Matemática 3

Geometria de Posição e Métrica

Pré-Vestibular
Teoria e Exercícios Propostos

EDITORA COC
www.editora.coc.com.br
Editora COC – Empreendimentos Culturais Ltda.
Rua General Celso de Mello Rezende, 301
Tel.: (16) 3603.9700 – CEP 14095-270
Lagoinha – Ribeirão Preto – SP

Capítulo 01. Geometria Espacial de Posição

Capítulo 02. Poliedros

índice.matemática 3

Capítulo 03. Prismas

Capítulo 04. Pirâmides

Capítulo 05. Cilindros

índice.matemática 3

Capítulo 06. Cones

Capítulo 07. Esfera

Capítulo 08. Sólidos Semelhantes

Capítulo 01. Geometria Espacial de Posição

As noções de ponto, reta e plano são primitivas, isto é, não definimos estes elementos da Geometria; no entanto, sabemos intuitivamente o que são e como são.

Para estudarmos a Geometria de Posição no espaço, é preciso que façamos a seguinte definição:

> Espaço é o conjunto de todos os pontos.

Dessa forma, estudaremos neste capítulo as posições relativas de pontos, retas e planos no espaço.

1. Postulados

A demonstração de uma propriedade normalmente é feita com base em outras propriedades, já demonstradas anteriormente. No entanto, as primeiras propriedades de uma teoria, uma vez que não há outras para apoiar as suas demonstrações, são simplesmente "aceitas" como verdadeiras.

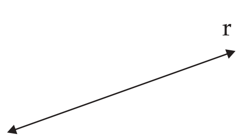
Essas propriedades são chamadas de **postulados**.

São postulados da Geometria Euclidiana:

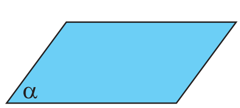
P_1) **Postulados da Existência**

- Existem ponto, reta e plano.

Ponto P

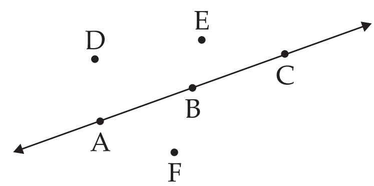


Reta r



Plano α

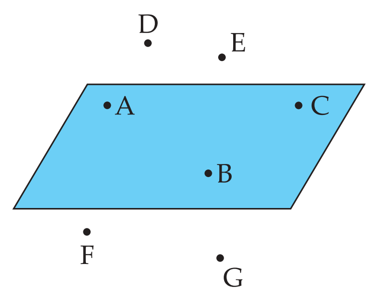
- Numa reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos.



Observação

Os pontos A, B e C pertencem a uma mesma reta, portanto, eles são **colineares.**

- Num plano, bem como fora dele, **existem** infinitos pontos.

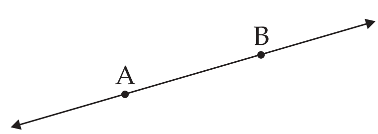


Observação

Os planos A, B e C pertencem a um mesmo plano, portanto, eles são **coplanares**

P_2) **Postulados da Determinação**

- Dois pontos **distintos determinam** uma única reta.

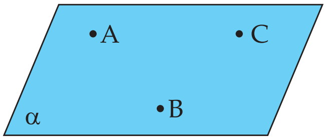


Observações

1ª) Dizemos que dois entes geométricos são distintos quando eles não coincidem.

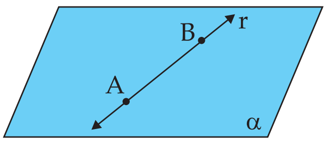
2ª) Dizemos que uma reta fica determinada quando ela for única nas condições especificadas.

- Três pontos **não-colineares determinam** um único plano.



P_3) **Postulado da Inclusão**

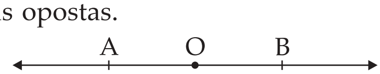
- Uma reta que possui dois pontos distintos em um plano **está contida** nesse plano.



$$\left.\begin{array}{l} A \in \alpha \\ B \in \alpha \\ A \neq B \end{array}\right\} \Rightarrow r = \overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$$

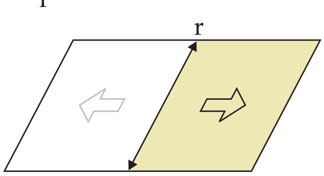
P4) **Postulados de Divisão**

- Um ponto de uma reta **divide-a** em duas regiões denominadas **semi-retas**. O ponto é a origem das semi-retas que são chamadas opostas.

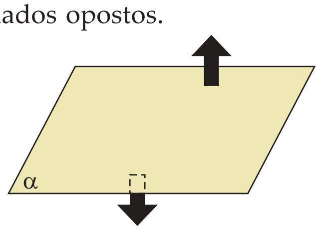


$\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ semi-retas opostas de origem O.

- Uma reta de um plano **divide-o** em duas regiões denominadas **semiplanos**. A reta é a origem dos semiplanos que são chamados opostos.

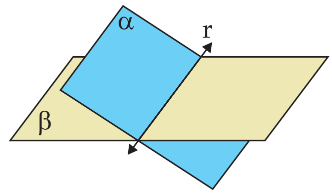


- Um plano **divide** o espaço em duas regiões denominadas **semi-espaços** que são chamados opostos.



P_5) **Postulado da Intersecção**

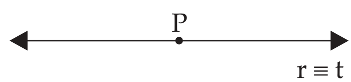
Se dois planos **distintos** têm um ponto em comum, então há uma única reta em comum passando por esse ponto.



P_6) **Postulado das Paralelas (Euclides)**

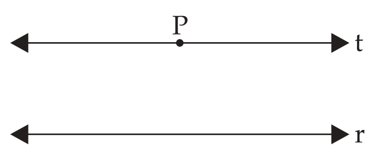
Dado um ponto P e uma reta r, **existe e é única** a reta que passa por P e é **paralela** a r.

1º caso: $P \in r$



$\exists \mid t \,/\, P \in t$ e $t // r$

2º caso: $P \notin r$



$\exists \mid t \,/\, P \in t$ e $t // r$

Observação

No 2º caso, t e r são chamadas paralelas distintas e, no 1º caso, paralelas coincidentes

Exemplos

01. Classifique como verdadeiras ou falsas as afirmações

a) Dois pontos determinam uma reta.

b) Três pontos distintos determinam um plano.

c) Três pontos são sempre coplanares.

d) Se o ponto P de uma reta r pertence a um plano α, então a reta r está contida em α.

Resposta

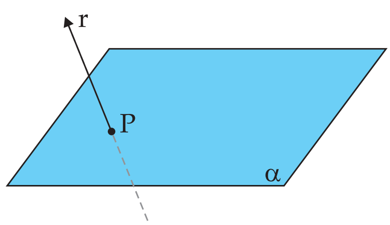
a) F, pois os pontos podem ser coincidentes.

b) F, pois os pontos podem ser colineares.

c) V, pois o significado de "são sempre coplanares" é: existe um plano que os contém. Vamos analisar alguns casos:

- Os três pontos são coincidentes. Nesse caso existem infinitos planos que os contêm, logo existe um.
- Os três pontos são distintos, porém colineares. Também nesse caso existem infinitos.
- Os três pontos são não-colineares. Nesse caso existe um único

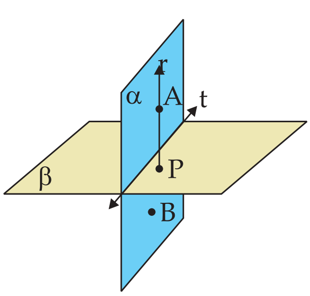
d) F



Se $r \cap \alpha = \{P\}$

$r \not\subset \alpha$

02. A figura mostra dois planos α e β que se interceptam na reta t. Sendo r uma reta contida no plano α, e os pontos A e B pertencentes a semi-espaços distintos em relação a β, existe algo de errado na figura; descubra o que é.



