negativo**. Dessa forma, teremos a área sob o gráfico apresentando um valor algébrico compatível com o seu trabalho, ou seja, **negativo**.



Exercícios Resolvidos

01. Numa curva horizontal, um carro de massa 800 kg percorre um arco de 30 m de extensão, em movimento acelerado, com aceleração escalar constante a = 2,0 m/s². Nesse percurso, qual o trabalho realizado pela resultante das forças atuantes no carro?

Resolução

A força resultante tem seu trabalho realizado por sua componente tangencial ao movimento.

A intensidade constante dessa força tangencial é obtida pela 2ª lei de Newton, assim,

$$F_T = m \cdot a_T = m \cdot |a|$$

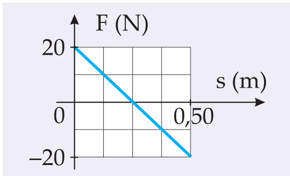
$$F_T = 800 \cdot 2{,}0 \;\Rightarrow\; \boxed{F_T = 1600\,\text{N}}$$

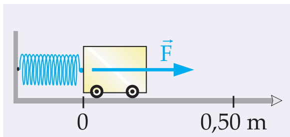
Como o movimento é acelerado, o sentido de $\vec{F}_T$ é o mesmo do movimento. Logo,

$$\mathcal{T}(F_R) = \mathcal{T}(F_T) = F_T \cdot d = 1600 \cdot 30$$

$$\mathcal{T}(F_R) = 48000\,\text{J} \;\Rightarrow\; \boxed{\mathcal{T}(F_R) = 48\,\text{kJ}}$$

02. Um carrinho, preso a uma mola ideal, oscila sobre um plano horizontal entre as posições $s = 0$ e $s = 0{,}50$ m. A força elástica sobre ele tem seu valor algébrico variando com a posição do carrinho, de acordo com o gráfico a seguir.





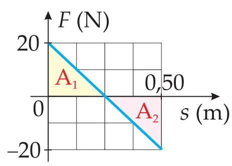
Determine o trabalho realizado pela força elástica sobre o carrinho nos seguintes deslocamentos:

a) de $s = 0$ até $s = 0{,}25$ m;

b) de $s = 0{,}25$ m até $s = 0{,}50$ m.

Resolução

Os trabalhos dessa força variável podem ser obtidos pelas áreas (A_1 e A_2) sob o gráfico dado.

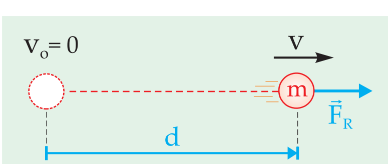


a) $\mathcal{T}(F) = A_1 = \dfrac{20 \cdot 0{,}25}{2} = \boxed{2{,}5\,J}$

b) $\mathcal{T}(F) = A_2 = -\dfrac{20 \cdot 0{,}25}{2} = \boxed{-\,2{,}5\,J}$

6. Energia Cinética

Suponha que um corpo de massa **m**, inicialmente em repouso, seja posto em movimento através de uma força resultante $\vec{F}_R$, suposta constante. Após um deslocamento *d*, o corpo atinge uma velocidade escalar **v**, como indica a figura a seguir.



Para medirmos a quantidade de energia cinética (E_c) cedida ao corpo, vamos calcular o trabalho total realizado por $\vec{F}_R$, em função da velocidade adquirida pelo corpo.

• Pela equação de Torricelli (MUV), vem:

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot d$$

• Como $a = \dfrac{F_R}{m}$ (2ª lei de Newton),

$$v^2 = 2 \cdot \frac{F_R}{m} \cdot d \;\Rightarrow\; \frac{m \cdot v^2}{2} = F_R \cdot d = \mathcal{T}(F_R)$$

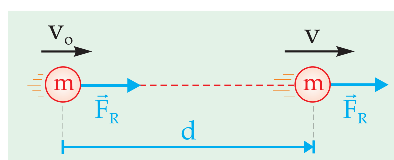
• Portanto:

$$\boxed{E_c = \frac{m \cdot v^2}{2}}$$

No Sistema Internacional (SI), a unidade de medida das grandezas energia e trabalho é o joule (J).

7. Teorema da Energia Cinética

Considere um corpo de massa **m** submetido a uma força resultante $\vec{F}_R$, suposta constante, ao longo de um deslocamento **d**, onde suas velocidades escalares, inicial e final, são $\mathbf{v_0}$ e **v**.



Pelas expressões de Torricelli (MUV) e 2ª lei de Newton, associadas a esse movimento, temos:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot d$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot \frac{F_R}{m} \cdot d$$

$$(v^2 - v_0^2) \cdot \frac{m}{2} = F_R \cdot d$$

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = F_R \cdot d$$

$$E_c - E_{c_0} = \mathcal{T}(F_R)$$

$$\therefore \quad \boxed{\mathcal{T}(F_R) = \Delta E_c}$$

"O trabalho da resultante das forças atuantes em um corpo é igual à variação de sua energia cinética."

Observações

• Embora a demonstração acima tenha sido feita para uma força resultante constante, o teorema da energia cinética é válido em situações em que a força resultante é variável.

• Convém lembrar que o trabalho da força resultante corresponde ao trabalho total, ou seja, à soma dos trabalhos de todas as forças atuantes.

Exercícios Resolvidos

01. Numa pista de provas, um carro de massa 1,20 t parte do repouso e acelera até atingir a velocidade de 108 km/h. Qual a energia cinética adquirida pelo carro?

Resolução

Usando as unidades do Sistema Internacional, temos:

- $m = 1{,}20\ t = 1\ 200\ kg$
- $v = 108\ km/h = 30\ m/s$

Logo: $E_c = \dfrac{m \cdot v^2}{2} = \dfrac{1\ 200 \cdot 30^2}{2}$

$E_c = 540 \cdot 10^3\ J \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_c = 540\ kJ}$

02. Um livro de massa 0,50 kg é lançado sobre uma mesa horizontal com velocidade inicial de 2,0 m/s. Devido exclusivamente ao atrito com a mesa, o livro desliza 1,0 m até parar.

Determine:

a) o trabalho total realizado pela força de atrito sobre o livro;

b) a intensidade dessa força de atrito.

Resolução

a) A força de atrito corresponde à resultante das forças atuantes no livro. Logo, usando o teorema da energia cinética nesse deslizamento, temos:

$$\mathcal{E}(F_R) = \Delta E_c$$

$$\mathcal{E}(f_a) = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

$$\mathcal{E}(f_a) = \frac{0{,}5 \cdot 0^2}{2} - \frac{0{,}5 \cdot 2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}(f_a) = -1{,}0\ J}$$

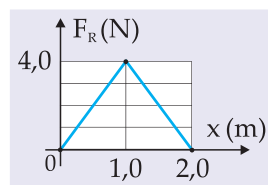
b) Lembrando que o trabalho do atrito dinâmico é negativo, pelo fato dessa força ser oposta ao deslocamento, vem:

$$\mathcal{E}(f_a) = -f_a \cdot d$$

$$-1{,}0 = -f_a \cdot 1{,}0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_a = 1{,}0\ N}$$

Note que o trabalho negativo da força de atrito nesse deslizamento representa a quantidade de energia cinética que o atrito ***retirou*** *do livro. Essa energia dissipada pelo atrito (1,0 J) é, nesse processo, transformada em energia térmica (calor).*

03. Um pequeno bloco de massa 2,0 kg encontra-se em repouso num ponto **O**. A força resultante $\vec{F}_R$ que passa a agir no bloco, o faz mover-se ao longo de um eixo **Ox**. A intensidade da força resultante varia com a posição (**x**) do bloco, conforme o gráfico. Qual o módulo da velocidade atingida pelo bloco quando ele passa pela posição **x** = 2,0 m?



Resolução

1) A área do triângulo, sob o gráfico dado, representa o trabalho realizado pela força resultante nos 2,0 m iniciais de percurso do bloco. Ou seja:

$$\mathcal{E}(F_R) = \text{área} = \frac{2{,}0 \cdot 4{,}0}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}(F_R) = 4{,}0\ J}$$

2) Pelo teorema da energia cinética, temos:

$$\mathcal{E}(F_R) = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

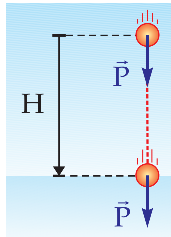
$$4{,}0 = \frac{2 \cdot v^2}{2} - \frac{2 \cdot 0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 2{,}0\ m/s}$$

8. Trabalho do Peso

Nota-se o peso de um corpo usualmente trabalhando em deslocamentos verticais próximos da superfície da Terra, ou seja, quando o corpo desce ou sobe uma certa altura H.

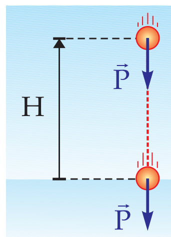
Na descida, a força peso possui o mesmo sentido do movimento. Logo, ela realiza um trabalho motor (positivo) que é dado por:

$$\boxed{\mathcal{T}(P) = P \cdot H}$$

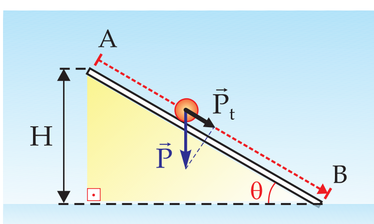


Já na subida, a força peso se opõe ao movimento, realizando assim um trabalho resistente (negativo) e expresso por:

$$\boxed{\mathcal{T}(P) = -\,P \cdot H}$$



Observemos agora a descida de um corpo ao longo de uma rampa, desde seu topo (A) até sua base (B).



Nessa descida, o trabalho da força peso é realizado por sua componente tangencial ($P_t = P \cdot \text{sen}\,\theta$) que atua no mesmo sentido do deslocamento (AB). Logo:

$$\mathcal{T}(P) = P_t \cdot AB = (P \cdot \text{sen}\,\theta) \cdot AB$$

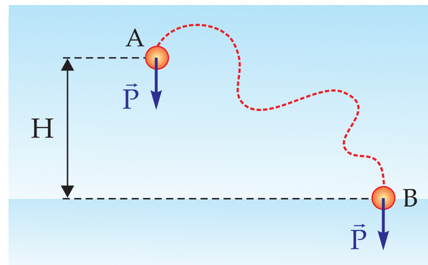
Como geometricamente $H = AB \cdot \text{sen}\,\theta$,

$$\mathcal{T}(P) = P \cdot \underbrace{AB \cdot \text{sen}\,\theta}_{H} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}(P) = P \cdot H$$

Conclusão: o trabalho realizado nesse caso equivale ao ocorrido num deslocamento vertical.

Isso mostra que o trabalho do peso não depende da trajetória executada, mas sim do desnível (H) existente entre as posições inicial e final.

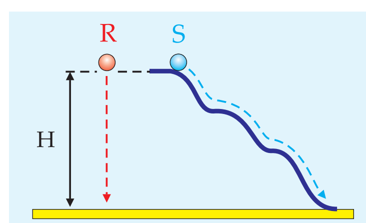
A partir disso, podemos generalizar o trabalho da força peso ao longo de uma trajetória qualquer, próxima à superfície da Terra, assim:



- De A para B: $\boxed{\mathcal{T}(P) = P \cdot H}$
- De B para A: $\boxed{\mathcal{T}(P) = -\,P \cdot H}$

Exercícios Resolvidos

01. Dois corpos, R e S, possuem o mesmo peso e são abandonados de uma mesma altura H, como indica a figura.



Enquanto R desce em queda livre, o corpo S desliza sem atrito por um tobogã.

Compare os trabalhos realizados pelos pesos de cada corpo na descida até o solo.

Resolução

Já que o trabalho da força peso não depende da trajetória, os trabalhos realizados pelos pesos (iguais) dos corpos, após descerem o mesmo desnível (H), são ***iguais****. Isto é:* $\mathcal{T}(P)_R = \mathcal{T}(P)_S = P \cdot H$.

02. Uma bolinha de massa 0,20 kg é solta, sem velocidade, de uma altura H = 80 m acima do solo. Adote g = 10 m/s². Devido à resistência do ar, a bolinha chega ao solo com velocidade de módulo 20 m/s. Determine nessa descida até o solo o trabalho realizado sobre a bolinha:

a) pela força peso;

b) pela força de resistência do ar.

Resolução

a) $\mathcal{T}(P) = P \cdot H = mg \cdot H = 0{,}20 \cdot 10 \cdot 80$

$\boxed{\mathcal{T}(P) = 1{,}6 \cdot 10^2\ J}$

b) *Usando o teorema da energia cinética, temos:*

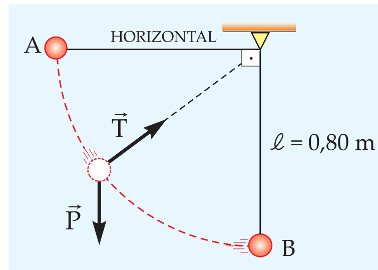
$$\mathcal{T}(F_R) = \Delta E_c$$

$$\mathcal{T}(P) + \mathcal{T}(R_{ar}) = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

$$160 + \mathcal{T}(R_{ar}) = \frac{0{,}20 \cdot 20^2}{2} - \frac{0{,}20 \cdot 0^2}{2}$$

$$160 + \mathcal{T}(R_{ar}) = 40 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{T}(R_{ar}) = -1{,}2 \cdot 10^2\ J}$$

03. A figura a seguir mostra a descida pendular de uma pequena esfera de peso 10 N presa a um fio de 0,80 m de comprimento, após ser solta (sem velocidade) do ponto *A*. Considere a esfera sob a ação exclusiva das forças peso e tração do fio.



Calcule:

a) o trabalho da resultante das forças atuantes na esfera no trecho *AB*;

b) a energia cinética da esfera em *B*.

Resolução

a) $\mathcal{T}(P) = P \cdot H = 10 \cdot 0{,}80 \Rightarrow \mathcal{T}(P) = 8{,}0\ J$

$\mathcal{T}(T) = 0$ ($\vec{T}$ *é perpendicular ao movimento*)

$\mathcal{T}(F_R) = \mathcal{T}(P) + \mathcal{T}(T) = 8{,}0\ J + 0$

$\boxed{\mathcal{T}(F_R) = 8{,}0\ J}$

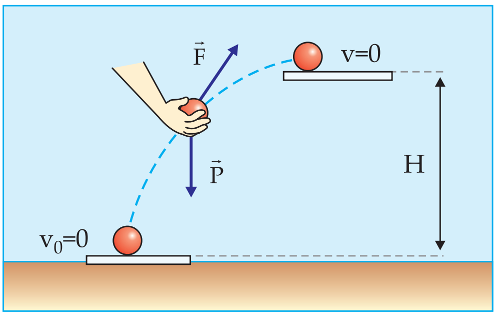
b) *Pelo teorema da energia cinética, temos:*

$$\mathcal{T}(F_R) = \Delta E_c$$

$$8{,}0 = E_c - 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_c = 8{,}0\ J}$$

Capítulo 02. Energia

1. Trabalho para Levantar um Corpo



Quando elevamos um corpo de peso $\vec{P}$ até uma certa altura H, como sugere a figura acima, o trabalho realizado pela força levantadora $\vec{F}$ pode ser obtido através do teorema da energia cinética. Observe:

$$\mathcal{T}_{Total} = \Delta E_c$$

$$\mathcal{T}(F) + \mathcal{T}(P) = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Como são nulas as velocidades inicial e final do corpo, o trabalho total será nulo. Logo:

$$\mathcal{T}(F) + \mathcal{T}(P) = 0$$

$$\mathcal{T}(F) + (-P \cdot H) = 0$$

$$\therefore \boxed{\mathcal{T}(F) = P \cdot H}$$

Note que o trabalho realizado pela força levantadora não depende da trajetória descrita e seria o mesmo se o corpo fosse erguido em movimento uniforme ($\Delta E_c = 0$).