Resposta

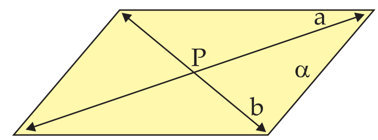
O ponto P deveria estar na reta t.

2. Posições Relativas de Duas Retas

2.1. Definições

I. Retas concorrentes

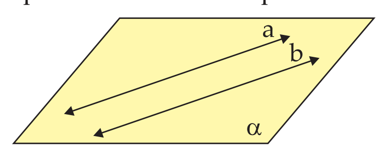
Duas retas são concorrentes quando têm um único ponto em comum.



$a \cap b = \{P\} \Leftrightarrow$ a e b concorrentes

II. Retas paralelas distintas

Duas retas são paralelas distintas, quando forem coplanares e não tiverem ponto em comum.

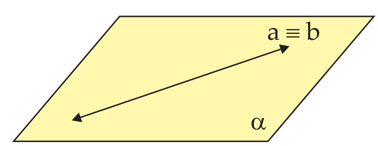


$a \cap b$

$\exists \alpha / a \subset \alpha$ e $b \subset \alpha$ $\Leftrightarrow$ a e b paralelas distintas

III. Retas paralelas coincidentes

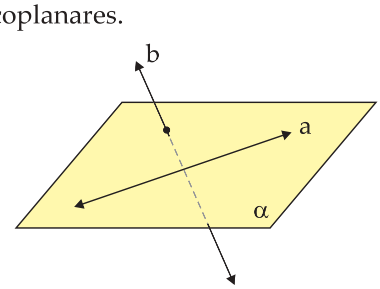
Duas retas são paralelas coincidentes quando tiverem todos os seus pontos em comum.



$a \cap b = a = b \Leftrightarrow$ a e b paralelas coincidentes

IV. Retas reversas

Duas retas são reversas quando não forem coplanares.

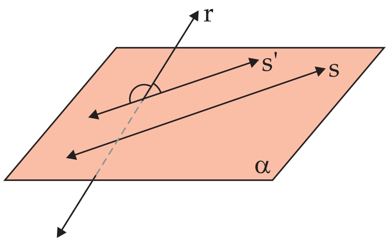


$\exists \alpha / a \subset \alpha$ e $b \not\subset \alpha \Leftrightarrow$ a e b reversas

2.2. Ângulo entre duas retas reversas

Consideremos duas retas reversas r e s.

Seja α um plano que contém s e intercepta r num ponto P. Traçando por P a reta s' paralela a s, dizemos que o ângulo entre r e s é o ângulo entre as retas concorrentes r e s'.



Observação

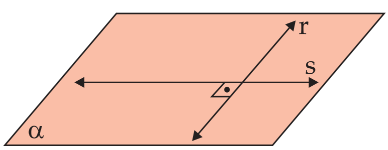
Geralmente, quando nos referimos a um ângulo formado por duas retas, tomamos o ângulo agudo que eles formam.

2.3. Ângulo reto

I. Retas perpendiculares

Duas retas são perpendiculares quando forem **concorrentes** e formarem **ângulo reto**.

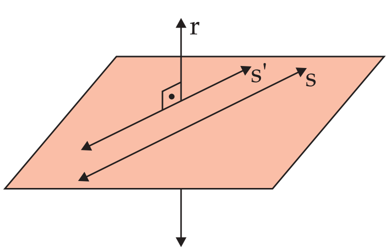
Indicamos por r ⊥ s.



r ⊥ s

II. Retas ortogonais

Duas retas são ortogonais quando forem **reversas** e formarem **ângulo reto**. Indicamos por r ⊥ s.



r ⊥ s

Exemplos

03. Classifique como verdadeiras (V) ou falsas (F) as afirmações a seguir.

a) Duas retas que não têm ponto em comum são paralelas.

b) Duas retas que têm um ponto em comum são concorrentes.

c) Se a medida do ângulo entre duas retas é 90º elas são perpendiculares ou reversas.

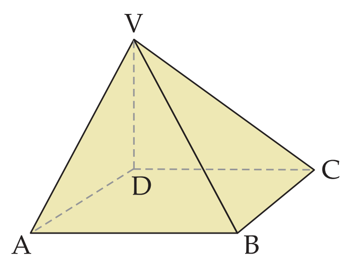
Resposta

a) F, pois podem ser reversas.

b) F, pois podem ser paralelas coincidentes. Para tornar a sentença verdadeira basta dizer que o ponto é único.

c) V

04. Dada a pirâmide, associe (V) ou (F) a cada afirmação.



a) ( ) $\overleftrightarrow{VD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são reversas.

b) ( ) $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ são coplanares.

c) ( ) $\overleftrightarrow{VA}$, $\overleftrightarrow{VB}$, $\overleftrightarrow{VC}$ e $\overleftrightarrow{VD}$ são coplanares.

d) ( ) $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ podem ser paralelas.

e) ( ) $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{VB}$ são concorrentes em B.

Resposta

a) V

b) V

c) F

d) V

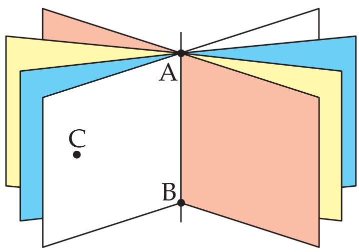
e) V

3. Determinação de Planos

3.1. Plano determinado por três pontos não-colineares

Consideremos três pontos A, B e C não-colineares.

Existe uma infinidade de planos que passam por A e B, os planos que contêm a reta $\overleftrightarrow{AB}$.



No entanto, apenas um desses planos passa também pelo ponto C. Assim, dizemos que:

> Três pontos não-colineares determinam um plano.

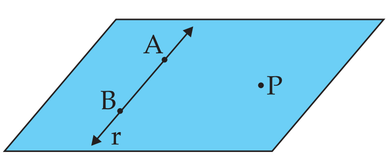
Observação

O plano determinado pelos pontos A, B e C é indicado por pl(ABC).

3.2. Plano determinado por uma reta e um ponto fora dela

Consideremos uma reta r e um ponto P que não pertence a r.

Sejam A e B dois pontos distintos de r. Os pontos A, B e C, por não serem colineares, determinam um plano, e a reta r está contida nesse plano (Postulado da Inclusão).



Assim, dizemos que:

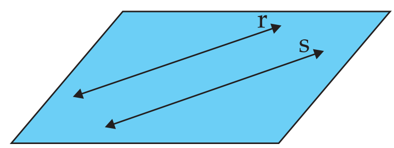
> Uma reta e um ponto fora dela determinam um plano.

Observação

O plano determinado pela reta r e pelo ponto P é indicado por pl (r, P).

3.3. Plano determinado por duas retas paralelas distintas

Consideremos duas retas r e s, paralelas distintas. A própria definição do paralelismo exige que elas estejam num mesmo plano (coplanares). Esse plano é o único que contém duas retas.



Assim, dizemos que:

> Duas retas paralelas distintas determinam um plano.

Observação

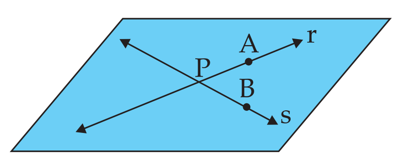
O plano determinado por r e s é indicado por pl (r, s).

3.4. Plano determinado por duas retas concorrentes

Consideremos duas retas concorrentes r e s, que se interceptam no ponto P.

Seja A um ponto de r distinto de P, e B um ponto de s também distinto de P.

Os pontos A, B e P não são colineares, então eles determinam um plano α, e as retas r e s estão contidas nesse plano, pois têm dois pontos distintos pertencentes a ele.



Este plano é o único que contém simultaneamente r e s. Assim:

> Duas retas concorrentes determinam um plano.

Observação

O plano determinado por r e s é indicado por pl (r, s).

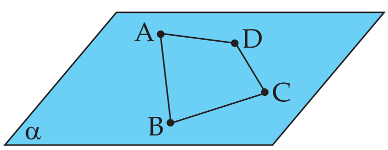
3.5. Quadriláteros plano e reverso

Consideremos quatro pontos A, B, C e D de modo que não existam três colineares.

Em relação ao plano pl (ABC) determinado pelos pontos A, B e C, o ponto D pode ou não pertencer a ele; assim, temos:

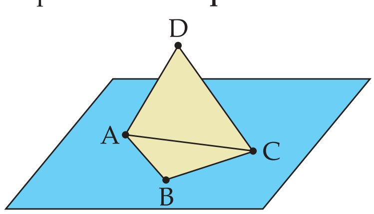
1º) D $\in$ pl (ABC)

Os pontos A, B, C e D são vértices de um quadrilátero que chamamos **quadrilátero plano**.



2º) D $\notin$ pl(ABC)

Os pontos A, B, C e D são vértices de um quadrilátero que chamamos **quadrilátero reverso**.



Observação

As diagonais de um quadrilátero plano estão em retas concorrentes enquanto que as diagonais de um quadrilátero reverso estão em retas reversas.

Exemplo

05. Classifique as afirmações abaixo em verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) Uma reta e um ponto sempre determinam um plano.

b) Duas retas quaisquer sempre determinam um plano.

c) Três retas distintas, paralelas duas, a duas determinam um ou três planos.

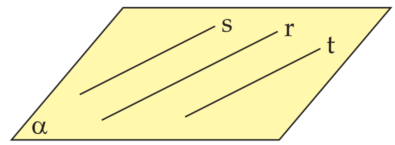
d) três retas concorrentes quaisquer são sempre coplanares

Respostas

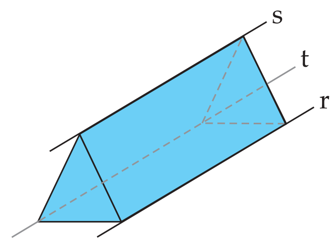
a) F pois o ponto pode pertencer à reta

b) F retas paralelas coincidentes e retas reversas não determinam planos

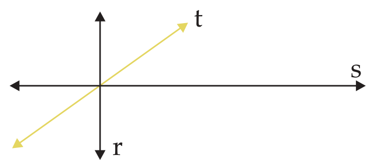
c) V



ou



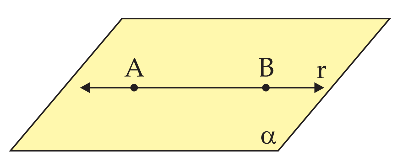
d) F



4. Posições Relativas de Reta e Plano

4.1. Reta contida no plano

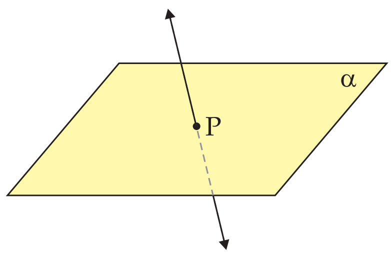
Uma reta está **contida** em um plano quando ela tem **dois pontos distintos** pertencentes ao plano (Postulado da Inclusão)



$$\left.\begin{array}{l} A \neq B \\ A \in r \text{ e } A \in \alpha \\ B \in r \text{ e } B \in \alpha \end{array}\right\} \Leftrightarrow r \subset \alpha \Leftrightarrow r \cap \alpha = r$$

4.2. Reta concorrente com o plano

Uma reta e um plano são **concorrentes** ou **secantes** quando têm um **único** ponto em comum.



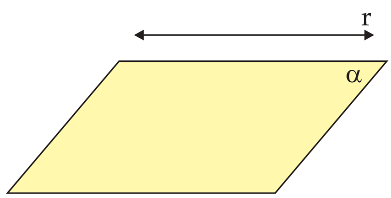
$$\exists | P / r \cap \alpha = \{P\} \Leftrightarrow \begin{cases} r \text{ e } \alpha \\ \text{concorrentes} \end{cases}$$

Observação

O ponto P é chamado **"traço"** da reta no plano.

4.3. Reta paralela ao plano

Uma reta é **paralela** a um plano quando eles não têm ponto em comum.

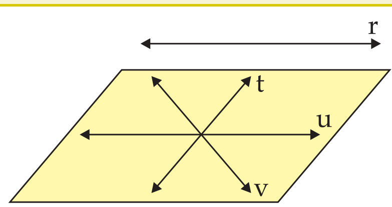


$$r \cap \alpha = \varnothing \Leftrightarrow r // \alpha$$

Importante!

É fácil notarmos que, se uma reta r é paralela a um plano α, ela não tem ponto em comum com α e, desse modo, não tem ponto em comum com as retas contidas em α. Assim, concluímos que:

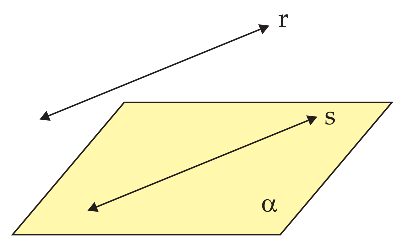
> Se uma reta é paralela a um plano, então ela é **paralela** ou **reversa** a qualquer reta do plano.



4.4. Teorema do paralelismo entre reta e plano

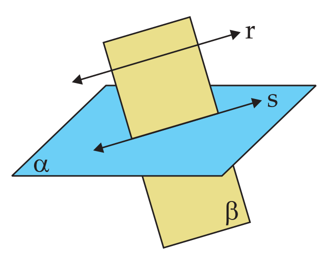
Se uma reta não está contida num plano e é paralela a uma reta do plano, então ela é paralela ao plano.

$$\textbf{Hipótese:} \begin{cases} r \not\subset \alpha \\ s \subset \alpha \\ r // s \end{cases} \qquad \textbf{Tese:} \{ r // \alpha$$



Demonstração

Consideremos um plano β determinado por r e s.



Todos os pontos em comum de α e β estão situados na reta s. Assim, se existir algum ponto em comum entre r e α, esse ponto tem que pertencer à reta s. Como r e s não têm ponto em comum, pois são paralelas distintas, r e α não terão ponto em comum, então r é paralela a α.

Exemplos

06. Classifique como verdadeiras (V) ou falsas (F) as afirmações abaixo.

a) Uma reta e um plano que têm um ponto em comum são concorrentes.

b) Duas retas paralelas a um plano são paralelas entre si.

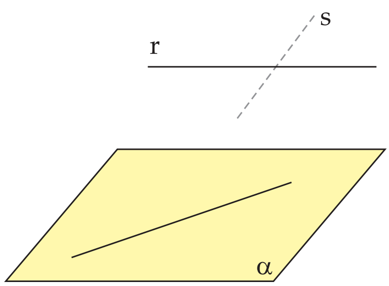
c) Se uma reta é paralela a um plano α, então ela é paralela a todas as retas de α.

d) Se uma reta é concorrente com um plano α, então ela é concorrente ou reversa com as retas de α.