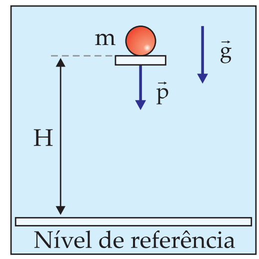
2. Energia Potencial Gravitacional

No levantamento de um corpo, sem que ocorra variação de sua energia cinética, o trabalho realizado pelo operador representa a energia que está sendo **doada** ao corpo. Essa energia, associada à posição (altura) do corpo no campo gravitacional uniforme, denomina-se **energia potencial gravitacional** (E_{pg}). Sua medida é dada pelo produto do peso do corpo pela altura em que se posiciona. Isto é:

$$\boxed{E_{pg} = P \cdot H}$$

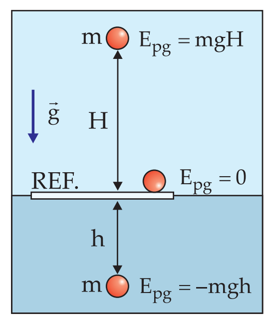
ou

$$\boxed{E_{pg} = m \cdot g \cdot H}$$

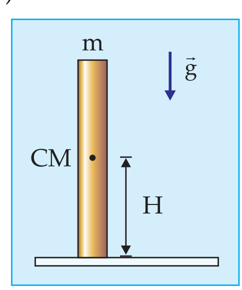


Repare que tal energia potencial é relativa a um nível de referência (nível onde se adota $H = 0$ e, portanto, $E_{pg} = 0$).

Assim, quanto mais alto o corpo estiver, mais energia potencial o corpo terá em relação ao nível de referência adotado. Se o corpo estiver abaixo do nível adotado, a sua energia potencial será **negativa** (indicando que o corpo carece de energia para chegar ao nível de referência).



Quando se tratar de um corpo extenso (um poste, por exemplo) num campo de gravidade uniforme, sua energia potencial gravitacional estará definida pela altura de seu **centro de massa**.



Todo corpo homogêneo e com massa uniformemente distribuída tem seu centro de massa (CM) coincidente com seu centro geométrico (baricentro).

Exercícios Resolvidos

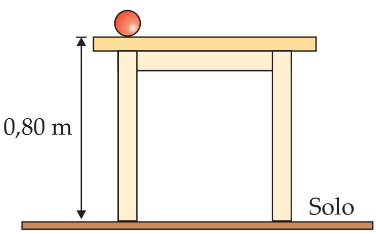
01. Uma bibliotecária apanha um livro do chão e o deposita numa prateleira a 2,0 m de altura do solo. Sabendo que o peso do livro vale 5,0 N e desconsiderando o seu tamanho, qual o mínimo trabalho, em joules, realizado pela bibliotecária nessa operação?

Resolução

Supondo que no final do levantamento o livro não possua velocidade ($\Delta E_c = 0$), temos:

$$\mathcal{E}(F) = P \cdot H = 5{,}0 \cdot 2{,}0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}(F) = 10\ J}$$

02. Uma bolinha de massa 0,10 kg, assimilável a um ponto material, encontra-se sobre uma mesa horizontal de altura 0,80 m, como indica a figura.



Calcule, admitindo g = 10 m/s², a energia potencial gravitacional da bolinha:

a) em relação ao plano da mesa;

b) em relação ao solo.

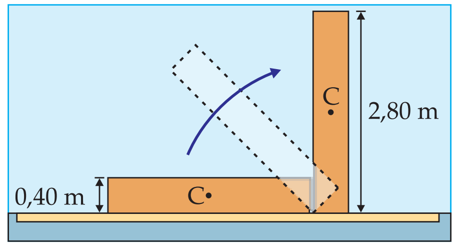
Resolução

a) $h = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{pg} = 0$

b) $E_{pg} = m \cdot g \cdot H = 0{,}10 \cdot 10 \cdot 0{,}80$

$$\therefore \quad \boxed{E_{pg} = 0{,}80\ J}$$

03. Um pilar de concreto de massa 1,0 t, deitado sobre o solo horizontal, é posto verticalmente de pé (como mostra a figura a seguir) usando-se um guindaste. Considere o centro de massa do pilar coincidente com o seu centro geométrico (C).



Nessa operação, adotando g = 10 m/s², quanto de energia potencial gravitacional foi adicionada ao pilar?

Resolução

O acréscimo ocorrido na energia potencial do pilar de 1000 kg foi promovido pela variação de altura (elevação) do centro de massa do pilar. Isto é, o seu centro (C) eleva-se de $h_1 = 0{,}20$ m (quando deitado) para $h_2 = 1{,}40$ m (quando de pé).

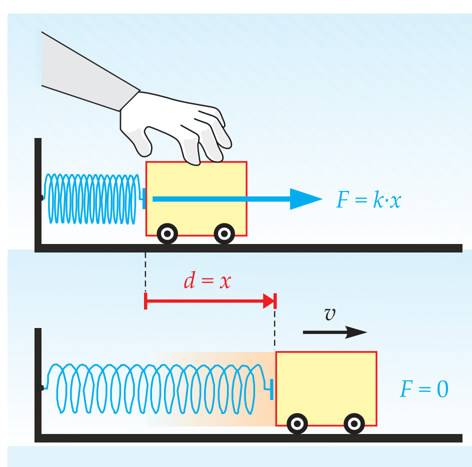
Dessa forma, temos:

$$\Delta E_{pg} = m \cdot g \cdot \Delta H = 1000 \cdot 10 \cdot (1{,}40 - 0{,}20)$$

$$\therefore \quad \Delta E_{pg} = 12 \cdot 10^3\ J = \boxed{12\ kJ}$$

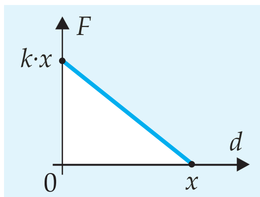
3. Trabalho da Força Elástica

Considere um carrinho encostado em uma mola de constante elástica **k** e comprimida de **x**, como mostra a figura a seguir. Ao ser liberado, a mola o impulsiona com uma força elástica de intensidade inicial F = k · x.

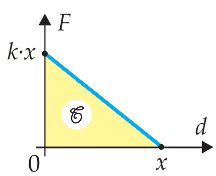


À medida que o corpo se desloca, a deformação da mola diminui, o que acarreta uma diminuição da intensidade da força elástica. Após a mola ficar indeformada, o carrinho perderá contato com ela e, portanto, não sofrerá mais a ação da mola (F = 0).

O gráfico ao lado relata essa decadência da intensidade da força elástica, em função da distância (d) percorrida pelo carrinho.



Nesse impulso, o trabalho total realizado pela força elástica pode ser obtido pela área do triângulo sob o gráfico.



$$\mathcal{T}(F) = \frac{k \cdot x^2}{2}$$

A expressão anterior define o trabalho motor da força elástica sobre um corpo, até que a mola fique relaxada, esteja ela inicialmente comprimida ou tracionada.

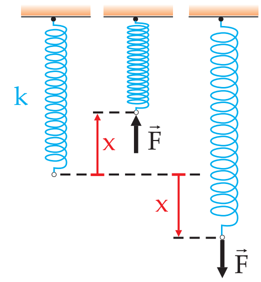
Entretanto, se a mola estiver inicialmente relaxada e for comprimida ou tracionada por um corpo, a força elástica atuará em oposição à sua deformação (x), realizando um trabalho resistente dado, analogamente, por:

$$\mathcal{T}(F) = -\frac{k \cdot x^2}{2}$$

4. Energia Potencial Elástica

Quando uma mola deformada (comprimida ou tracionada) executa trabalho positivo sobre um corpo, isso representa a quantidade de energia que ela transfere ao corpo. Logo, toda mola deformada armazena uma energia, transferível via trabalho da força elástica, a qual denominamos energia potencial elástica (E_{pe}). Sua medida é prevista pelo trabalho total que a força elástica pode realizar até a mola relaxar, ou pelo trabalho que se executa quando se deforma uma mola inicialmente relaxada. Isto é:

$$E_{pe} = \frac{k \cdot x^2}{2}$$



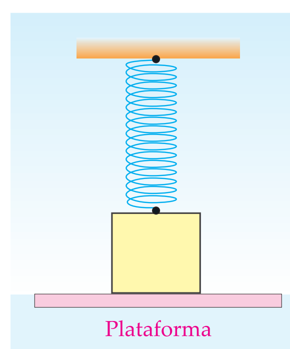
Repare que tal energia potencial nunca será negativa, pois $k > 0$ e $x^2 \geq 0$.

No Sistema Internacional de unidades:

- constante elástica (k) $\rightarrow$ N/m
- deformação (x) $\rightarrow$ m
- energia (E_{pe}) $\rightarrow$ J

Exercícios Resolvidos

01. Um bloco encontra-se em repouso sobre uma plataforma horizontal e preso, como mostra a figura, a uma mola de massa desprezível e indeformada, cuja constante elástica vale 50 N/m. Quando a plataforma é puxada rapidamente para baixo, o bloco cai e estica a mola. Sabendo-se que o bloco desce 1,0 m até parar, qual o trabalho realizado pela força elástica sobre ele na descida?



Resolução

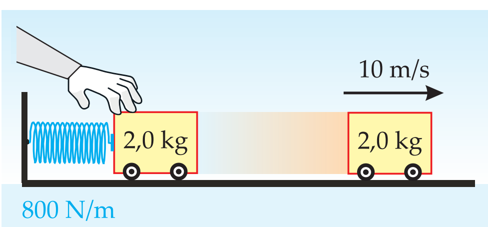
A altura que o bloco irá descer corresponde à deformação máxima que será imposta à mola, ou seja: $x = H = 1{,}0$ m. *Como a força elástica traciona o* *bloco contra a sua descida, seu trabalho é resistente e dado por:*

$$\mathscr{E}(F) = -\frac{k \cdot x^2}{2} = -\frac{50 \cdot 1{,}0^2}{2} \Rightarrow \boxed{\mathscr{E}(F) = -25\,\text{J}}$$

Observação

Este trabalho negativo representa o quanto de energia que a mola extraiu do bloco na queda para armazenar em si.

02. O carrinho de massa 2,0 kg é disparado, a partir do repouso, por uma mola comprimida de constante elástica 800 N/m, adquirindo a velocidade de 10 m/s ao abandoná-la. Despreze qualquer atrito.



a) Qual o trabalho realizado pela força elástica nesse disparo?

b) Qual a deformação que tinha a mola no início do disparo?

Resolução

a) Pelo teorema da energia cinética, sabemos que a força elástica (por ser a força resultante) tem seu trabalho dado pela energia cinética adquirida pelo carrinho. Ou seja:

$$\mathscr{E}(F) = E_c = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{2{,}0 \cdot 10^2}{2}$$

$$\therefore \boxed{\mathscr{E}(F) = 100\ J}$$

b) $$\mathscr{E}(F) = \frac{k \cdot x^2}{2}$$

$$100 = \frac{800 \cdot x^2}{2} \Rightarrow \boxed{x = 0{,}50\,m}$$

03. Qual a energia potencial armazenada em uma mola elástica quando distendida de 10 cm por uma força de tração de 50 N?

Resolução

- $F = k \cdot x$

$$50 = k \cdot 0{,}10 \Rightarrow k = 500\ N/m$$

- $E_{pe} = \dfrac{k \cdot x^2}{2} = \dfrac{500 \cdot 0{,}10^2}{2} \Rightarrow \boxed{E_{pe} = 2{,}5\ J}$

5. Energia Mecânica

A energia mecânica (E_m) de um corpo ou de um sistema de corpos corresponde à soma das energias cinética e potencial.

$$E_m = E_c + E_{pg} + E_{pe}$$

$$E_c = \frac{mV^2}{2} \qquad E_{pg} = mgH \qquad E_{pe} = \frac{kX^2}{2}$$

Como já vimos, qualquer que seja a forma de energia mecânica (cinética, potencial gravitacional ou potencial elástica), a sua unidade, no Sistema Internacional (SI), é o joule (J).

6. Forças Conservativas

Dizemos que as forças atuantes num corpo ou num sistema são conservativas quando seus trabalhos não alteram a sua energia mecânica.

> *Uma força é conservativa quando trabalha no sentido de transformar, exclusivamente, energia potencial em energia cinética ou vice-versa.*

Logo, são conservativas todas as forças cujo trabalho estiver associado com alguma energia potencial. Como exemplo disso, temos: a força peso e a força elástica (sempre conservativas).

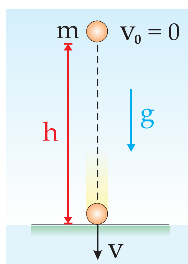
Todas as forças que não realizarem trabalho ($\mathscr{T}$ = 0) também serão conservativas. Por exemplo: força centrípeta, força normal num deslizamento sobre uma pista fixa, etc.

7. Conservação da Energia Mecânica

A energia mecânica de um sistema se mantém constante quando nele só operam forças do tipo conservativas: força peso, força elástica e forças cujo trabalho total é nulo.

SISTEMA CONSERVATIVO $\Rightarrow$ $\boxed{E_{m_{\text{inicial}}} = E_{m_{\text{final}}}}$

Como exemplo, analisemos o que ocorre com a energia mecânica de um corpo de massa **m** em queda livre (sem resistência do ar), após ser abandonado de uma altura **H** acima do solo, como indica a figura ao lado.



Observe que a energia mecânica inicial do corpo é apenas a sua energia potencial inicial (pois, sem velocidade, sua energia cinética inicial é nula).

$$E_{m_{\text{inicial}}} = E_{pg} \Rightarrow \boxed{E_{m_{\text{inicial}}} = m\,g\,H}$$

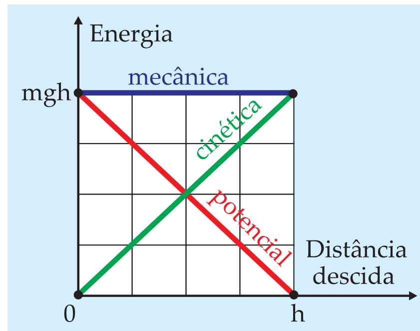
No final da queda, o corpo não possui mais energia potencial em relação ao solo. Logo, a sua energia mecânica corresponde à energia cinética que ele adquiriu através do trabalho da força peso. Pelo teorema da energia cinética, vem:

$$\mathscr{T}(P) = E_c - E_{c_0}$$

$$m\,g\,H = E_c \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_{m_{\text{final}}} = m\,g\,H}$$

Conclusão: $\boxed{E_{m_{\text{inicial}}} = E_{m_{\text{final}}}}$

Graficamente podemos mostrar que, à medida que o corpo desce, a sua energia potencial diminui, pois vai se transformando em energia cinética, de forma que a soma dessas energias (energia mecânica) permanece constante.

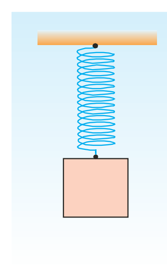


Observação

Um bom sinal de que vai ocorrer conservação de energia mecânica é a ausência de forças dissipativas (atrito dinâmico e resistência do ar) que normalmente transformam a energia mecânica (perdida) em energia térmica (calor).

Exercícios Resolvidos

01. Um bloco de peso igual a 10 N, preso a uma mola de constante elástica 50 N/m e inicialmente indeformada, é solto (sem velocidade) e cai verticalmente pela ação da gravidade. Desprezando a resistência do ar, responda:



a) Esse conjunto massa-mola é um sistema conservativo?

b) Qual a altura que o corpo irá descer até parar?

Resolução

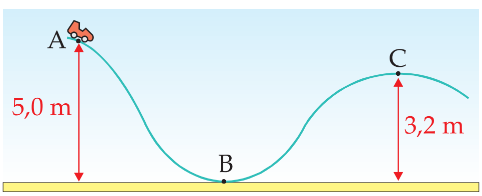
a) Sim, pois as forças peso e elástica, únicas atuantes durante o movimento, são conservativas.

b) A altura que o bloco irá descer, até parar, corresponde à deformação máxima que será imposta à mola, ou seja: $\boldsymbol{x = h}$ *. Usando a conservação de energia em relação ao ponto mais baixo do movimento, vem:*

$$E_{m_{inicial}} = E_{m_{final}}$$

$$mgh = \frac{k \cdot h^2}{2} \Rightarrow h = \frac{2mg}{k} = \frac{2 \cdot 10N}{50\,N/m} = \boxed{0{,}40\,m}$$

02. O carrinho da montanha-russa da figura parte do repouso em A e atinge os pontos B e C, sem perder contato com os trilhos.



Desprezando os possíveis atritos e adotando $g = 10\ m/s^2$, obtenha o módulo da velocidade do carrinho:

a) no ponto *B*;

b) no ponto *C*.

Resolução

A força peso e a força normal, atuantes no carrinho, são conservativas. Logo: $Em_A = Em_B = Em_C$.

$$a)\ mgh_A = \frac{m \cdot v_B^2}{2}$$

$$v_B = \sqrt{2gh_A} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5} \Rightarrow \boxed{v_B = 10\,m/s}$$

$$b)\ mgh_A = \frac{m \cdot v_C^2}{2} + mgh_C$$

$$v_C = \sqrt{2g(h_A - h_C)} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1{,}8} \Rightarrow \boxed{v_B = 6\,m/s}$$

8. Teorema da Energia Mecânica

Em vários movimentos do cotidiano podemos observar que a energia mecânica pode variar.

Por exemplo, quando erguemos um produto para depositá-lo sobre uma prateleira, estamos nesse levantamento aumentando a sua energia mecânica, por incrementar sua energia potencial.

Por outro lado, quando um carro freia numa pista horizontal, há uma óbvia diminuição de energia mecânica ocasionada pela redução, por atrito, de energia cinética do carro.

A energia mecânica (E_m) de um corpo ou de um sistema de corpos pode aumentar ou diminuir, quando parte da forças atuantes não forem conservativas.

O trabalho total realizado pelas forças não-conservativas representa a variação que ocorrerá na energia mecânica.

Ou seja:

$$\boxed{E_{m_{final}} = E_{m_{inicial}} + \mathscr{E}_{\text{forças não-conservativas}}}$$

9. Sistemas Dissipativos

Dizemos que um sistema é dissipativo quando atuam forças não-conservativas, como a resistência de fluidos e o atrito dinâmico, motivando uma diminuição de energia mecânica. Essa energia mecânica perdida (dissipada), via trabalho das forças dissipativas, transforma-se, principalmente, em energia térmica (calor).

Podemos resumir isso assim:

$$\boxed{E_{m_{diss}} = E_{m_{inicial}} - E_{m_{final}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathscr{E}_{diss} = \Delta E_m}$$

Exercícios Resolvidos

01. Uma bola de 0,40 kg de massa despenca, sem velocidade, do topo de um prédio de altura 20 m, atingindo o solo com velocidade de 10 m/s. Usando g = 10 m/s², calcule a energia mecânica dissipada nessa descida da bola.

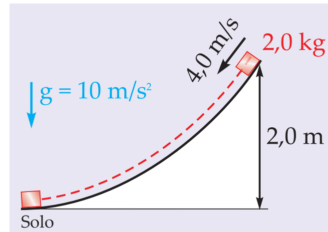
Resolução

$$E_{m_{inicial}} = mgH = 0{,}40 \cdot 10 \cdot 20 \Rightarrow E_{m_{inicial}} = 80\ J$$

$$E_{m_{final}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{0{,}40 \cdot 10^2}{2} \Rightarrow E_{m_{final}} = 20\ J$$

$$E_{m_{diss}} = E_{m_{inicial}} - E_{m_{final}} = 80 - 20 \Rightarrow \boxed{E_{m_{diss}} = 60\ J}$$

02. Lança-se uma caixa de massa 2,0 kg com velocidade inicial de 4,0 m/s, a partir do topo de um escorregador de altura 2,0 m. A caixa desliza até parar na base da rampa. Qual o trabalho total realizado pelo atrito da rampa sobre a caixa?



Resolução

$$e_{diss} = E_{m_{final}} - E_{m_{inicial}} = 0 - \left(\frac{mv^2}{2} + mgH\right)$$

$$e_{diss} = -\left(\frac{2{,}0 \cdot 4{,}0^2}{2} + 2{,}0 \cdot 10 \cdot 2\right) \Rightarrow \boxed{e_{diss} = -\ 56\ J}$$

Capítulo 03. Potência Mecânica

1. Definição

Define-se **potência mecânica** como a grandeza escalar que indica a **rapidez** com que um dispositivo **transfere** ou **transforma energia mecânica**, através do trabalho de sua força.

No Sistema Internacional (SI), mede-se potência em **joule por segundo**, que recebe o nome de **watt** (**W**). Ou seja: ***W* = J/s**.

Por exemplo, se uma empilhadeira, no ato de levantar uma caixa, operar com potência mecânica de 500 W, isso significa que tal dispositivo estará transferindo à caixa 500 joules de energia mecânica a cada 1 segundo.

Existem outras unidades de potência, como as históricas **HP** (*horse-power*) e **CV** (cavalo-vapor), hoje em progressivo desuso. As relações dessas unidades com o **watt** são as seguintes: 1 HP = 746 W e 1 CV = 735 W.

2. Potência Média

Consideremos um dispositivo que realize, através de sua força aplicada, um trabalho $\mathcal{T}$ num certo intervalo de tempo Δt. Esse trabalho representa a quota de energia mecânica (ΔE_m) que tal dispositivo transfere nesse tempo. Logo, a **potência média** (Pot_m) desse dispositivo é dada por:

$$\boxed{Pot_m = \frac{\mathcal{T}}{\Delta t} = \frac{\Delta E_m}{\Delta t}}$$

Exercícios Resolvidos

01. Numa pista horizontal de provas, um carro de massa 800 kg consegue variar sua velocidade de 0 a 90 km/h, num prazo de 10 segundos. Desprezando dissipações, qual a potência média do motor desse carro nessa arrancada?

Resolução

A energia mecânica que o motor transfere ao carro, via trabalho, é a energia cinética adquirida no final da arrancada. Como 90 km/h = 25 m/s, temos:

$$\mathcal{T} = E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{800 \cdot 25^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T} = 250.000 \text{ J}$$

Logo, a potência média do motor é dada por:

$$Pot_m = \frac{\mathcal{T}}{\Delta t} = \frac{250.000 \text{ J}}{10 \text{ s}} = 25.000 \text{ W} = \boxed{25 \text{ kW}}$$

02. Uma empilhadeira ergue uma caixa de peso 4,0 kN, a partir do solo, até uma altura de 2,0 m em 16 segundos. Qual a sua potência média nesse levantamento?

Resolução

Nesse levantamento, a caixa ganha energia potencial gravitacional através do trabalho realizado pela força da empilhadeira. Assim:

$$\mathcal{T} = E_{pg} = P \cdot H = 4{,}0 \text{ kN} \cdot 2{,}0 \text{ m} = 8{,}0 \text{ kJ}$$

$$Pot_m = \frac{\mathcal{T}}{\Delta t} = \frac{8{,}0 \text{ kJ}}{16 \text{ s}} = \boxed{0{,}50 \text{ kW}}$$

03. Deseja-se construir uma usina hidrelétrica aproveitando uma queda-d'água de altura **H** e vazão média **Z**. Adotando **g** para o valor da gravidade local e **d** para a densidade da água, qual a potência média máxima que se pode extrair dessa usina?

Resolução

A energia mecânica (máxima), que pode ser transformada em elétrica nessa usina, corresponde à energia potencial gravitacional que as águas podem ceder ao despencarem da altura H. Logo:

$$Pot_m = \frac{E_{pg}}{\Delta t} = \frac{m \cdot g \cdot H}{\Delta t} = \frac{(d \cdot Vol) \cdot g \cdot H}{\Delta t}$$

$$\textit{Como } \frac{Vol}{\Delta t} = Z \textit{ (vazão), vem:}$$

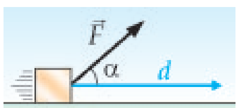
$$\therefore \quad \boxed{Pot_m = d \cdot Z \cdot g \cdot H}$$

3. Potência Instantânea

Vimos que a grandeza **potência mecânica média** indica a energia mecânica que um dispositivo transfere a um corpo, em média, a cada unidade de tempo.

Como tal energia é transferida via trabalho da força exercida pelo dispositivo sobre o corpo, podemos, no caso de essa força ser constante, exprimir a potência média assim:

$$Pot_m = \frac{\mathcal{T}(F)}{\Delta t} = \frac{F \cdot d \cdot \cos\alpha}{\Delta t}$$



Como a razão $d/\Delta t$ representa a intensidade da **velocidade média** (v_m) do corpo, temos:

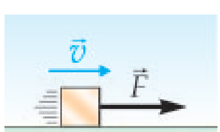
$$Pot_m = F \cdot \frac{d}{\Delta t} \cdot \cos\alpha = F \cdot v_m \cdot \cos\alpha$$

Logo, para valores instantâneos, teríamos a **potência instantânea** definida por:

$$\boxed{Pot = F \cdot v \cdot \cos\alpha}$$

Quando a força orientar-se no **mesmo sentido** da velocidade, teremos $\alpha = 0°$. Sendo $\cos 0° = 1$, vem:

$$\boxed{Pot = F \cdot v}$$

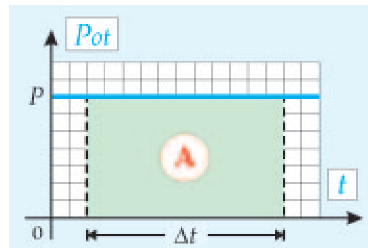


Vale lembrar que a unidade de potência no SI é o **watt** (**W**), que significa **joule** por **segundo**. Pela definição acima, podemos também escrever:

$$\boxed{W = \frac{J}{s} = N \cdot \frac{m}{s}}$$

4. Diagrama Horário da Potência

Consideremos uma situação em que a potência instantânea de uma força seja constante no decorrer do tempo:

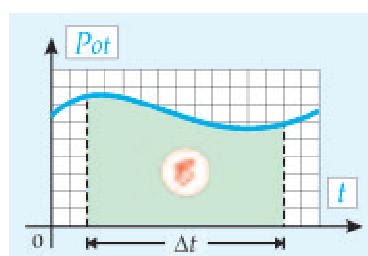


Num certo intervalo de tempo (Δt), a área (A) destacada acima representa fisicamente o **trabalho** realizado pela força.

Observe:

$$\text{área} = Pot \cdot \Delta t = \frac{\mathcal{T}(F)}{\Delta t} \cdot \Delta t \Rightarrow \boxed{\mathcal{T}(F) = \text{área}}$$

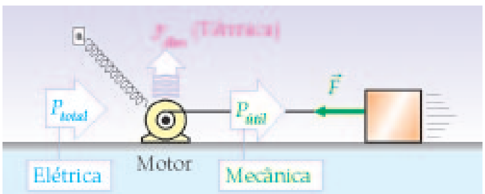
Mesmo para uma potência variável no decurso do tempo, a **área** sob a curva do gráfico *potência* x *tempo* fornecerá o **trabalho** (ou a energia transferida) num certo prazo (Δt).



5. Rendimento

Toda máquina, ao executar trabalho, está transferindo energia mecânica no decorrer do tempo, ou seja, possui uma potência mecânica denominada **útil** ($P_{útil}$).

Para poder operar, tais máquinas precisam receber energia externa durante seu funcionamento. Isto é, devem ter uma potência de entrada, usualmente chamada de **total** (P_{total}), sendo que parte desta normalmente é dissipada internamente (por atritos, aquecimento etc.).



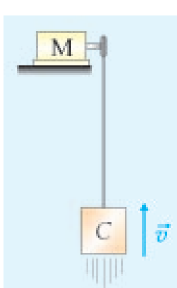
Chamamos de **eficiência** ou **rendimento** (**η**) de uma máquina a razão entre a potência útil e a potência total.

$$\boxed{\eta = \frac{P_{útil}}{P_{total}}} \qquad (0 \le \eta \le 1)$$

Quando dizemos, por exemplo, que um motor elétrico possui um redimento mecânico de 90% ($\eta = 0{,}90$), isso significa que sua potência mecânica útil é 90% da potência elétrica de consumo (P_{total}).

Exercícios Resolvidos

01. A figura abaixo mostra um motor elétrico (M) erguendo verticalmente uma caixa (C) de massa 80 kg, com velocidade constante de 1,5 m/s. Considerando $g = 10\ m/s^2$ e desprezando o efeito do ar, determine:



a) a potência mecânica útil do motor;

b) o rendimento do motor, sabendo-se que ele consome uma potência elétrica total de 1,5 kW nessa operação.

Resolução

a) Como a caixa encontra-se em equilíbrio dinâmico (MRU), a força que o motor exerce na caixa tem intensidade igual ao peso dela. Isto é:

$$F_{motor} = P = mg = 800\ N$$

Logo:

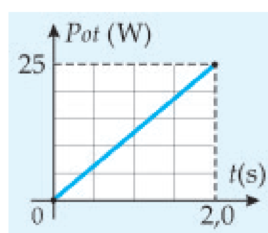
$$Pot = F \cdot v = 800 \cdot 1{,}5$$

$$Pot = 1.200\,W \quad \Rightarrow \quad \boxed{Pot = 1{,}2\,kW}$$

b) Sendo 1,2 kW a potência útil, temos:

$$\eta = \frac{P_{útil}}{P_{total}} = \frac{1{,}2\,kW}{1{,}5\,kW} = 0{,}80 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta = 80\%}$$

02. Um corpo de massa 2,0 kg parte do repouso e percorre uma certa trajetória retilínea sob a ação de uma força resultante constante, cuja potência é dada pelo diagrama horário anexo. Qual o módulo da velocidade do corpo no instante t = 2,0 s ?



Resolução

*A área sob o gráfico **Pot** x **t** representa o trabalho e este, a variação de energia cinética do corpo. Logo:*

$$Área = \mathcal{E}(F_R) = Ec - Ec_0$$

$$(25 \cdot 2{,}0/2) = 2{,}0 \cdot v^2/2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 5{,}0\ m/s}$$

Capítulo 04. Dinâmica Impulsiva

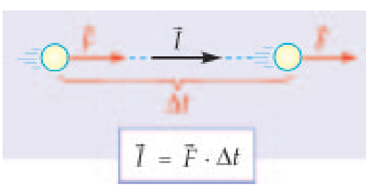
1. Introdução

Neste módulo, trataremos de duas grandezas vetoriais, impulso ($\vec{I}$) e quantidade de movimento ($\vec{Q}$), que apresentam uma importância fundamental num segundo princípio de conservação da Dinâmica: a conservação da quantidade de movimento. O uso de tal princípio conservativo é essencial no estudo de choques entre corpos, explosões e disparos, bem como na propulsão de foguetes.

2. Impulso de Força Constante

Dizemos que uma força produz um **impulso** sobre um corpo quando ela age no corpo durante um certo intervalo de tempo.

Define-se **impulso** ($\vec{I}$) de uma força constante através do produto de tal força ($\vec{F}$) pelo intervalo de tempo (Δt) de sua ação.



Pela expressão acima, observamos que o **impulso** é uma grandeza vetorial e, portanto, necessita de módulo, direção e sentido para seu perfeito entendimento. Ou seja:

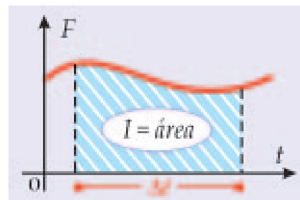
$$\vec{I}\begin{cases}\text{módulo: } I = F \cdot \Delta t \\ \text{direção: de } \vec{F} \\ \text{sentido: de } \vec{F}\end{cases}$$

No Sistema Internacional (SI), a unidade da grandeza impulso é **N · s** (**newton** vezes **segundo**). Como N = kg · m/s^2, temos:

$$\boxed{\mathbf{N \cdot s = kg \cdot m/s}}$$

3. Impulso de Força Variável

Se uma força tiver direção constante e intensidade variando no decorrer do tempo, seu impulso será calculado por meio da **área** sob o gráfico força × tempo.