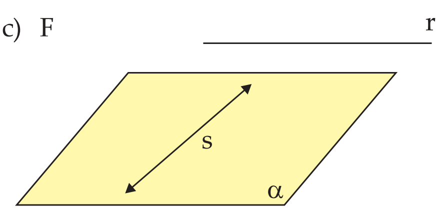
Resposta

a) F, pois a reta pode estar contida.

b) F



c) F

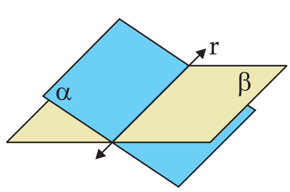


d) V

5. Posições Relativas de Dois Planos

5.1. Planos concorrentes

Dois planos são **concorrentes** ou **secantes** se têm uma única reta em comum.



$$\exists | r \,/\, \alpha \cap \beta = r \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \text{ e } \beta \\ \text{concorrentes} \end{cases}$$

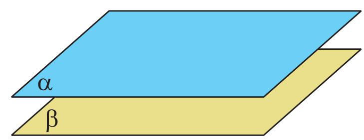
5.2. Planos paralelos coincidentes

Dois planos são **paralelos coincidentes** se têm todos os pontos em comum.

$$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \alpha = \beta$$

5.3. Planos paralelos distintos

Dois planos são **paralelos distintos** quando não têm ponto em comum.

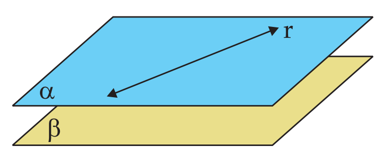


$$\alpha \cap \beta = \varnothing \Leftrightarrow \alpha \,//\, \beta$$

5.4. Paralelismo entre planos: teorema 1

Se dois planos são paralelos distintos, qualquer reta de um deles é paralela ao outro.

$$\textbf{Hipótese:} \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ \alpha \,//\, \beta \\ r \subset \alpha \end{cases} \qquad \textbf{Tese:} \{ r \,//\, \beta$$



Demonstração

Vamos analisar as possíveis posições relativas de r e β e concluir a tese por exclusão.

1) Sabemos que $r \not\subset \beta$, pois se $r \subset \beta$, a reta r seria comum a α e β e os planos α e β não seriam paralelos distintos.

2) A reta r não é concorrente com β, pois, se isso acontecesse, existiria um ponto P de r pertencente a β e, portanto, α e β não seriam paralelos distintos, já que o ponto P seria comum a $\alpha (r \subset \alpha)$ e a β.

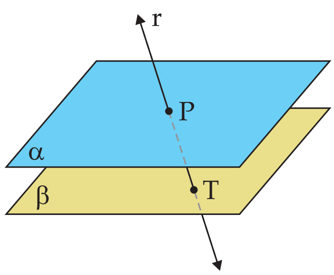
Assim, como $r \not\subset \beta$ e r não é concorrente com β, $r \,//\, \beta$.

5.5. Paralelismo entre planos: teorema 2

Se dois planos são paralelos distintos, toda reta concorrente com um deles é concorrente com o outro.

$$\textbf{Hipótese:}\begin{cases}\alpha \neq \beta \\ \alpha\,//\,\beta \\ r \cap \alpha = \{P\}\end{cases}$$

$$\textbf{Tese:}\begin{cases}r \text{ e } \beta \\ \text{concorrentes}\end{cases}$$



Demonstração

Vamos analisar as possíveis posições relativas de r e β e concluir a tese por exclusão.

1) Sabemos que $r \not\subset \beta$, pois se $r \subset \beta$ o ponto P de r seria comum aos dois planos α e β e os planos não seriam paralelos distintos.
2) A reta r não é paralela a β, pois, se r//β e $r \cap \alpha = \{P\}$ e $\alpha\,//\,\beta$, então r estaria contida em α, o que contraria a hipótese.

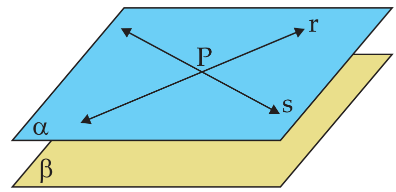
Assim, como $r \not\subset \beta$ e $r\,//\,\beta$, só podemos ter que r e β são concorrentes.

5.6. Paralelismo entre planos: teorema 3

Se um plano contém duas retas concorrentes que são paralelas a um outro plano, então esses planos também são paralelos.

$$\textbf{Hipótese:}\begin{cases}r \subset \alpha \text{ e } r\,//\,\beta \\ s \subset \alpha \text{ e } s\,//\,\beta \\ r \cap s = \{P\}\end{cases}$$

$$\textbf{Tese:}\{\alpha\,//\,\beta$$

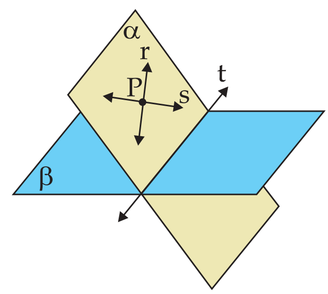


Demonstração

Vamos analisar as possíveis posições relativas de α e β e concluir a tese por exclusão.

1) Sabemos que $\alpha \not\equiv \beta$, pois se $\alpha \equiv \beta$ a reta r estaria contida em β e, portanto, não seria paralela a β.
2) Os planos α e β não são secantes, pois, caso isto ocorresse, teríamos:

$$\exists \mid t \,/\, t = \alpha \cap \beta$$



Como r // β e s // β, temos que r // t e s // t, o que contraria o postulado de Euclides.

Assim, como $\alpha \neq \beta$, α e β não são concorrentes, então α // β.

Exemplo

07. Classifique as afirmações como verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) Dois planos distintos são secantes.

b) Se um plano contém duas retas distintas e paralelas a um outro plano, então esses planos são paralelos.

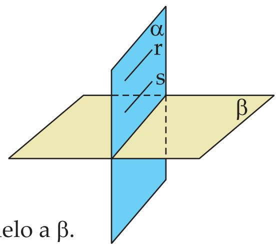
c) Se dois planos são secantes, então existe uma reta de um deles reversa a uma reta do outro.

d) Se dois planos são paralelos, então toda reta paralela a um deles é paralela ou está contida no outro.

Resposta

a) F – Podem ser paralelos distintos.

b) F



r//β, s//β e
α não é paralelo a β.

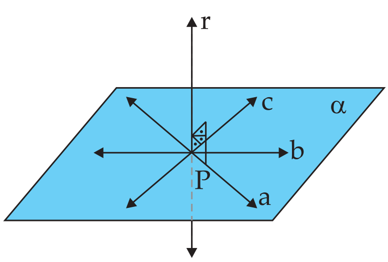
c) V

d) V

6. Perpendicularismo

6.1. Reta e plano perpendiculares

Uma reta r é **perpendicular** a um plano α quando ela é concorrente com o plano e é perpendicular a todas as retas de α que passam pelo seu traço no plano.



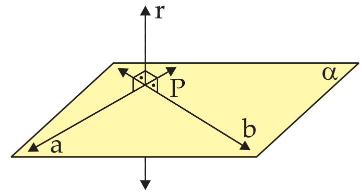
$$\left.\begin{array}{l} r \cap \alpha = P \\ \forall a \subset \alpha \,/\, P \in a \\ r \perp a \end{array}\right\} \Rightarrow r \perp \alpha$$

6.2. Teorema do perpendicularismo entre reta e plano

Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

$$\textbf{Hipótese:}\left\{\begin{array}{l} a \subset \alpha, b \subset \alpha \\ r \perp a, r \perp b \\ a \cap b = P \end{array}\right.$$

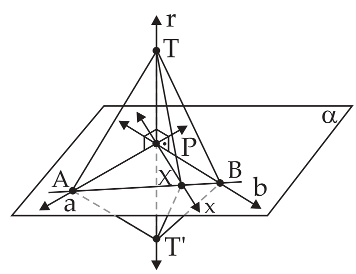
$\textbf{Tese:}\{r \perp \alpha$



Demonstração

Consideremos na reta r dois pontos T e T′ pertencentes a semi-espaços opostos, de modo que PT = PT′. Nas retas a e b, tomamos os pontos A e B quaisquer.

Seja x uma reta qualquer de α que passa por P, e X o ponto onde a reta $\overleftrightarrow{AB}$ intercepta x.