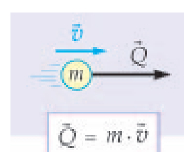


Nesse caso, podemos definir uma **força média** ($\vec{F}_m$) como sendo a força constante capaz de produzir o mesmo impulso da força de intensidade variável. Isto é:

$$I = \text{área} = F_m \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_m = \frac{\text{área}}{\Delta t}}$$

4. Quantidade de Movimento

Definimos a grandeza vetorial **quantidade do movimento** ($\vec{Q}$) de um corpo, também denominada **momento linear**, pelo produto da massa (m) do corpo pela sua velocidade ($\vec{v}$).



Como a quantidade de movimento é uma grandeza vetorial, apresenta módulo, direção e sentido, temos:

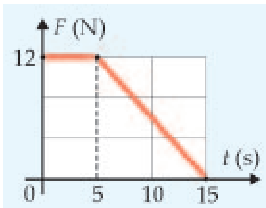
$$\vec{Q}\begin{cases}\text{módulo: } Q = m \cdot v \\ \text{direção: de } \vec{v} \\ \text{sentido: de } \vec{v}\end{cases}$$

No SI, a quantidade de movimento tem como unidade **kg · m/s** (**quilograma** vezes **metro** por **segundo**).

Repare que a unidade de **quantidade de movimento** coincide com a de **impulso**, embora sejam grandezas diferentes.

Exercícios Resolvidos

01. Um bloco movimenta-se, a partir do repouso, sob a ação de uma força $\vec{F}$ de direção constante e cujo módulo varia com o tempo, conforme o gráfico abaixo.



No intervalo de 0 a 15 s, determine:

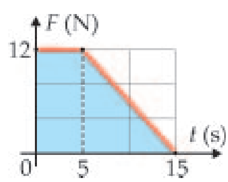
a) o módulo do impulso de $\vec{F}$;
b) o valor da força constante *(força média)* capaz de produzir o mesmo impulso.

Resolução

*a) No intervalo de tempo de 0 a 15 s, o módulo do impulso é dado pela **área do trapézio** sob gráfico. Ou seja:*

$$I = \text{área} = \frac{15+5}{2} \cdot 12$$

$$\boxed{I = 120\,N \cdot s}$$



b) Para uma força constante, temos:

$$I = F \cdot \Delta t$$

$$120 = F \cdot 15 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = 8\,N}$$

02. Um corpo de massa 1 kg executa movimento circular uniforme com velocidade de 4 m/s. Para um intervalo de tempo igual a meio período (meia volta dada), pede-se:

a) a variação de sua energia cinética;
b) o módulo da variação da quantidade de movimento do corpo.

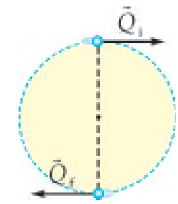
Resolução

a) A energia cinética do corpo é uma grandeza escalar constante nesse movimento (uniforme). Isto é:

$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{1 \cdot 4^2}{2} \quad \Rightarrow \quad E_c = 8\,J \text{ (cte)}$$

Logo, não há variação de energia: $\boxed{\Delta E_c = 0}$

b) A quantidade de movimento do corpo é uma grandeza vetorial e, no movimento circular uniforme, mantém-se em módulo, mas varia em direção (como o vetor velocidade). Logo:



$$\Delta\vec{Q} = \vec{Q}_f - \vec{Q}_i \text{, em que}$$

$Q_f = Q_i = Q = m \,.\, v = 1 \,.\, 4 = 4\ kg \cdot m/s$

Para meia volta dada, temos:

$$|\Delta\vec{Q}| = 2 \cdot Q = 2 \cdot 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{|\Delta\vec{Q}| = 8\,kg \cdot m/s}$$

5. Teorema do Impulso

Considere uma partícula de massa (m) constante, em movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV).

De acordo com a 2ª lei de Newton, a força resultante ($\vec{F}_R$) relaciona-se com a mudança de velocidade da partícula, num certo intervalo de tempo, assim:

$$\vec{F}_R = m \cdot \vec{\gamma}$$

$$\vec{F}_R = m \cdot \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{F}_R \cdot \Delta t = m \cdot \Delta\vec{v}$$

$$\vec{F}_R \cdot \Delta t = m \cdot (\vec{v} - \vec{v}_0)$$

$$\vec{F}_R \cdot \Delta t = m \cdot \vec{v} - m \cdot \vec{v}_0$$

Ou seja: $\boxed{\vec{I}_R = \vec{Q} - \vec{Q}_0}$

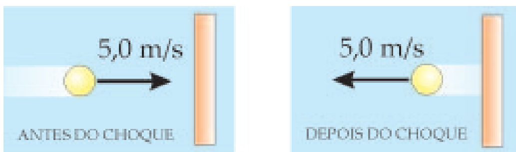
O impulso da resultante das forças atuantes sobre uma partícula, num certo intervalo de tempo, é igual à variação da quantidade de movimento da partícula nesse mesmo intervalo de tempo.

$$\boxed{\vec{I}_R = \Delta\vec{Q}}$$

Embora tenhamos demonstrado o Teorema do Impulso a partir de uma situação simples de MRUV, sua aplicação é geral, estendendo-se a qualquer tipo de movimento, sob a ação de forças constantes ou variáveis.

Exercícios Resolvidos

01. Suponha que uma bola com 0,20 kg de massa, movimentando-se com velocidade de 5,0 m/s, colida contra uma parede, retornando na mesma direção original e com a mesma velocidade, em módulo.



Qual o impulso (módulo, direção e sentido) aplicado pela parede na bola?

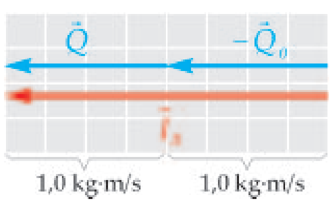
Resolução

As quantidades de movimento da bola ***antes*** *(* $\vec{Q}_0$ *) e* ***depois*** *(* $\vec{Q}$ *) do choque possuem o mesmo módulo. Isto é:*

$$Q = Q_0 = m \cdot v = 0{,}20 \cdot 5{,}0 = 1{,}0\,\text{kg} \cdot \text{m/s}$$

Como o impulso resultante é igual à variação da quantidade de movimento da bola, então:

$$\vec{I}_R = \vec{Q} - \vec{Q}_0 = \vec{Q} + (-\vec{Q}_0)$$



Portanto: $I_R = 2{,}0\,kg \cdot m/s$ *(ou 2,0 N·s), direção horizontal e sentido para a esquerda.*

02. Um bola de futebol com 500 g de massa movimenta-se horizontalmente com velocidade de 6,0 m/s. Num determinado instante, recebe um chute (impulso) de um jogador e passa a movimentar-se com velocidade de 8,0 m/s numa direção perpendicular à anterior. Determinar o módulo do impulso aplicado pelo jogador na bola.

Resolução

A quantidade de movimento inicial da bola vale:

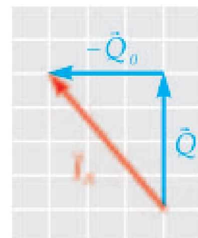
$Q_0 = m \cdot v_0 = 0{,}500 \cdot 6{,}0 = 3{,}0\ kg \cdot m/s$, horizontal e para a direita (o sentido foi escolhido arbitrariamente).

A quantidade de movimento final da bola vale:

$Q = m \cdot v = 0{,}500 \cdot 0{,}8 = 4{,}0\ kg \cdot m/s$, vertical e para cima.

Utilizando o Teorema do Impulso, teremos:

$$\vec{I}_R = \vec{Q} - \vec{Q}_0 = \vec{Q} + (-\vec{Q}_0)$$

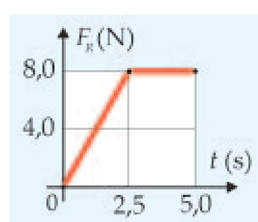


Usando o teorema de Pitágoras, vem:

$$I_R = \sqrt{Q^2 + Q_0^2} = \sqrt{4{,}0^2 + 3{,}0^2}$$

$$\therefore \boxed{I_R = 5{,}0\ \text{N} \cdot \text{s}}$$

03. O diagrama horário abaixo mostra a variação do módulo da força resultante ($\vec{F}_R$), aplicada a um corpo de massa 2,0 kg com velocidade inicial de 1,0 m/s. A força atua sempre na mesma direção e sentido da velocidade do corpo.



Determine:

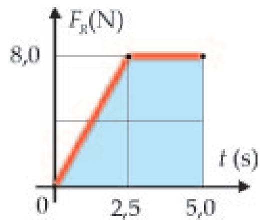
a) o módulo do impulso da força $\vec{F}_R$ no intervalo de tempo de 0 a 5,0 s;

b) o módulo da velocidade do corpo no instante t = 5,0 s;

c) o trabalho realizado pela força $\vec{F}_R$ entre os instantes 0 e 5,0 s.

Resolução

a) O módulo do impulso da força $\vec{F}_R$ é dado pela área do trapézio mostrado na figura abaixo.



$$I_R = \text{área} = \frac{2{,}5 + 5{,}0}{2} \cdot 8{,}0 \quad \therefore \quad \boxed{I_R = 30\,\text{N} \cdot \text{s}}$$

b) De acordo com o Teorema do Impulso, temos:

$$\vec{I}_R = \vec{Q} - \vec{Q}_0$$

Como a força $\vec{F}_R$ é aplicada sempre na mesma direção e sentido de $\vec{v}$, podemos escrever escalarmente:

$$I_R = m \cdot v - m \cdot v_0$$

$$30 = 2{,}0 \cdot v - 2{,}0 \cdot 1{,}0$$

$$\therefore \quad \boxed{v = 16\ \text{m/s}}$$

c) Pelo Teorema da Energia Cinética, vem:

$$\mathcal{E}(F_R) = \Delta E_c$$

$$\mathcal{E}(F_R) = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2}$$

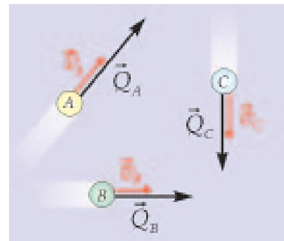
$$\mathcal{E}(F_R) = \frac{2{,}0 \cdot 16^2}{2} - \frac{2{,}0 \cdot 1^2}{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{\mathcal{E}(F_R) = 255\ J}$$

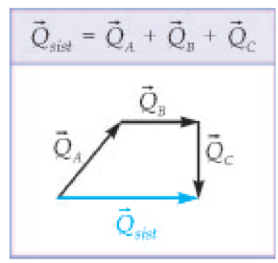
6. Quantidade de Movimento de um Sistema

A **quantidade de movimento** (ou momento linear) de um conjunto de partículas corresponde à **soma vetorial** das quantidades de movimento de cada partícula de tal sistema.

Considere, por exemplo, o conjunto formado por três partículas (A, B e C), abaixo indicadas, em que se destaca o vetor quantidade de movimento ($\vec{Q} = m \cdot \vec{v}$) que cada uma apresenta em um certo instante.



Obtemos o vetor quantidade de movimento do sistema ($\vec{Q}_{sist}$), nesse instante, pela seguinte adição vetorial:



Se as velocidades das partículas tivessem a **mesma direção**, poderíamos obter o valor da quantidade de movimento do sistema através das **velocidades escalares** das partículas assim:

$$\boxed{Q_{sist} = m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B + m_C \cdot v_C}$$

7. Sistema Isolado

Em um sistema podem agir forças **internas** e **externas**. São chamadas de forças **internas** aquelas que são **trocadas** entre as partículas do sistema. Por constituírem pares ação-reação, o impulso total devido às forças internas sempre será nulo.

Uma força é classificada como **externa** quando é exercida no sistema pelo **meio externo** a ele. Essa força pode ser de ação a distância (força de campo) ou de contato.

Dizemos que um sistema de partículas é mecanicamente **isolado** quando for **nulo** o **impulso total** das forças externas sobre as partículas do sistema. Ou seja, o sistema será considerado **isolado** quando:

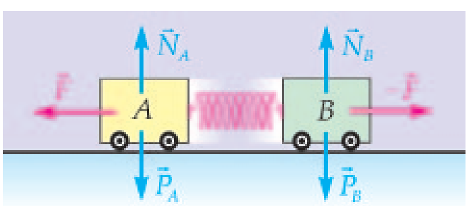
a) **nenhuma** força externa atuar, ou a resultante das forças externas for **nula**;

b) as forças externas forem **desprezíveis**, se comparadas com as forças internas;

c) a interação com o meio externo tiver uma duração **muito pequena** ($\Delta t \cong 0$).

Todos os fatores acima nos permitem, portanto, eleger como **sistemas isolados** usuais os conjuntos de partículas associados aos fenômenos de **colisão** e **explosão**.

Por exemplo, observe abaixo a **separação de massas** (explosão) que uma mola inicialmente comprimida consegue produzir, quando interposta entre dois carrinhos (A e B) dispostos num plano horizontal liso.



Note que no **conjunto** (A + B + mola) as forças elásticas **internas** ($\vec{F}$ e $-\vec{F}$) são as que produzem a separação de A e B, enquanto as **forças externas** (pesos e normais) têm **resultante nula**. Logo, temos um **sistema isolado**.

Em qualquer sistema isolado de ações externas, o impulso total sobre o sistema será sempre nulo, ou seja, no sistema não haverá variação da quantidade de movimento total.

Isso nos permite concluir que:

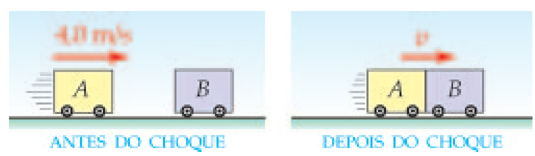
> *A quantidade de movimento de um sistema isolado sempre se conserva, qualquer que seja a interação praticada pelos corpos do sistema.*

Assim, quando um sistema isolado encontra-se em processo interno de **explosão** ou de **colisão**, a troca de forças internas entre os corpos do sistema pode variar a quantidade de movimento desses corpos, mas não consegue alterar a quantidade de movimento global do sistema.

Em suma:

Exercícios Resolvidos

01. Um carrinho de massa 1,0 kg move-se sobre um piso horizontal, com velocidade de 4,0 m/s, em direção a outro carrinho de massa 3,0 kg, inicialmente em repouso. Após o choque, eles permanecem unidos.



Admitindo que o sistema seja isolado, determine:

a) a intensidade da quantidade de movimento do conjunto de carrinhos após o choque;

b) o módulo da velocidade do conjunto após a colisão.

Resolução

a) Como o sistema é isolado, temos:

$$Q_{sist\,depois} = Q_{sist\,antes} = m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B$$

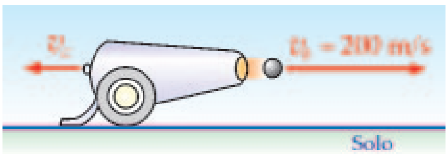
$$Q_{sist\,depois} = Q_{sist\,antes} = (1{,}0)\cdot(4{,}0) + (3{,}0)\cdot(0)$$

$$\therefore \boxed{Q_{sist\,depois} = 4{,}0\ kg \cdot m/s}$$

b) $Q_{sist\,depois} = (m_A + m_B)\cdot v$

$$4{,}0 = (1{,}0 + 3{,}0)\cdot v \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 1{,}0\ m/s}$$

02. Um canhão de massa 500 kg, estacionado no solo, dispara horizontalmente uma bala de massa 1 kg com velocidade escalar de 200 m/s. Determine a velocidade escalar de recuo do canhão no momento do disparo.



Resolução

O sistema formado pelo canhão e pela bala é isolado de forças externas. Portanto, a quantidade de movimento do sistema depois do disparo é igual à quantidade de movimento do sistema antes do disparo.

$$Q_{\substack{sist\\depois}} = Q_{\substack{sist\\antes}}$$

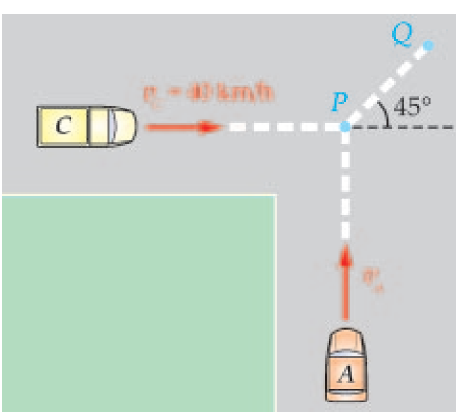
$$m_C \cdot v_C + m_B \cdot v_B = 0 \quad (pois\ v_0 = 0)$$

$$(500) \cdot v_C + (1) \cdot (200) = 0$$

$$\boxed{v_C = -0{,}4\ m/s}$$

A velocidade escalar negativa do canhão, após o disparo, evidencia o seu recuo, ou seja, o canhão possui velocidade no sentido contrário ao da bala.

03. Um automóvel A e uma caminhonete C, trafegando em vias perpendiculares, colidem no ponto P de uma esquina e, a seguir, prosseguem "grudados" na direção PQ. Sabe-se que a caminhonete tem o dobro da massa do automóvel e que sua velocidade antes da colisão era $v_C = 40$ km/h.



Ao relatar a colisão à polícia técnica, o motorista do automóvel declarou que, antes do choque, seu carro trafegava com velocidade de valor abaixo da máxima permitida no local (60 km/h).

a) Verifique se a afirmação do motorista é verdadeira ou falsa.

b) Determine a intensidade da velocidade do conjunto $(A + C)$ imediatamente após a colisão.

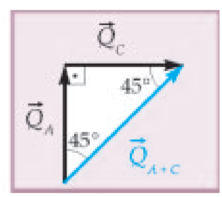
Resolução

Por ser a colisão um evento de curtíssima duração, podemos considerar o conjunto de veículos (A + C) como um sistema isolado. Logo, a quantidade de movimento do sistema imediatamente antes do choque é igual à quantidade de movimento do sistema imediatamente depois do choque.

*Como os movimentos possuem **direções diferentes**, a conservação de quantidade de movimento ocorrerá **vetorialmente** assim:*

$$\vec{Q}_{\substack{sist\\antes}} = \vec{Q}_{\substack{sist\\depois}}$$

$$\boxed{\vec{Q}_A + \vec{Q}_C = \vec{Q}_{A+C}} \Rightarrow$$



a) Pelo triângulo retângulo isósceles acima, podemos afirmar que as quantidades de movimento de A e C têm módulos iguais. A partir disso, temos:

$$Q_A = Q_C$$

$$m_A \cdot v_A = m_C \cdot v_C$$

$$(m) \cdot v_A = (2m) \cdot (40) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_A = 80\ km/h}$$

*Conclusão: a afirmação do motorista do automóvel é **falsa**, pois $v_A > 60$ km/h.*

b) Usando novamente o triângulo retângulo acima, vem:

$$sen\,45° = \frac{Q_C}{Q_{A+C}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(2m) \cdot 40\ km/h}{(3m) \cdot v_{A+C}}$$

$$v_{A+C} = \frac{80\sqrt{2}}{3}\ km/h \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{A+C} \cong 38\ km/h}$$

8. Choques

Neste módulo, trataremos da mecânica relacionada às **colisões frontais** de partículas. A colisão entre dois corpos é denominada **frontal** ou **unidimensional** quando não ocorre mudança na direção da velocidade desses corpos, ou seja, as velocidades dos corpos, antes e depois do choque, possuem a **mesma direção**.

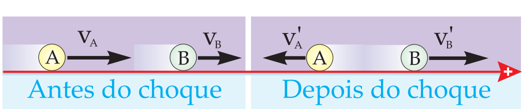
Sabemos que nas colisões há conservação da quantidade de movimento do sistema. Isto é: no choque entre duas partículas A e B, as quantidades de movimento de cada partícula variam, mas a quantidade de movimento do **sistema** se conserva.

$$\underbrace{\vec{Q}_{sist.}}_{\text{constante}} = \underbrace{\vec{Q}_A}_{\text{varia}} + \underbrace{\vec{Q}_B}_{\text{varia}}$$

Para um choque frontal, podemos escrever a equação de conservação de quantidade de movimento do sistema usando **velocidades escalares**, ou seja, atribuindo um sinal algébrico às velocidades das partículas de acordo com a orientação (positiva) definida para a trajetória.

$$\underbrace{Q_{sist.}}_{\text{antes}} = \underbrace{Q_{sist.}}_{\text{depois}}$$

$$m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B = m_A \cdot v'_A + m_B \cdot v'_B$$



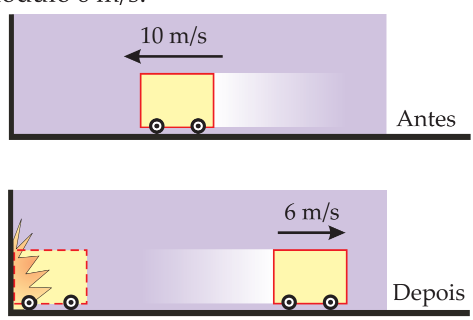
9. Coeficiente de Restituição

Embora sempre ocorra a conservação da quantidade de movimento do sistema, numa colisão pode ou não haver conservação de energia mecânica do sistema.

Os choques são classificados em função da conservação ou não da energia cinética do sistema. Quando a energia cinética do sistema imediatamente **após** o choque é **igual** à energia cinética do sistema imediatamente **antes** do choque, ele recebe o nome de **choque perfeitamente elástico**. Se as energias cinéticas do sistema antes e após o choque forem diferentes, ele recebe o nome de **choque não-elástico**.

Tais denominações foram originadas em experiências com choques frontais entre um móvel e um anteparo rígido (uma parede, por exemplo).

Suponha que um carrinho se aproxime frontalmente de uma parede a 10 m/s e, após o choque, se afaste desta com velocidade de módulo 6 m/s.

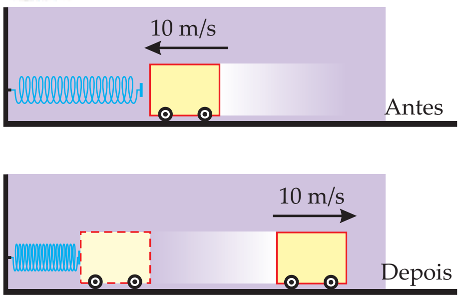


Após o choque, o carrinho **tem restituída** apenas 60% da velocidade, em módulo, que possuía antes do choque. Conclusão: houve perda de energia cinética nessa colisão.

A partir disso, criou-se um **coeficiente de restituição (e)** para as colisões frontais, definido pela razão entre o módulo da **velocidade de afastamento** (após o choque) e o módulo da **velocidade de aproximação** (antes do choque).

$$e = \frac{v_{afast.}}{v_{aprox.}}$$

Caso ocorresse 100% de restituição do módulo da velocidade ($v_{afast.} = v_{aprox.}$), o coeficiente de restituição atingiria seu valor **máximo** (**e = 1**) e não haveria perda de energia mecânica. Esse choque, denominado **perfeitamente elástico**, pode ser simulado lançando-se o carrinho contra uma mola ideal fixa numa parede, como mostra a figura abaixo.

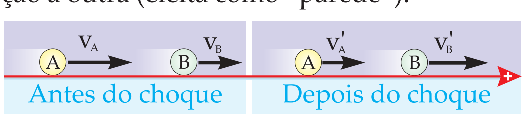


Entre os choques **não-elásticos**, destaca-se o choque **perfeitamente inelástico**, no qual se produz a **maior perda** de energia mecânica. Este choque ocorre quando o coeficiente de restituição é **mínimo**, ou seja, igual a zero (**e = 0**). Num choque desse tipo, o carrinho lançado contra a parede não retornaria (grudar-se-ia nesta) e, por conseguinte, perderia toda sua energia mecânica inicial.

Sintetizando, podemos comparar os tipos de choques frontais assim:

TIPOS DE CHOQUE	COEF. DE RESTITUIÇÃO	ENERGIA MECÂNICA
Perfeitamente elástico	$e = 1$	*Conservada*
Parcialmente elástico	$0 < e < 1$	*Não conservada*
Perfeitamente inelástico	$e = 0$	*Perda máxima*

Para estendermos a definição de coeficiente de restituição para uma colisão entre duas partículas (*A* e *B*), basta que usemos **velocidade relativa**, ou seja, que tomemos a velocidade que uma partícula possui em relação à outra (eleita como "parede").



$$\underbrace{}\; v_{aprox.} = v_A - v_B \qquad \underbrace{}\; v_{afast.} = v'_B - v'_A$$

Dessa forma, o coeficiente de restituição será obtido pela razão entre as velocidades relativas, depois e antes do choque, assim:

$$e = \frac{v_{afast.}}{v_{aprox.}} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}$$

Exercícios Resolvidos

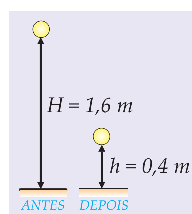
01. Uma bola de borracha de 0,2 kg cai, a partir do repouso, de uma altura H = 1,6 m e, após o choque frontal com o solo, retorna até uma altura máxima h = 0,4 m. Adotando g = 10 m/s² e desprezando a resistência do ar, determine:

a) a perda de energia mecânica da bola nesse choque;

b) o coeficiente de restituição no choque.

Resolução

a) Podemos observar a perda de energia mecânica da bola através da perda de altura ocorrida (perda de energia potencial gravitacional).



Logo:

$$E_{m_{inicial}} = mgH = 0{,}2 \cdot 10 \cdot 1{,}6 = 3{,}2\,\text{J}$$

$$E_{m_{final}} = mgh = 0{,}2 \cdot 10 \cdot 0{,}4 = 0{,}8\,\text{J}$$

$$E_{m_{diss.}} = 3{,}2 - 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_{m_{diss.}} = 2{,}4\,J}$$

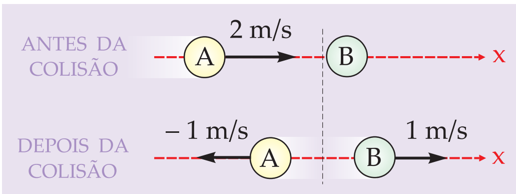
b) As velocidades de aproximação e afastamento (imediatamente antes e depois do choque) são dadas em módulo, pela equação de Torricelli, assim:

$$v_{aprox.} = \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \quad e \quad v_{afast.} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Logo:

$$e = \frac{v_{afast.}}{v_{aprox.}} = \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{\sqrt{2 \cdot g \cdot H}} = \sqrt{\frac{h}{H}} = \sqrt{\frac{0{,}4}{1{,}6}} = \boxed{0{,}5}$$

02. Ao longo de um eixo x, uma partícula A de massa 0,1 kg incide com velocidade escalar de 1 m/s sobre uma partícula B de massa 0,3 kg, inicialmente em repouso. O esquema a seguir ilustra isso, como também o que sucede após o choque.



a) Mostre que houve conservação da quantidade de movimento do sistema.

b) Calcule o coeficiente de restituição dessa colisão e, a seguir, informe se houve ou não perda de energia mecânica do sistema nessa colisão.

Resolução

a) Usando velocidades escalares, temos:

$$Q_{\underset{antes}{sist.}} = m_A v_A + m_B v_B = 0{,}1 \cdot 2 + 0{,}3 \cdot 0 = 0{,}2\,kg \cdot m/s$$

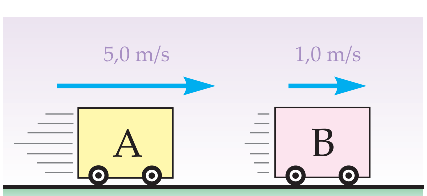
$$Q_{\underset{depois}{sist.}} = m_A v'_A + m_B v'_B = 0{,}1 \cdot (-1) + 0{,}3 \cdot 1 = 0{,}2\,kg \cdot m/s$$

$$\therefore \quad Q_{\underset{antes}{sist.}} = Q_{\underset{depois}{sist.}} = 0{,}2\,kg \cdot m/s \quad \text{(para a direita)}$$

$$b) \quad e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} = \frac{(1) - (-1)}{2 - 0} \Rightarrow \boxed{e = 1}$$

Trata-se de um choque ***perfeitamente elástico*** *(e = 1), logo* ***não há perda*** *de energia mecânica.*

03. Um carrinho A de massa $m_A = 2{,}0$ kg e velocidade escalar $v_A = 5{,}0$ m/s choca-se frontalmente com um outro carrinho B, de mesma massa, que caminhava à sua frente com velocidade escalar $v_B = 1{,}0$ m/s, sobre uma mesma reta horizontal.



ANTES DO CHOQUE

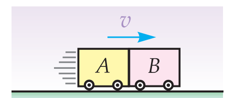
Considere que a colisão ocorra de forma que a perda de energia mecânica do sistema seja **máxima**, mas consistente com o princípio de conservação da quantidade de movimento.

a) Quais as velocidades escalares dos objetos imediatamente após a colisão?

b) Qual a energia mecânica dissipada nesse choque?

Resolução

a) Se ocorre perda máxima de energia mecânica, então tal colisão é ***perfeitamente inelástica****, isto é, os carrinhos ficam engatados após o choque.*



DEPOIS DO CHOQUE

Assim, no choque, temos:

$$Q_{\underset{antes}{sist.}} = Q_{\underset{depois}{sist.}}$$

$$m \cdot v_A + m \cdot v_B = (2m) \cdot v$$

$$v = \frac{v_A + v_B}{2} = \frac{5{,}0 + 1{,}0}{2} \Rightarrow \boxed{v = 3{,}0 \ m/s}$$

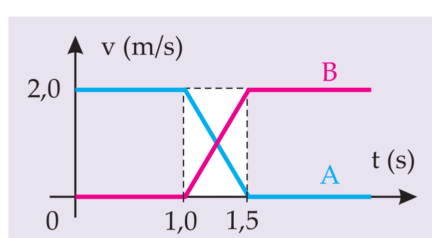
b) Pelas energias cinéticas dos carrinhos, vem:

$$E_{\underset{antes}{m}} = \frac{m \cdot v_A^2}{2} + \frac{m \cdot v_B^2}{2} = \frac{2{,}0 \cdot 5{,}0^2}{2} + \frac{2{,}0 \cdot 1{,}0^2}{2} = 26\,J$$

$$E_{\underset{depois}{m}} = \frac{(m+m) \cdot v^2}{2} = \frac{4{,}0 \cdot 3{,}0^2}{2} = 18\,J$$

$$\text{Logo: } E_{\underset{diss.}{m}} = 26 - 18 \Rightarrow \boxed{E_{\underset{diss.}{m}} = 8{,}0\,J}$$

04. O gráfico abaixo representa as velocidades escalares de duas pequenas esferas, A e B, que realizam uma colisão frontal (com faixa de duração em destaque no gráfico).



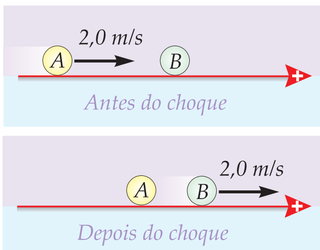
Determine:

a) o coeficiente de restituição entre A e B;

b) a relação entre as massas de A e B.