As retas a e b são mediatrizes de $\overline{TT'}$, pois, por hipótese, ambas são perpendiculares a esse segmento e, por construção, elas passam pelo seu ponto médio (P).

Então: AT = AT′ e BT = BT′

Nos triângulos ABT e ABT′, temos:

$$\left.\begin{array}{l} AT = AT' \\ \overline{AB} \text{ é comum} \\ BT = BT' \end{array}\right\} \overset{LLL}{\Rightarrow} \Delta ABT \cong \Delta ABT'$$

A partir dessa congruência, tiramos que $T\hat{A}X = T'\hat{A}X$; então, nos triângulos ATX e AT′X, temos:

$$\left.\begin{array}{l} AT = AT' \\ AX \text{ é comum} \\ T\hat{A}X = T'\hat{A}X \end{array}\right\} \overset{LAL}{\Rightarrow} \Delta ATX \cong \Delta AT'X$$

A partir dessa congruência, tiramos que XT = XT′; então, a reta x é mediatriz de $\overline{TT'}$, pois passa por P, médio de TT′, e por X, eqüidistante de T e T′. Assim, a reta r é perpendicular a x.

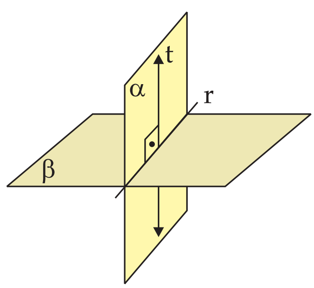
Como x é uma reta qualquer de α passando por P, e x ⊥ r, então r⊥α.

Importante!

Uma reta é perpendicular a um plano quando ela forma ângulo reto (perpendicular ou ortogonal) com duas retas concorrentes do plano.

6.3. Planos perpendiculares

Dois planos são **perpendiculares** se um deles contém uma reta perpendicular ao outro.



$$\left.\begin{array}{l} t \subset \alpha \\ t \perp \beta \end{array}\right\} \Leftrightarrow \alpha \perp \beta$$

Exemplo

08. Classifique as afirmações como verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) Se uma reta é perpendicular a duas retas paralelas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

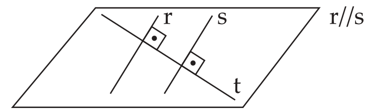
b) Se duas retas são perpendiculares a um mesmo plano, então elas são paralelas.

c) Se uma reta e um plano são paralelos, então toda a reta perpendicular à reta dada é paralela ao plano.

d) Por um ponto de um plano existe uma única reta perpendicular ao plano dado.

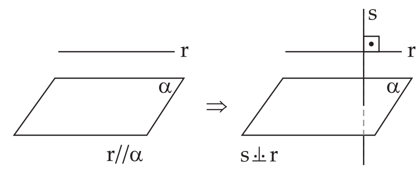
Resposta

a) F – A reta pode estar contida no plano.



b) V

c) F

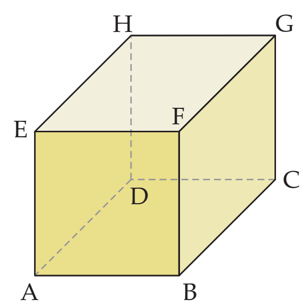


e s não é paralela a α.

d) V

Exercícios Resolvidos

01.



Observe na figura anterior, os triângulos ABC, ABG, ABF, ACG e ACF. Qual deles é um triângulo eqüilátero?

Resposta: *O triângulo ACF, que tem como lados três diagonais dos quadrados que são faces do cubo.*

02. (Unicamp-SP) É comum encontrarmos mesas com 4 pernas que, mesmo apoiadas em um piso plano, balançam e nos obrigam a colocar um calço em uma das pernas, se a quisermos firme. Explique, usando argumentos de geometria, por que isso não acontece com uma mesa de 3 pernas.

Resposta: *O postulado da determinação de planos garante que três pontos não-alinhados determinam um único plano, então, pelas extremidades das três pernas da mesa, temos um único plano para apoio da mesma.*

03. As semi-retas $\overrightarrow{VA}$, $\overrightarrow{VB}$, $\overrightarrow{VC}$ não são coplanares, então os pontos A, B e C determinam um plano. Verdadeiro ou falso? Justifique.

Resposta: *Verdadeiro*

Seja α o plano determinado pelas semi-retas $\overrightarrow{VA}$ e $\overrightarrow{VB}$. Dessa forma a reta $\overleftrightarrow{AB}$ está contida em α.

A semi-reta $\overrightarrow{VC}$ não está contida em α, pois não é coplanar com $\overrightarrow{VA}$ e $\overrightarrow{VB}$, então o ponto C não pertence ao plano α e, portanto, não está alinhado com A e B, logo, A, B e C determinam um único plano.

04. (Fuvest-SP)

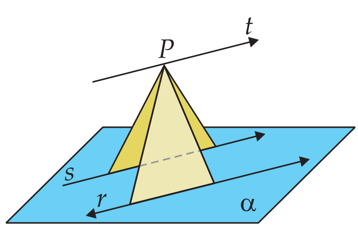
a) Defina retas paralelas.

b) Sejam r e s retas paralelas e P um ponto não-pertencente ao plano rs. Prove que a reta t, intersecção dos planos (Pr) e (Ps), é paralela a r e a s.

Resposta:

a) Duas retas são paralelas quando coincidem ou quando são coplanares e não têm ponto em comum.

b)



As retas t e s não são reversas, pois são coplanares ($t \in$ pl (Ps)), o mesmo acontecendo com t e r.

As retas t e s não são concorrentes, pois se isso acontecesse o ponto de intersecção de t e s também pertenceria a r, e as retas r e s não seriam paralelas. O mesmo acontece com as retas t e r.

Assim: t // s e t // r.

05. (Vunesp-SP)

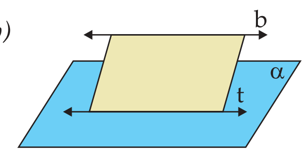
a) Definir quando uma reta e um plano são paralelos.

b) Seja b uma reta não contida no plano α, mas paralela a ele. Mostre que qualquer plano passando por b e encontrando α o faz segundo uma paralela à reta b.

Resposta

a) Uma reta e um plano são paralelos quando eles não têm ponto em comum.

b)



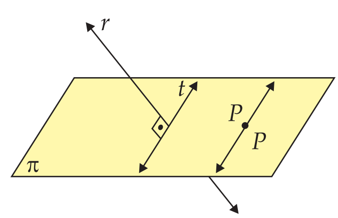
Sendo β um plano que contém a reta b e intercepta α na reta t.

As retas b e t são coplanares ($b \in \beta$ e $t \in \beta$) e não têm ponto comum, pois, se isso acontecesse, o ponto comum de b e t pertenceria a α, e b não seria paralela a α.

Assim, b e t são paralelas.

06. (Fuvest-SP) São dados um plano π, um ponto P do mesmo, e uma reta r oblíqua a π que o fura num ponto distinto de P. Mostre que existe uma única reta por P, contida em π, e ortogonal a r.

Resposta



Se r é oblíqua a π, só existe uma reta t no plano π perpendicular a r. Para que uma reta do plano π seja ortogonal a r, ela deve ser paralela a t, e pelo Postulado de Euclides só existe uma reta passando por P e paralela a t.

07. (PUC-SP) Os planos α e β são paralelos. A reta r é perpendicular a α e a reta s é perpendicular a β. Pode-se concluir que r e s:

a) não têm ponto comum.

b) são perpendiculares.

c) são reversas.

d) são ortogonais.

e) são coplanares.

Resolução

Como α e β são paralelos r também será paralela a s.

Como podem ser paralelas coincidentes a alternativa correta é a E.