Resolução

a) Interpretando o gráfico, observamos que nesse choque houve troca de velocidades entre as esferas. Isto é:



Logo:

$$e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} = \frac{2{,}0 - 0}{2{,}0 - 0} \Rightarrow \boxed{e = 1}$$

b) $Q_{\substack{sist.\\antes}} = Q_{\substack{sist.\\depois}}$

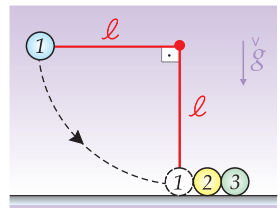
$$m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B = m_A \cdot v'_A + m_B \cdot v'_B$$
$$m_A \cdot 2{,}0 + m_B \cdot 0 = m_A \cdot 0 + m_B \cdot 2{,}0$$

$$\therefore \boxed{m_A = m_B}$$

Observação importante

*Em todo choque **frontal** e perfeitamente **elástico**, entre partículas de **massas iguais**, ocorre a **troca de velocidades**.*

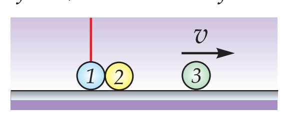
05. A figura mostra a descida pendular de uma bolinha (1), a partir do repouso, presa a um fio ideal de comprimento ℓ e inicialmente horizontal. No final da descida (fio na vertical), a bolinha 1 chega rasante ao solo e choca-se frontalmente com uma fila formada por duas bolinhas (2 e 3) em repouso, cada uma com a mesma massa da bolinha 1.



Desprezando qualquer atrito e considerando os choques como perfeitamente elásticos, quais os módulos finais das velocidades das bolinhas?

Resolução

Por conservação de energia, a esfera 1 colide com a fila de bolinhas com velocidade $v = \sqrt{2g\ell}$. *Pelo fato de as bolinhas terem massas iguais, nos choques elásticos sucessivos entre elas haverá permuta de velocidades. No final, as bolas 1 e 2 ficam em **repouso**, enquanto a bola 3 segue com velocidade* $v = \sqrt{2g\ell}$.



Capítulo 05. Hidrostática

1. Introdução

Hidrostática é a parte da Mecânica que estuda os líquidos em equilíbrio.

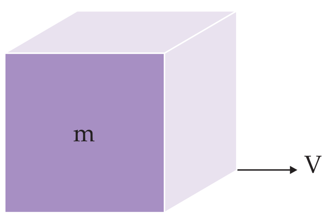
Entende-se por "um líquido em equilíbrio" aquele cujas moléculas não apresentam aceleração em relação a um sistema de referência inercial.

2. Densidade e Massa Espécifica

2.1. Densidade de um Corpo

É a razão entre a massa e o volume ocupado pelo corpo.

$$d = \frac{m}{V}$$



Unidades: kg/m^3, g/cm^3, kg/*l*

$$\boxed{1\ g/cm^3 = 10^3\ kg/m^3}$$

$$\boxed{1\ kg/l = 1\ g/cm^3}$$

Exemplo – Um bloco maciço de ferro apresenta massa de 39 g e volume de 5 cm^3. Calcule a densidade com unidades em g/cm^3, kg/*l* e kg/m^3.

Resolução

$m = 39$ g

$V = 5$ cm^3

$$d = \frac{m}{V} = \frac{39}{5}$$

$d = 7{,}8$ g/cm^3

Como 1 g/cm^3 = 1 kg/*l* $\Rightarrow$ $\mu = 7{,}8$ kg/*l*

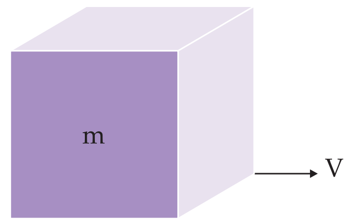
Como 1 g/cm^3 = 10^3 kg/m^3 $\Rightarrow$

$d = 7{,}8 \cdot 10^3$ kg/m^3

2.2. Massa Específica de uma Substância

É a razão entre a massa e o volume ocupado por essa massa.

$$\mu = \frac{m}{V}$$



Unidades: as mesmas da densidade.

Apesar de as fórmulas da densidade e da massa específica serem iguais, o conceito é diferente.

Massa específica é definida para substâncias homogêneas e maciças.

Densidade é definida para um corpo qualquer (homogêneo ou heterogêneo), podendo ser maciço ou oco.

A tabela abaixo fornece a massa específica de algumas substâncias.

Substância	Massa específica (g/cm^3)
Água	1,00
Gelo	0,92
Álcool	0,79
Ferro	7,85
Chumbo	11,3
Mercúrio	13,6

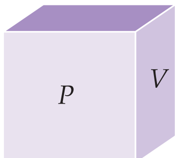
Exemplo importante

A massa específica (μ) do ferro é de 7,85 g/cm^3, um corpo de ferro pode ter densidade menor que 1 g/cm^3 e assim flutuar na água como um navio. Basta que seja oco; assim, sua densidade será sua massa dividida pelo volume ocupado por essa massa.

$$\boxed{\text{Assim: } d < \mu}$$

2.3. Peso Específico

Dada uma substância homogênea e compacta de peso P e volume V:



o peso específico (ρ) é dado pelo quociente entre o peso e o volume da substância.

$$\rho = \frac{P}{V}$$

$$\rho = \frac{m \cdot g}{V}$$

$$\rho = \mu \cdot g \qquad [\rho] = \frac{N}{m^3}$$

Exemplo

O volume de um litro de água possui massa de 1 kg. Calcule a massa específica e o peso específico da água em unidades do Sistema Internacional. Considere $g = 10\ m/s^2$.

Resolução

$V = 1\ l = 10^{-3}\ m^3$

$m = 1\ kg$

$\mu = \frac{m}{V} = \frac{1}{10^{-3}}$

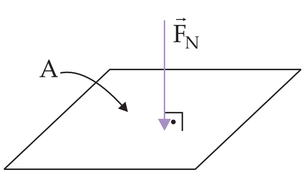
$\mu = 10^3\ kg/m^3$

$\rho = \mu \cdot g = 10^3 \cdot 10$

$\rho = 10^4\ N/m^3$

3. Pressão

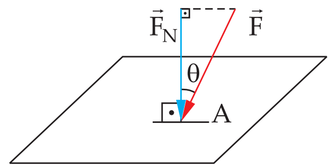
Dada uma chapa de área A, sujeita à força F_N:



define-se **pressão média** (p) pelo quociente entre a intensidade da força normal e a área.

Assim, $\boxed{p = \frac{F_N}{A}}$

Se a força não for normal à superfície, devemos achar a componente normal da força.



$$\cos\theta = \frac{F_N}{A}$$

$$F_N = F \cdot \cos\theta$$

$$p = \frac{F_N}{A} \Rightarrow p = \frac{F \cdot \cos\theta}{A}$$

O conceito de pressão tem uma vasta aplicação na ciência e na tecnologia. Por meio dela podemos entender muitos fenômenos físicos que nos rodeiam.

Por exemplo, se você comprimir o seu braço com o polegar, nada ocorre. Com o mesmo esforço, se você comprimir uma agulha, esta entra no tecido do braço.

Como $p = \frac{F}{A}$, para um mesmo esforço (F), quem tem maior área de contato apresenta menor pressão.

Unidades de pressão

$$[p] = \frac{[F]}{[A]}$$

SI → $[p] = N/m^2 = P_a$ (pascal)

CGS → $[p] = dyn/cm^2$ = bar (bária)

Sistema técnico ⇒ $[p] = kgf/m^2$

Exercícios Resolvidos

01. Um cubo de massa 200 kg e aresta 2 m está apoiado por uma de suas faces numa superfície horizontal, num local em que g = 10 m/s². Calcule a pressão que o cubo exerce na superfície.

Resolução

$m = 200\ kg$

$a = 2\ m$

$g = 10\ m/s^2$

A força normal que o cubo exerce na superfície apresenta a mesma intensidade da força peso.

$F_N = P = m \cdot g = 200 \cdot 10 = 2.000\ N$

$A = a^2 = 2^2 = 4\ m^2$

$$p = \frac{F_N}{A} = \frac{2.000}{4}$$

$p = 500\ N/m^2$

02. Num palco encontram-se uma bailarina de massa 50 kg e um elefante de massa 2 toneladas. Num certo instante, a bailarina se apóia na ponta de um único pé, cuja área de contato com o solo é de 10 cm² e o elefante se apóia nas quatro patas, cuja área de contato de cada pata com o solo é de 400 cm². Obtenha a relação entre a pressão exercida no solo pela bailarina e pelo elefante.

Resolução

$m_b = 50\ kg$

$A_b = 10\ cm^2$

$m_e = 2\ t = 2.000\ kg$

$A_e = 4 \cdot 400 = 1.600\ cm^2$

$$\frac{p_b}{p_e} = \frac{\frac{F_{Nb}}{A_b}}{\frac{F_{Ne}}{A_e}}, \text{ como } F_N = P \text{ (peso), então,}$$

$$\frac{p_b}{p_e} = \frac{\frac{m_b \cdot g}{A_b}}{\frac{m_e \cdot g}{A_e}} = \frac{\frac{50}{10}}{\frac{2.000}{1.600}} = \frac{5}{1,25} = 4$$

$$\boxed{P_b = 4\,Pe}$$

A pressão exercida pela bailarina é quatro vezes maior do que a pressão exercida pelo elefante.

4. O Líquido Ideal

No estudo dos líquidos consideraremos um líquido ideal, aquele que goze das seguintes propriedades:

1 – O líquido é incompressível.

2 – Suas moléculas se deslocam sem atrito.

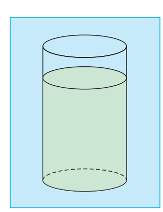
3 – A força que um líquido em equilíbrio exerce sobre as superfícies é sempre normal às mesmas.

4 – A pressão sobre um ponto de um líquido em equilíbrio advêm de todas as direções.

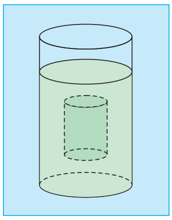
5. Teorema de Stevin

Simon Stevin (1548 a 1620), físico e matemático holandês, contribuiu para o desenvolvimento da Estática e Hidrostática.

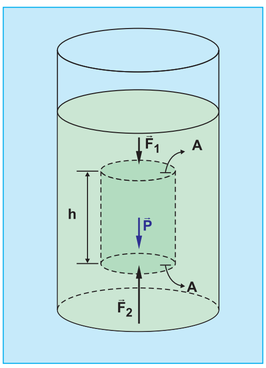
Consideremos um recipiente em repouso, contendo uma massa de um fluido homogêneo, incompressível e em equilíbrio, sob a ação da gravidade.



Dentro deste recipiente, vamos delinear uma região em forma de um cilindro.



Sejam *P*, o peso da porção líquida contida na região do cilindro, F_1, a força que o líquido externo ao cilindro aplica na parte superior do cilindro, F_2, a força aplicada na parte inferior, *h* a altura do cilindro e *A*, a sua área de base.



Como o líquido se encontra em equilíbrio, então,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{P} = \vec{0}$$

$$F_2 = F_1 + P \quad \text{(I)}$$

Como $P = m \cdot g$ e $p = \dfrac{F}{A}$, então, $F = p \cdot A$, substituindo em (I), temos:

$$p_2 \cdot A = p_1 \cdot A + m \cdot g \quad \text{(II)}$$

Como $\mu = \dfrac{m}{V}$ e o volume do cilindro é $V = A \cdot h$, então,

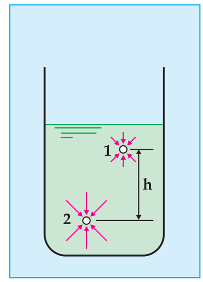
$$\mu = \frac{m}{V} = \frac{m}{A \cdot h} \rightarrow m = \mu \cdot A \cdot h$$

Substituindo em (II), temos:

$p_2 \cdot A = p_1 \cdot A + \mu \cdot A \cdot h \cdot g$, dividindo por A, temos:

$$\boxed{p_2 = p_1 + \mu \cdot g \cdot h}$$

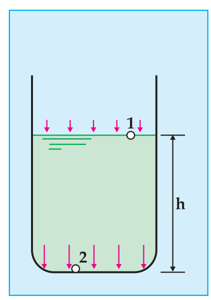
Os pontos 1 e 2 são dois pontos quaisquer no interior do líquido.



$$\boxed{p_2 = p_1 + \mu \cdot g \cdot h}$$

A relação $\mu \cdot g \cdot h$ (massa específica do líquido x a aceleração da gravidade x o desnível h entre dois pontos) é chamada de pressão hidrostática (ou pressão efetiva), ou seja, a pressão exercida pela camada de líquido.

Se o ponto 1 coincidir com a superfície do líquido, então, $p_1 = p_{atm}$ (pressão atmosférica), e se o ponto 2 coincidir com o fundo do recipiente, temos:



$$\boxed{p_2 = p_{atm} + \mu \cdot g \cdot h}$$

6. Teorema dos Pontos Isóbaros

> Pontos situados no mesmo nível de um líquido em equilíbrio suportam a mesma pressão.

Exemplo – Uma piscina de profundidade 5 m está completamente cheia de água, cuja massa específica é de 1 g/cm^3, num local onde g = 10 m/s^2 e a pressão atmosférica de 10^5 N/m^2. Calcule a pressão que o fundo da piscina suporta.

Resolução

h = 5 m

$\mu = 1\ g/cm^3 = 10^3\ kg/m^3$

$g = 10\ m/s^2$

$p_{atm} = 10^5\ N/m^2$

$p = p_{atm} + \mu \cdot g \cdot h$

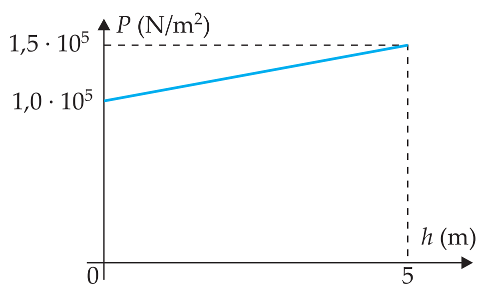
$p = 10^5 + 10^3 \cdot 10 \cdot 5$

$p = 10^5 + 0{,}5 \cdot 10^5$

$p = 1{,}5 \cdot 10^5\ Pa$

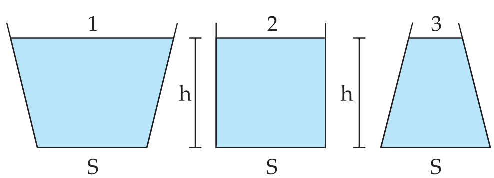
Através do exemplo visto, percebemos que, a cada 10 m de profundidade em água, a pressão se eleva de $1 \cdot 10^5\ N/m^2$, ou seja, aumenta um valor igual ao da pressão atmosférica.

Podemos aproveitar o exemplo para construir o gráfico da pressão em função da profundidade.



7. Paradoxo Hidrostático

Os três vasos da figura abaixo têm bases com a mesma área S e contêm o mesmo líquido até a mesma altura h.



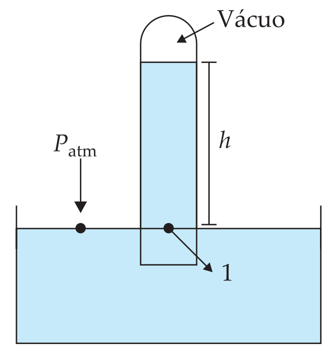
No vaso 1, há um peso maior de líquido; assim, como a pressão é o quociente entre o peso e a área, a pressão no fundo do recipiente 1 deveria ser maior. No entanto, a pressão no fundo é a mesma nos três recipientes.

A explicação desse paradoxo está no Teorema de Stevin pois a pressão que um líquido exerce sobre o fundo de um reservatório, **independe** da forma do reservatório, dependendo somente de $\mu\ g\ h$.

8. Experiência de Torricelli

A experiência de Torricelli (físico e matemático italiano) consiste na determinação da pressão atmosférica num determinado local.

Torricelli tomou um tubo completamente cheio de mercúrio e um recipiente também contendo mercúrio.