***Resposta**: E*

08. (UEL-PR) Dados o plano α e um ponto P não pertencente a α, pelo ponto P:

a) passa apenas uma reta perpendicular a α.

b) passam infinitas retas perpendiculares a α.

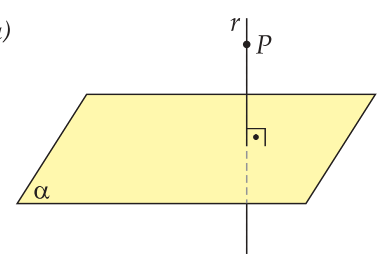
c) passa apenas uma reta paralela a α.

d) passa apenas um plano perpendicular a α.

e) passam infinitos planos paralelos a α.

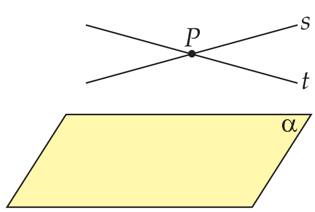
Resolução

a)



b) F

c)



d) F – Qualquer plano que contenha r será perpendicular a α.

e) F – O único plano nessas condições é o plano determinado por s e t.

***Resposta**: A*

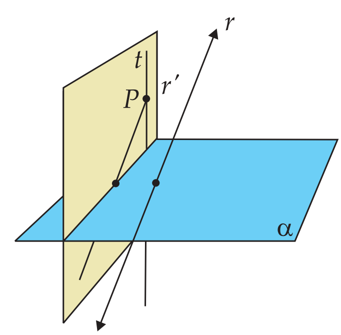
09. (Fuvest-SP) São dados um ponto P, uma reta r e um plano α.

a) Descreva um processo para construir um plano que contém P, é paralelo a r e perpendicular a α.

b) Discuta o caso particular em que r é perpendicular a α.

Resolução

a) Para existir o plano pedido, devemos ter que o ponto $P \notin r$. Assim:

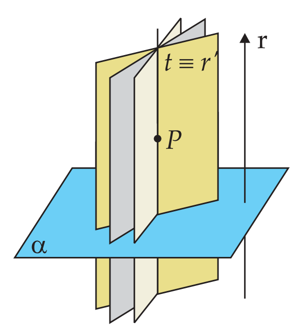


1º) Traçamos por P uma reta r' // r.

2º) Traçamos por P uma reta $t \perp \alpha$.

3º) O plano determinado por r' e t é o plano procurado.

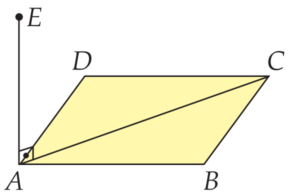
b) Quando r é perpendicular a α existem infinitos planos nas condições apresentadas, se $P \in r$.



10. (Fuvest-SP) São dados cinco pontos não-coplanares A, B, C, D, E. Sabe-se que ABCD é um retângulo, $AE \perp AB$ e $AE \perp AD$. Pode-se concluir que são perpendiculares as retas:

a) EA e EB
b) EC e CA
c) EB e BA
d) EA e AC
e) AC e BE

Resposta: *C*



11. (UCSal-BA) Sejam o plano α e a reta *r*, paralela a α. Nestas condições, é verdade que:

a) toda reta paralela a *r* está contida em α.

b) toda reta perpendicular a r é perpendicular a α.

c) toda reta ortogonal a r é perpendicular a α.

d) existem retas paralelas a r que são perpendiculares a α.

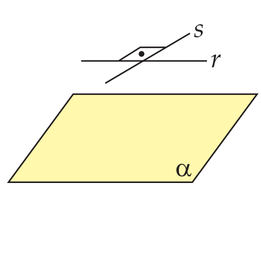
e) existem retas contidas em α que não são paralelas a r.

Resolução

a) Falsa; existem infinitas retas paralelas a r que não estão contidas em α.

b) Falsa; a reta pode ser paralela a α ou oblíqua.

(s *paralela a α)*

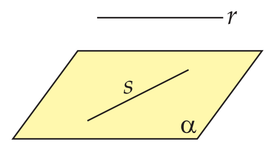


(s paralela a α)

c) Falsa; no exemplo anterior basta tomar s reversa (e ortogonal) com r.

d) Falsa; as paralelas a r serão paralelas a α ou estarão contidas em α.

e) Verdadeira; podem ser reversas.



12. (UFSCar-SP) Considere um plano a e um ponto *P* qualquer do espaço. Se por *P* traçarmos a reta perpendicular a a, a intersecção dessa reta com a é um ponto chamado projeção ortogonal do ponto *P* sobre a. No caso de uma figura S do espaço, a projeção ortogonal de S sobre a é definida pelo conjunto das projeções ortogonais de seus pontos.

Com relação a um plano a qualquer fixado, pode-se dizer que

a) a projeção ortogonal de um segmento de reta pode resultar numa semi-reta.

b) a projeção ortogonal de uma reta sempre resulta numa reta.

c) a projeção ortogonal de uma parábola pode resultar num segmento de reta.

d) a projeção ortogonal de um triângulo pode resultar num quadrilátero.

e) a projeção de uma circunferência pode resultar num segmento de reta.

Resposta: *E*

A projeção ortogonal de uma circunferência será um segmento de reta, quando ela estiver contida num plano perpendicular à a.

Capítulo 02. Poliedros

1. Superfície Poliédrica

Consideremos $n\,(n \notin N^*)$ polígonos convexos (regiões poligonais) tais que:

1º) dois quaisquer nunca são coplanares;

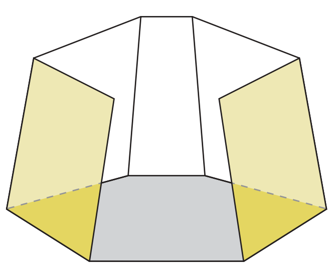
2º) o plano contendo um deles deixa os demais no mesmo semi-espaço;

3º) cada lado de polígono está no máximo em dois polígonos.

A união desses polígonos forma uma figura denominada **superfície poliédrica convexa**. Os polígonos são as **faces**, e os seus lados, as **arestas** da superfície poliédrica convexa.

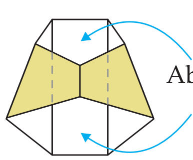
Quando uma superfície poliédrica possui arestas livres que formam um único "contorno" fechado, ela é chamada **aberta**, e quando ela não possui lados livres, **fechada.**

Quando uma superfície poliédrica é fechada ou aberta com um só contorno, dizemos que ela é **simplesmente convexa** ou de **"conexão 1"**; quando ela tem "*n*" contornos, é de "**conexão *n***".



Superfície poliédrica aberta com um único contorno.

(simplesmente **convexa**)



Superfície poliédrica aberta com dois contornos.

(conexão 2)

2. Poliedro Convexo

Consideremos um número finito $n\,(n \geq 4)$ de polígonos convexos (regiões poligonais), tais que:

1º) dois quaisquer nunca são coplanares;

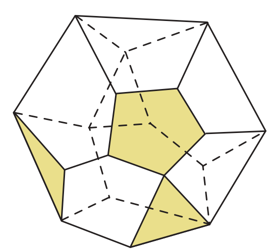
2º) o plano contendo um deles deixa os demais no mesmo semi-espaço;

3º) cada lado de polígono é comum a dois e somente a dois polígonos.

Nessas condições, ficam determinados *n* semi-espaços, cada um dos quais com origem no plano de um polígono e contendo os restantes. A intersecção desses semi-espaços é chamada de **poliedro convexo.**

Os polígonos convexos são as **faces** do poliedro; os lados dos polígonos são as **arestas** do poliedro e os vértices dos polígonos são os **vértices** do poliedro.

A reunião das faces é a superfície do poliedro.