O tubo cheio de mercúrio é tampado e mergulhado no recipiente. Depois de mergulhado, o tubo é aberto. Nota-se, então, que a camada de mercúrio desce e estaciona a uma certa altura, conforme a figura. Essa altura depende da altitude do local em que foi feita a experiência.

A maior altura h ocorre ao nível do mar, onde a pressão atmosférica é máxima.

Como o tubo não continha ar, forma-se então no fundo do tubo uma região de vácuo.

Se a experiência for feita ao nível do mar ($p_{atm} = 1$ atm), a altura h é de 76 cm, para qualquer que seja o comprimento do tubo (maior do que 76 cm).

Tubo com Água

Se o mercúrio usado na experiência de Torricelli for substituído por água, vamos determinar a nova altura da coluna.

$p_{atm} = 1{,}013 \cdot 10^5\ Pa$

$\mu_{(H_2O)} = 1\ g/cm^3 = 10^3\ kg/m^3$

$g = 9{,}8\ m/s^2$

$p_{atm} = \mu \cdot g \cdot h$

$1{,}013 \cdot 10^5 = 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot h$

$h = 10{,}3\ m$

Assim, a pressão atmosférica ao nível do mar é igual à pressão exercida por uma coluna de 10,3 metros de água.

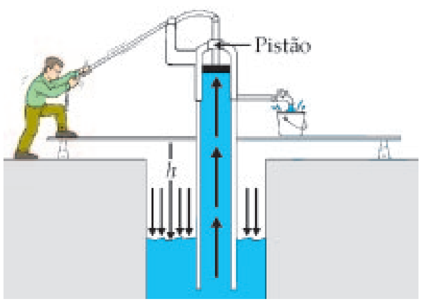
$p_{atm} = 10{,}3\ \text{m·c·a}$

m.c.a = metro de coluna de água

Se arredondarmos, $p_{atm} = 10\ \text{m·c·a}$

Uma bomba de sucção, usada para puxar água, jamais poderá ser usada para fazer isso em uma altura superior a 10,3 metros.

O pistão é que retira ar do tubo para a água subir. A água sobe em razão da diferença de pressão externa e interna do tubo.



$$\boxed{P_{atm} = 1_{atm} = 76\ \text{cm Hg} = 760\ \text{mm Hg} \cong 10^5\ \text{Pa}}$$

Exemplo – Realiza-se a experiência de Torricelli no alto de uma montanha, local em que a gravidade vale 10 m/s² e verifica-se que a altura da coluna de mercúrio é de 70 cm. Sabendo que a massa específica do mercúrio vale $13{,}6 \cdot 10^3$ kg/m³, calcule a pressão atmosférica no local em cmHg, mmHg e N/m².

Resolução

$h = 70\ \text{cm} = 700\ \text{mm} = 0{,}7\ \text{m}$

$g = 10\ \text{m/s}^2$

$\mu = 13{,}6 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$

$p_{atm} = 70\ \text{cmHg}$

$p_{atm} = 700\ \text{mmHg}$

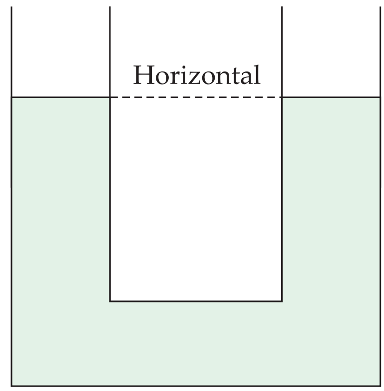
$$\begin{cases} 1\ \text{atm} = 76\ \text{cmHg} \\ p_{atm} = 70\ \text{cmHg} \end{cases}$$

$$p_{atm} = \mu \cdot g \cdot h = 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 0{,}7$$

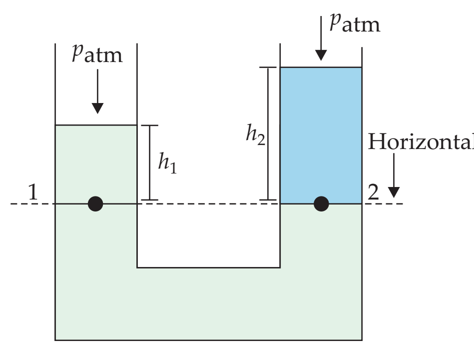
$$p_{atm} = 9{,}5 \cdot 10^4\ \text{Pa}$$

9. Vasos Comunicantes

Dado um vaso em forma de U, contendo um líquido homogêneo em equilíbrio, o nível das suas colunas é o mesmo.



Se colocarmos dois líquidos não-miscíveis (que não se misturam), pode ocorrer um equilíbrio com desnível das colunas.



Sejam μ_1 a massa específica do líquido 1 e μ_2 a massa específica do líquido 2; a partir do teorema de Stevin, temos:

$$p_1 = p_{atm} + \mu_1 \cdot g \cdot h_1$$

$$p_2 = p_{atm} + \mu_2 \cdot g \cdot h_2$$

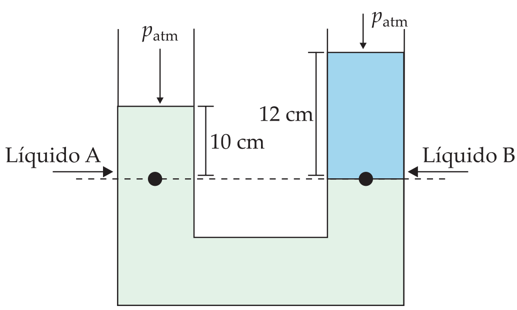
Como pontos de mesma altura, num mesmo líquido homogêneo em equilíbrio, suportam a mesma pressão:

$$p_1 = p_2$$

$$p_{atm} + \mu_2 \cdot g \cdot h_1 = p_{atm} + \mu_2 \cdot g \cdot h_2$$

$$\boxed{\mu_1 \cdot h_1 = \mu_2 \cdot h_2}$$

Exemplo – Dois líquidos não-miscíveis estão em equilíbrio conforme a figura abaixo. Calcule a relação entre as massas específicas dos líquidos A e B.



Resolução

$h_A = 10$ cm

$h_B = 12$ cm

$P_A = P_B$

$P_{atm} + \mu_A \cdot g \cdot h_A = P_{atm} + \mu_B \cdot g \cdot h_B$

$\mu_A \cdot h_A = \mu_B \cdot h_B$

$\mu_A \cdot 10 = \mu_B \cdot 12$

$$\frac{\mu_A}{\mu_B} = \frac{12}{10} \Rightarrow \frac{\mu_A}{\mu_B} = 1{,}2$$

Exemplo – Quando tomamos refrigerante por um canudo, aspiramos o líquido e esse sobe até a boca. Explique por que o líquido sobe.

Resolução

Quando aspiramos, diminuímos a pressão no interior da boca, puxando o ar para o interior do pulmão.

Como o ar externo pressiona a superfície do líquido, este sobe pelo canudo até atingir a boca.

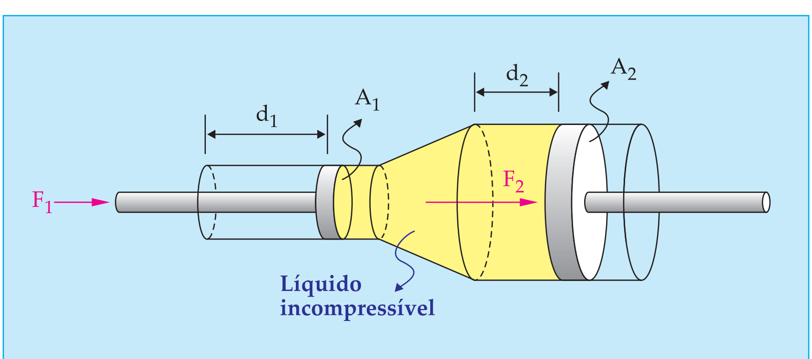
$p_{boca} < p_{atm} \rightarrow$ refrigerante sobe

10. Princípio de Pascal

Blaise Pascal (1623 a 1662), físico, matemático e filósofo francês, estudou os fluidos, inventou a prensa hidráulica e a seringa. Propôs, em Matemática, a teoria das probabilidades.

Pascal enunciou que o acréscimo de pressão (dado um líquido em equilíbrio) transmite-se integralmente para todos os pontos do líquido, uma vez que os líquidos são praticamente incompressíveis.

A figura abaixo representa dois êmbolos de diferentes diâmetros acoplados, entre si, contendo um líquido incompressível em equilíbrio.



Sejam F_1 a intensidade da força aplicada no êmbolo 1, de área A_1, e F_2 a intensidade da força aplicada no êmbolo 2 de área A_2.

Como o acréscimo de pressão é transmitido integralmente a todos os pontos do líquido, temos:

$$\Delta p_1 = \Delta p_2 \quad \text{como}$$

$$p = \frac{F}{A}, \text{ então,}$$

$$\boxed{\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}}$$

Sejam d_1 o deslocamento do líquido 1 e d_2 o deslocamento do líquido 2, temos:

$V = A \cdot d$ (volume do cilindro)

$A = \frac{V}{d}$ como o líquido é incompressível $\Rightarrow$ $V_1 = V_2$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow \frac{F_1}{\frac{\cancel{V_1}}{d_1}} = \frac{F_2}{\frac{\cancel{V_2}}{d_2}}$$

$$\boxed{F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2}$$

Exemplo – Uma prensa hidráulica em equilíbrio recebe a ação de uma força de intensidade de 20 N no êmbolo menor. Calcule o peso de um corpo que deve ser colocado no êmbolo maior, para que a prensa fique em equilíbrio, sabendo que os êmbolos são cilíndricos, de raios de base 2 cm e 10 cm.

Resolução

$F_1 = 20$ N
$r_1 = 2$ cm
$r_2 = 10$ cm
$F_2 = P = ?$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

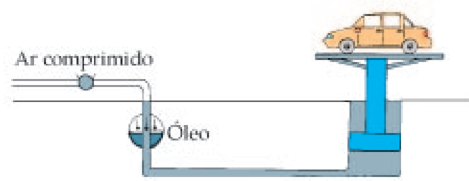
$$\frac{F_1}{\pi \cdot r_1^2} = \frac{F_2}{\pi \cdot r_2^2}$$

$$\frac{20}{(2)^2} = \frac{P}{(10)^2}$$

$$\frac{20}{4} = \frac{P}{100}$$

$P = 500$ N

A figura abaixo mostra uma prensa hidráulica utilizada para elevar automóveis. O ar comprimido entra pela tubulação empurrando o êmbolo que, por sua vez, empurra o óleo da tubulação.



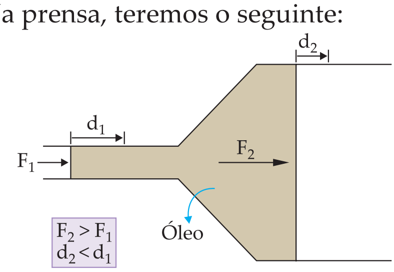
O freio de automóvel também é uma prensa hidráulica. Ao acionar o freio, o pistão de comando empurra o óleo da tubulação, que acaba comprimindo as sapatas contra o tambor da roda.

O trabalho na prensa

Note que não só na prensa hidráulica, bem como nas alavancas ou até mesmo nas polias móveis há ganho de forças, mas inevitavelmente, há perda no deslocamento.

O trabalho será sempre o mesmo nos processos acima citados.

Na prensa, teremos o seguinte:



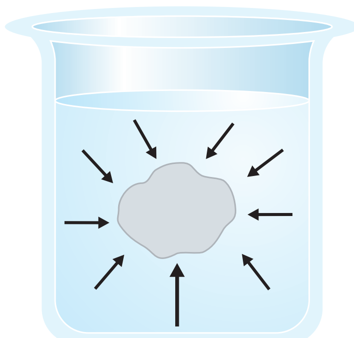
$$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2$$
$$\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_2$$

> A força pequena sofre grande deslocamento. A força grande sofre pequeno deslocamento.

Capítulo 06. Empuxo

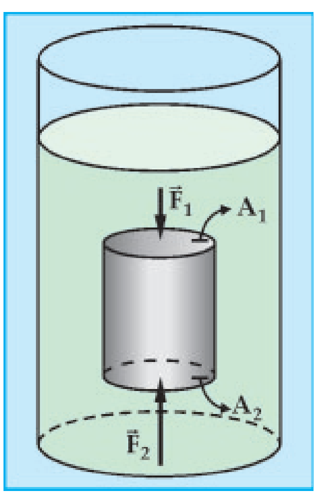
1. Teorema de Arquimedes

Um corpo mergulhado num líquido recebe forças do líquido em toda sua superfície, conforme a figura.



As componentes horizontais das forças se equilibram e as componentes verticais fornecem uma resultante para cima.

Vamos considerar um corpo cilíndrico totalmente submerso num líquido em equilíbrio, conforme mostra a figura.



O líquido exerce pressão em todos os pontos do cilindro.

Sejam $\vec{F}_1$ a força que o líquido exerce em cima do cilindro de área A_1 e $\vec{F}_2$ a força que o líquido exerce embaixo do cilindro de área A_2.

Como $A_1 = A_2$ e $P_2 > P_1$ (a pressão aumenta com a profundidade), temos:

$$p = \frac{F}{A} \begin{cases} p_1 = \dfrac{F_1}{A_1} \\ p_2 = \dfrac{F_2}{A_2} \end{cases}$$

$$\boxed{F_2 > F_1}$$

A diferença das intensidades das forças $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_1$ é a intensidade da força de empuxo $\vec{E}$.

$$\boxed{E = F_2 - F_1}$$

Todo corpo imerso em um fluido recebe uma força vertical para cima chamada **empuxo**, de intensidade igual à intensidade de peso do fluido deslocado.

Sejam:

$\mu_c \rightarrow$ massa específica do corpo que será imerso.

$m_c \rightarrow$ massa do corpo

$V_c \rightarrow$ volume do corpo

$P_c \rightarrow$ peso do corpo

$\mu_L \rightarrow$ massa específica do líquido

$m_L \rightarrow$ massa do líquido deslocado

$V_L \rightarrow$ volume do líquido deslocado

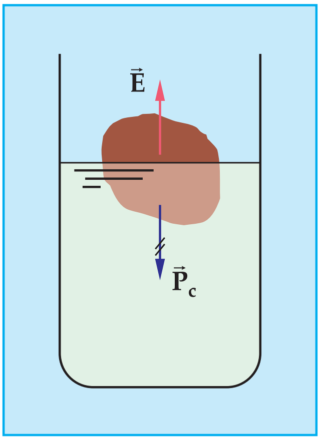
$P_L \rightarrow$ peso do líquido deslocado

Como $\mu_L = \dfrac{m_L}{V_L} \Rightarrow \mu_L \cdot V_L = m_L$

$$E = P_L = m_L \cdot g \Rightarrow \boxed{E = P_L = \mu_L \cdot V_L \cdot g}$$

1º Caso

Vamos mergulhar num líquido um corpo menos denso que o líquido. Ele vai flutuar com uma parte submersa.



$$\boxed{\mu_c < \mu_L}$$

$$E = P_c$$

$$\mu_L \cdot V_L \cdot \cancel{g} = \mu_c \cdot V_c \cdot \cancel{g}$$

$$\boxed{\frac{V_c}{V_L} = \frac{\mu_L}{\mu_c}}$$

Exemplo

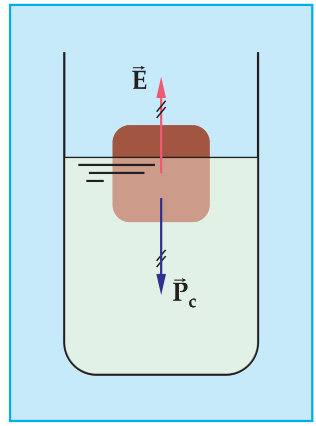
Um bloco de madeira, cuja massa específica é de $0{,}6\ g/cm^3$, é colocado num recipiente contendo água de massa específica $1{,}0\ g/cm^3$, num local onde $g = 10\ m/s^2$. Calcule a razão entre o volume submerso e o volume total do bloco.