3. Lema do Teorema de Euler

Consideremos uma superfície poliédrica convexa aberta com um único contorno (simplesmente **convexa**), com V_a vértices, A_a arestas e F_a faces, então:

$$\boxed{V_a - A_a + F_a = 1}$$

Demonstração

Por indução finita quanto ao número de faces F_a.

1ª Parte

Para $F_a = 1$. Neste caso a superfície poliédrica se reduz a um único polígono com *n* lados e *n* vértices, então:

$$\left.\begin{array}{l} V_a = n \\ A_a = n \\ F_a = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow V_a - A_a + F_a = n - n + 1 = 1$$

Logo, a relação está verificada para $F_a = 1$.

2ª Parte

Admitamos que a relação seja válida para uma superfície com F' faces (que possui V' vértices e A' arestas) e vamos provar que também vale para uma superfície de $F' + 1$ faces (que possui $F' + 1 = F_a$ faces, V_a vértices e A_a arestas).

Assim por hipótese, para a superfície de F′ faces, A′ arestas e V′ vértices vale:

$$\boxed{V' - A' + F' = 1}$$

Acrescentando a essa superfície (que é aberta) uma face de p arestas (lados) e considerando que q dessas arestas (lados) coincidem com arestas já existentes, obtemos uma nova superfície com F_a faces, A_a arestas e V_a vértices, tais que:

$F_a = F' + 1$

$A_a = A' + p - q$ (q arestas coincidiram)

$V_a = V' + p - (q + 1)$ (q arestas coincidindo, q + 1 vértices coincidem).

Substituindo esses valores na expressão $V_a - A_a + F_a$, temos:

$$V_a - A_a + F_a = [V' + p - (q + 1)] - [A' + p - q] + + [F' + 1] = = V' + p - q - 1 - A' - p + q + F' + 1$$

Assim:

$$V_a - A_a + F_a = V' - A' + F'$$

Como por hipótese $V' - A' + F' = 1$, temos que:

$$\boxed{V_a - A_a + F_a = 1}$$

4. Teorema de Euler

Para todo poliedro convexo, ou para sua superfície, vale a relação:

$$\boxed{V - A + F = 2}$$

em que V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro.

Demonstração

Tomamos a superfície de qualquer poliedro convexo ou qualquer superfície poliédrica convexa fechada (com V vértices, A arestas e F faces) e dela retiremos uma face. Ficamos, então, com uma superfície aberta (com V_a vértices, A_a arestas e F_a faces) para a qual vale a relação:

$$V_a - A_a + F_a = 1$$

Como:

$V_a = V$, $A_a = A$ e $F_a = F - 1$, temos:

$$V - A + (F - 1) = 1$$

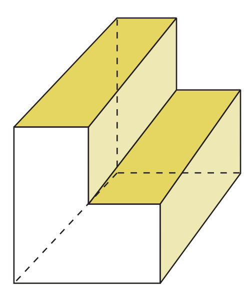
Então: $\boxed{V - A + F = 2}$

Observação

A relação de Euler vale para todos os poliedros convexos, porém existem poliedros que não são convexos e mesmo assim são eulerianos.

Exemplos

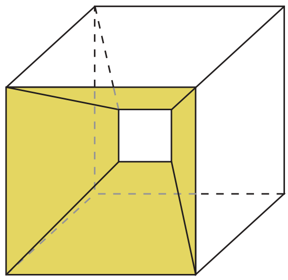
1º)



Poliedro não-convexo:

$$\left.\begin{array}{l} V = 12 \\ A = 18 \\ F = 8 \end{array}\right\} V - A + F = 2 \text{ (euleriano)}$$

2º)



Poliedro não-convexo

$$\left.\begin{array}{l} V=12 \\ A=24 \\ F=12 \end{array}\right\} V-A+F=0 \text{ (não-euleriano)}$$

5. Propriedade

A soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo é:

$$S = (V - 2) \cdot 4\,r$$

em que V é o número de vértices e r é um ângulo reto.

Demonstração

Consideremos um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces.

Sejam n_1, n_2, ..., n_f os números de lados das faces 1, 2, ..., F, respectivamente.

Sabemos que a soma dos ângulos de uma face com *n* lados é: $S = (n - 2) \cdot 2\,r$.

Para todas as faces temos:

$$S = (n_1 - 2) \cdot 2r + (n_2 - 2) \cdot 2r + \ldots + (n_F - 2) - 2r$$
$$S = n_1 \cdot 2r - 4r + n_2 \cdot 2r - 4r + \ldots + n_F \cdot 2r - 4r$$
$$S = (n_1 + n_2 + \ldots + n_F) \cdot 2r - \underbrace{(4r + 4r + \ldots + 4r)}_{\text{F vezes}}$$

Como $n_1 + n_2 + \ldots + n_F = 2A$, temos:

$$S = 2A \cdot 2r - F \cdot 4r$$
$$S = (A - F) \cdot 4r$$

Mas, $V - A + F = 2 \Rightarrow A - F = V - 2$

Assim: $\boxed{S = (V - 2) \cdot 4\,r}$

Exercícios Resolvidos

01. (PUC-SP) Qual é o poliedro que tem 12 vértices e 30 arestas?

a) Hexaedro
b) Octaedro
c) Dodecaedro
d) Icosaedro
e) Tridecaedro

***Resposta:* D**

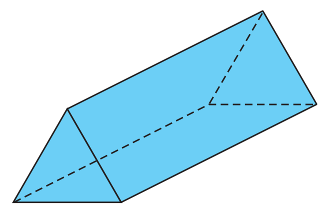
$V = 12,\ A = 30$

$V + F = A + 2 \Rightarrow F = 20 \Rightarrow$ *icosaedro*

02. (Fuvest-SP) Quantas faces tem um poliedro convexo com seis vértices e nove arestas? Desenhe um poliedro que satisfaça essas condições.

Resolução

$V + F = A + 2 \Rightarrow 6 + F = 9 + 2 \Rightarrow F = 5$



03. Um poliedro convexo tem quatro faces triangulares e seis faces quadrangulares. Calcule o número de arestas e o de vértices do poliedro.

Resolução

• *Número de arestas (A):*

Nas quatro faces triangulares, temos 4 × 3 arestas e, nas seis faces quadrangulares, 6 × 4 arestas.

Como cada aresta é comum a duas faces, todas as arestas foram contadas duas vezes. Então:

$2A = 4 \times 3 + 6 \times 4$

$2A = 36 \Rightarrow \boxed{A = 18}$

• *Número de vértices (V):*

Com F = 10 e A = 18, na relação de Euler, temos:

$V - A + F = 2 \Rightarrow V = -18 + 10 = 2$

Assim, $\boxed{V = 10}$

Resposta: *A = 18 e V = 10*

04. Um poliedro de sete vértices tem cinco ângulos tetraédricos e dois ângulos pentaédricos. Quantas arestas e quantas faces tem o poliedro?

Resolução

• *Número de arestas (A)*

O número de arestas dos 5 ângulos tetraédricos é 5×4 e o número de arestas dos 2 ângulos pentaédricos é 2×5. Como cada aresta foi contada duas vezes, temos:

$$2A = 5 \times 4 + 2 \times 5$$

$$2A = 30 \Rightarrow \boxed{A = 15}$$

• *Número de faces (F):*

Com $V = 7$ e $A = 15$ em $V - A + F = 2$, temos:

$$7 - 15 + F = 2 \Rightarrow \boxed{F = 10}$$

Resposta: $A = 15$ e $F = 10$

05. Um poliedro convexo possui 6 faces e 9 arestas. Qual a soma das medidas dos ângulos de todas as faces?

Resolução

$$\left.\begin{array}{l} F = 6 \\ A = 9 \\ V - A + F = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow V - 9 + 6 = 2 \Rightarrow \boxed{V = 5}$$

Como $S = (V - 2) \cdot 4\ r$, temos

$$S = (5 - 2) \cdot 4\ r = 12$$

Assim: $\boxed{S = 1\,080°}$

6. Poliedros de Platão

6.1. Definição

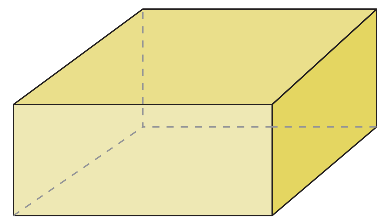
Um poliedro euleriano é chamado poliedro de Platão quando:

1º) todas as faces têm o mesmo número de arestas;

2º) todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número de arestas.