Resolução

$\mu_c = 0{,}6\ g/cm^3$

$\mu_L = 1{,}0\ g/cm^3$

$g = 10\ m/s^2$



$$E = P_c$$

$$\mu_L \cdot V_L \cdot g = m_c \cdot g$$

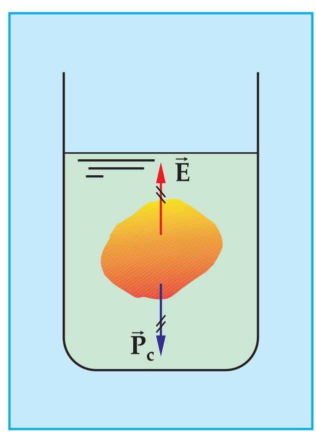
$$\mu_L \cdot V_L = \mu_c \cdot V_c$$

$$\frac{V_L}{V_c} = \frac{\mu_c}{\mu_L} = \frac{0{,}6}{1{,}0}$$

$$\boxed{\frac{V_L}{V_c} = \frac{3}{5}}$$

2º Caso

Vamos mergulhar um corpo de mesma densidade que o líquido. Ele ficará totalmente submerso, numa situação de equilíbrio indiferente.



$$E = P_c$$

$$\mu_L V_L \cancel{g} = \mu_c V_c \cancel{g}$$

Como $V_L = V_c$

então $\boxed{\mu_c = \mu_L}$

Exemplo

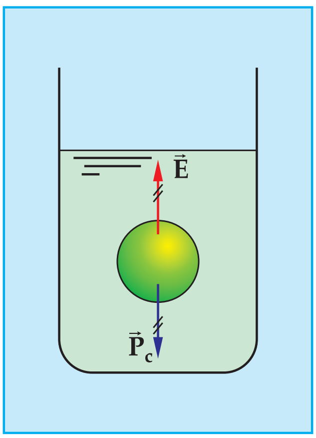
Uma esfera maciça de raio 5 cm está totalmente submersa, sem tocar o fundo do recipiente em equilíbrio num líquido de massa específica $2\ g/cm^3$, num local onde $g = 10\ m/s^2$.

Calcule:

a) a massa específica do material da esfera;

b) a intensidade do empuxo recebido pela esfera.

Resolução



$$r = 5\ cm = 5 \cdot 10^{-2}\ m$$
$$\mu_L = 2\ g/cm^3 = 2 \cdot 10^3\ kg/m^3$$
$$g = 10\ m/s^2$$
$$V_L = V_c = V$$
$$\mu = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \mu \cdot V$$

a) A intensidade do empuxo que a esfera recebe é igual à intensidade do seu peso (equilíbrio):

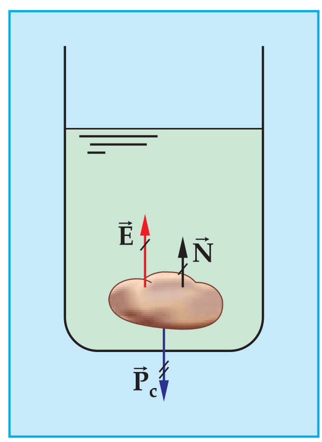
$$E = P_C$$
$$m_L \cdot V_L \cdot \cancel{g} = m_c \cdot \cancel{g} \Rightarrow m_L \cdot V_L = m_c$$
$$\mu_L \cdot \cancel{V} = \mu_C \cdot \cancel{V} \Rightarrow \boxed{\mu_c = 2\ g/cm^3}$$

b) $V_c = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

$$V_c = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(5 \cdot 10^{-2}\right)^3$$
$$V_c = 5{,}23 \cdot 10^{-4}\ m^3$$
$$V_L = V_c$$
$$E = \mu_L \cdot V_L \cdot g$$
$$E = 2 \cdot 10^3 \cdot 5{,}23 \cdot 10^{-4} \cdot 10$$
$$\boxed{E = 10{,}46\ N}$$

3º Caso

Vamos mergulhar um corpo mais denso do que o líquido. Ele ficará em contato com o fundo do recipiente.



$$\boxed{\mu_c > \mu_L}$$

$$N + E = P_c$$
$$N = P_c - E$$
$$N = m_c \cdot g - \mu_L \cdot V_L \cdot g$$
$$N = (m_c - \mu_L \cdot V_L) \cdot g$$

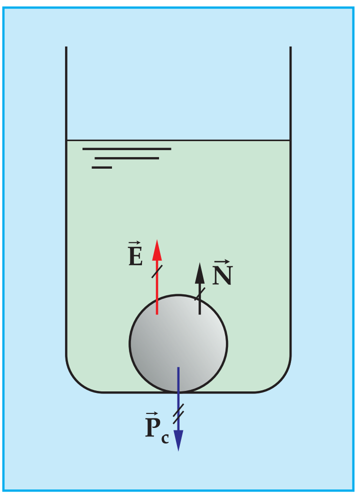
$$\boxed{N = (\mu_c V_c - \mu_L V_L) \cdot g}$$

Exemplo

Uma esfera de massa 10 kg e volume 2.000 cm^3 está submersa, como mostra a figura, num líquido de massa específica 2 g/cm^3, num local onde g = 10 m/s^2. Calcule:

a) a intensidade do empuxo recebido pela esfera;

b) a intensidade da força normal entre a esfera e o fundo do recipiente.



$m_c = 10\ kg$

$V_c = 2.000\ cm^3 = 2 \cdot 10^{-3}\ m^3$

$\mu_L = 2\ g/cm^3 = 2 \cdot 10^3\ kg/m^3$

$g = 10\ m/s^2$

a) *Corpo totalmente submerso* $\Rightarrow V_c = V_L$

$E = \mu_L \cdot V_L \cdot g = 2 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10$

$\boxed{E = 40\ N}$

b) $E + N = P_c$

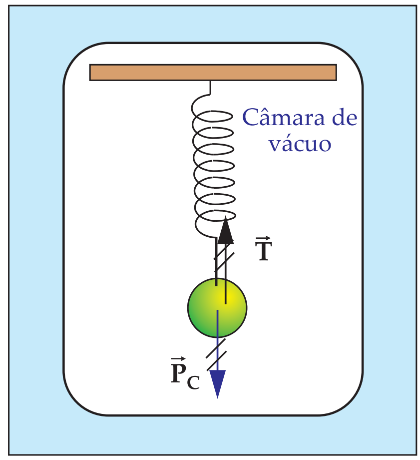
$40 + N = m_c \cdot g$

$N = 10 \cdot 10 - 40$

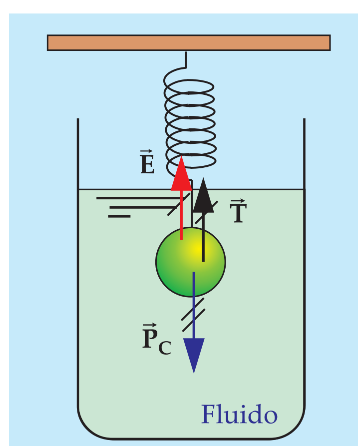
$\boxed{N = 60\ N}$

2. Peso Aparente

Vamos medir a intensidade da força peso $\vec{P}_c$ de um corpo utilizando um dinamômetro:



Com o corpo em equilíbrio, temos: $P_c = T$. Neste caso, com o objeto no vácuo o dinamômetro indica o valor da força peso do objeto. Contudo, quando este processo de medição é realizado com o corpo imerso num fluido (gás ou líquido), o corpo fica sujeito a uma força de empuxo $\vec{E}$, aplicada pelo fluido.



Assim, a intensidade da força $\vec{T}$, que é medida pelo dinamômetro, é:

$T = P_c - E$ (na situação de equilíbrio)

Esse valor é chamado de peso aparente:

$$\boxed{P_{ap} = P_c - E}$$

Exemplo

Num local onde g = 10 m/s^2, verifica-se que o peso de uma esfera no ar é de 15 N e, totalmente mergulhado na água, seu peso aparente é de 10 N. Se a massa específica da água é de 1 g/cm^3, calcule a massa específica da esfera.

Resolução

$$g = 10\,m/s^2$$
$$P_c = 15\text{ N}$$
$$P_{ap} = 10\text{ N}$$
$$\mu_L = 1g/cm^3 = 10^3\ kg/m^3$$

Como a esfera é totalmente mergulhada na água, o seu volume é igual ao volume de líquido deslocado.

$$V_c = V_L$$
$$\begin{cases} E = \mu_L \cdot V_L \cdot g \\ E = P_c - P_{ap} \end{cases}$$
$$P_c - P_{ap} = \mu_L \cdot V_L \cdot g$$
$$15 - 10 = 10^3 \cdot V_c \cdot 10$$
$$V_c = \frac{5}{10^4} = 5 \cdot 10^{-4}\,m^3$$
$$P_c = m_c \cdot g$$
$$15 = m_c \cdot 10$$
$$m_c = 1{,}5\text{ kg}$$
$$\mu_c = \frac{m_c}{V_c} = \frac{1{,}5}{5 \cdot 10^{-4}} = 0{,}3 \cdot 10^4\ kg/m^3$$

$$\boxed{\mu_c = 3 \cdot 10^3\,kg/m^3 = 3\,g/cm^3}$$

Capítulo 07. Análise Dimensional

1. Grandezas Fundamentais

Na mecânica, adotam-se a massa (M), o comprimento (L) e o tempo (T) como grandezas fundamentais.

Pode-se expressar qualquer grandeza física G, de natureza mecânica, em função de M, L e T, obtendo-se, assim, a equação dimensional da grandeza G.

Desse modo, a equação dimensional de G, que é indicada pela notação [G], será dada por $[G] = M^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma}$. Os expoentes α, β e γ são chamados dimensões físicas da grandeza G em relação às grandezas fundamentais M, L e T.

Assim, pode-se escrever todas as grandezas da mecânica em função de L, M e T variando os valores de α, β e γ.

1. Velocidade: $v = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$

se $[\Delta s] = L$
e $[\Delta t] = T$

$$[v] = \frac{L}{T}$$

$$\boxed{[v] = M^0\ L^1\ T^{-1}}$$

2. Aceleração: $a = \dfrac{\Delta V}{\Delta t}$

$$[a] = \frac{M_0 \cdot L^1 \cdot T^{-1}}{T}$$

$$\boxed{[a] = M^0L^1T^{-2}}$$

3. Força: $F = m \cdot a$

$$[F] = M^1 \cdot M^0 \cdot L^1 \cdot T^{-2}$$

$$\boxed{[F] = M^1L^1T^{-2}}$$

4. Trabalho e Energia: $\mathscr{E} = F \cdot d$

$$[\mathscr{E}] = M^1 \cdot L^1 \cdot T^{-2} \cdot L$$

$$\boxed{[\mathscr{E}] = M^1L^2T^{-2}}$$

5. Potência: $P = \dfrac{\mathscr{E}}{\Delta T}$

$$[P] = \frac{M^1 \cdot L^2 \cdot T^{-2}}{T}$$

$$\boxed{[P] = M^1L^2T^{-3}}$$

6. Quantidade de movimento: $Q = m \cdot v$

$$[Q] = M^1 \cdot M^0 \cdot L^1 \cdot T^{-1}$$

$$\boxed{[Q] = M^1L^1T^{-1}}$$

Obs. – No sistema internacional, as unidades das grandezas fundamentais são:

massa – quilograma (kg)

comprimento – metro (m)

tempo – segundo (s)

Exemplo

A força de ação gravitacional é dada por $F = \dfrac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{d^2}$. Determine a dimensão da constante G.

Resolução

$$F = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{d^2} \Rightarrow G = \frac{F \cdot d^2}{m_1 \cdot m_2}$$

$$[G] = \frac{M^1 \cdot L^1 \cdot T^{-2} \cdot L^2}{M \cdot M}$$

$$\boxed{[G] = M^{-1}L^3T^{-2}}$$

2. Homogeneidade Dimensional

> Uma equação física não pode ser verdadeira se não for dimensionalmente homogênea.

Traduzindo a frase acima, notamos que as dimensões de um membro da equação devem ser iguais às dimensões do outro membro. Seria completamente errada a expressão:

80 quilogramas = 30 metros + x metros

Notamos ainda que a homogeneidade dimensional em uma equação é uma condição necessária mas não suficiente para a legitimidade física. Uma equação física pode ser dimensionalmente homogênea mas não ser verdadeira sob outros aspectos.

Exemplo

Uma força que age numa partícula é dada em função do tempo de acordo com a expressão:

$\boxed{F = A + Bt}$

Quais as dimensões de A e B para que a relação seja dimensionalmente homogênea?

Resolução

$\boxed{[A] = [F] = M^1L^1T^{-2}}$

$[Bt] = [F] \Rightarrow [B] \cdot [t] = [F]$

$[B]\ [t] = MLT^{-2}$

$\boxed{[B] = M^1L^1T^{-3}}$

3. Previsão de Fórmulas

A análise dimensional é um poderoso instrumento auxiliar na previsão de fórmulas físicas. Vejamos o exemplo:

Um estudante, fazendo experiências num laboratório, verifica que o período (T) de oscilação de um pêndulo simples depende do comprimento do fio (l) e do módulo da aceleração da gravidade (g). Daí conclui-se que:

$T = k\, l^{\alpha} g^{\beta}$

em que k é uma constante adimensional e α e β são números reais.

Lembrando o princípio da homogeneidade, temos que:

$[T] = [l]^{\alpha}\ [g]^{\beta}$

mas: $[T] = M^0L^0T^1$, $[l] = M^0L^1T^0$ e $[g] = M^0L^1T^{-2}$

Assim:

$M^0L^0T^1 = (M^0L^1T^0)^{\alpha}\ (M^0L^1T^{-2})^{\beta}$

$M^0L^0T^1 = M^0\ L^{\alpha + b}\ T^{-2\beta}$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -2\beta = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \beta = -1/2 \end{cases}$$

Então: $T = k\, l^{1/2}\ g^{-1/2}$

ou $\boxed{T = k\sqrt{\dfrac{l}{g}}}$

As constantes adimensionais não podem ser obtidas na análise dimensional.

Para o estudo da termologia adota-se como grandezas fundamentais, além de LMT, a temperatura θ.

Para o estudo da eletricidade adota-se como grandezas fundamentais, além de LMT, a corrente elétrica I com fundamental. Assim, podemos dar alguns exemplos de grandezas da termologia e da eletricidade:

temperatura – $[t] = M^0L^0T^0\theta^1$

coeficiente de dilatação – $[\alpha] = M^0L^0T^0\theta^{-1}$

quantidade de calor – $[Q] = M^1L^2T^{-2} = [\mathscr{E}]$

calor específico – $[c] = M^0L^2T^{-2}\theta^{-1}$

capacidade térmica – $[C] = M^1L^2T^{-2}\theta^{-1}$

calor latente – $[L] = M^0L^2T^{-2}\theta^0$

carga elétrica – $[q] = M^0L^0T^1I^1$

ddp – $[U] = M^1L^2T^{-3}I^{-1}$

campo elétrico – $[E] = M^1L^1T^{-3}I^{-1}$

resistência elétrica – $[R] = M^1L^2T^{-3}I^{-2}$

capacidade eletrostática – $[C] = M^{-1}L^{-2}T^4I^2$

fluxo magnético – $[\varnothing] = ML^2T^{-2}I^{-1}$

Exemplo

Um novo sistema de unidades foi criado com as grandezas fundamentais: volume (V), força (F) e tempo (T).

Determine, nesse novo sistema, a equação dimensional da potência.

Resolução

$P = \dfrac{\mathscr{E}}{\Delta t}$ sendo $\mathscr{E} = F \cdot d$

Assim, $[V] = [d]^3 \Rightarrow [d] = [V]^{1/3}$

então: $\boxed{[P] = F \cdot V^{1/3} \cdot T^{-1}}$