Exemplos

O hexaedro da figura é um poliedro de Platão, pois



é euleriano:

F = 6; V = 8; A = 12

V – A + F = 2

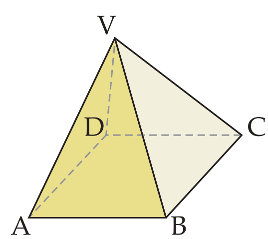
e

todas as faces têm 4 arestas,

e

todos os ângulos poliédricos têm 3 arestas.

A pirâmide da figura não é um poliedro de Platão, pois



embora seja euleriana:

F = 5; V = 5, A = 8

V – A + F = 2

Temos faces com 4 arestas (base) e faces com 3 arestas, temos também vértices com 4 arestas e vértices com 3 arestas.

6.2. Teorema de Platão

Existem cinco, e somente cinco, classes de poliedros de Platão.

Demonstração

Usando as condições que devem ser verificadas por um poliedro de Platão, temos:

1º) V – A + F = 2 (I)

2º) cada uma das F faces tem n arestas ($n \geq 3$), e, como cada aresta está em duas faces, então,

$$n \cdot F = 2A \Rightarrow F = \frac{2A}{n} \quad (II)$$

3º) cada um dos ângulos poliédricos tem m arestas$(m \geq 3)$, como cada aresta contém dois vértices, então,

$$m \cdot V = 2A \Rightarrow V = \frac{2A}{m} \quad (III)$$

Substituindo (II) e (III) em (I), temos:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2$$

Dividindo por 2A:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \quad (IV)$$

Sabemos que $n \geq 3$ e $m \geq 3$. Porém, se m e n forem, simultaneamente, maiores que 3, teremos:

$$\left.\begin{array}{l} m > 3 \Rightarrow m \geq 4 \Rightarrow \dfrac{1}{m} \leq \dfrac{1}{4} \\ n > 3 \Rightarrow n \geq 4 \Rightarrow \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$$

ou seja:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq 0$$

o que contrariará a condição (IV), pois A é um número positivo.

Concluímos, então, que, nos poliedros de Platão, m = 3 ou n = 3 (isto significa que, num poliedro de Platão, temos obrigatoriamente triedro ou triângulo).

Assim,

1º) Para m = 3 (supondo que tem triedro).
Em (IV) temos:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A}$$

Assim, $\frac{1}{n} > \frac{1}{6} \Rightarrow n < 6$

Então, n = 3 ou n = 4 ou n = 5.

2º) Para n = 3 (supondo que tem triângulo), em (IV) temos:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A}$$

Assim, $\frac{1}{m} > \frac{1}{6} \Rightarrow m < 6$

Então, m = 3 ou m = 4 ou m = 5.

Resumindo os resultados encontrados no 1º e no 2º, concluímos que os poliedros de Platão são determinados pelos pares (m, n) da tabela abaixo, sendo, portanto, cinco, e somente cinco, as classes de poliedros de Platão.

m	3	3	3	4	5
n	3	4	5	3	3

6.3. Os poliedros de Platão

Sabendo m e n para cada um dos cinco poliedros de Platão, podemos determiná-los usando as relações II, III e IV obtidas no subitem anterior.

Assim, para m = 3 e n = 3, temos:

em IV: $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \Rightarrow A = 6$

em II: $F = \frac{2 \cdot 6}{3} \Rightarrow F = 4$

em III: $V = \frac{2 \cdot 6}{3} \Rightarrow V = 4$

Procedendo do mesmo modo, temos:

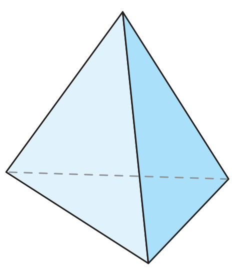
m	*n*	*A*	*V*	*F*	Nome
3	3	6	4	4	Tetraedro
3	4	12	8	6	Hexaedro
4	3	12	6	8	Octaedro
3	5	30	20	12	Dodecaedro
5	3	30	12	20	Icosaedro

7. Poliedros Regulares

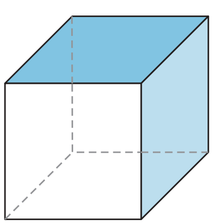
Denominamos poliedros regulares aos poliedros de Platão, cujas faces são polígonos regulares congruentes e cujos ângulos poliédricos são congruentes (coincidem por superposição).

Há cinco tipos de poliedros regulares que são:

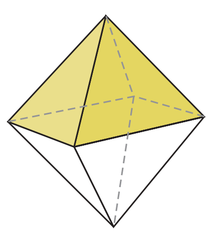
– **tetraedro regular:** as faces são triângulos eqüiláteros.
– **hexaedro regular:** as faces são quadradas
– **octaedro regular:** as faces são triângulos eqüiláteros.
– **dodecaedro regular:** as faces são pentágonos regulares.
– **icosaedro regular:** as faces são triângulos eqüiláteros.



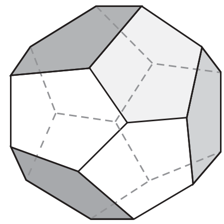
Tetraedro regular



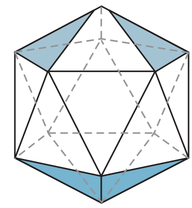
Hexaedro regular



Octaedro regular



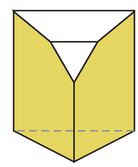
Dodecaedro regular



Icosaedro regular

Exercícios Resolvidos

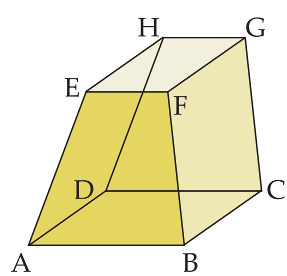
01. O hexaedro da figura abaixo é um poliedro de Platão?



Resolução

Não, pois tem faces triangulares (com 3 arestas) e faces quadrangulares (com 4 arestas).

02. O hexaedro da figura abaixo é um poliedro regular? Justifique.



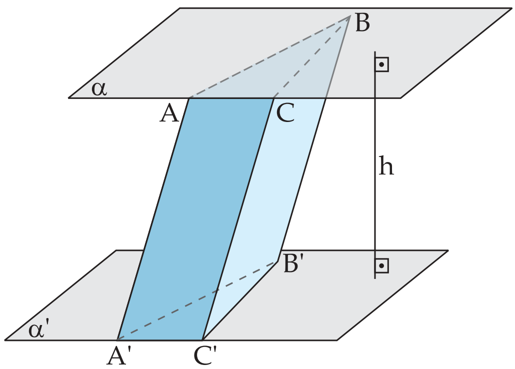
Resolução

Não, pois embora seja um poliedro de Platão, as faces não são polígonos regulares e congruentes entre si.

Capítulo 03. Prismas

1. Definição e Elementos

Prisma é um poliedro convexo tal que duas faces são polígonos congruentes situados em planos paralelos e as demais faces são paralelogramos.



Na figura acima temos:

1º) os triângulos ABC e A′B′C′ (polígonos congruentes situados em planos paralelos) são as **bases** do prisma.

2º) os paralelogramos ABB′A′, CBB′C′ e ACC′A′ (demais faces) são as **faces laterais** do prisma.

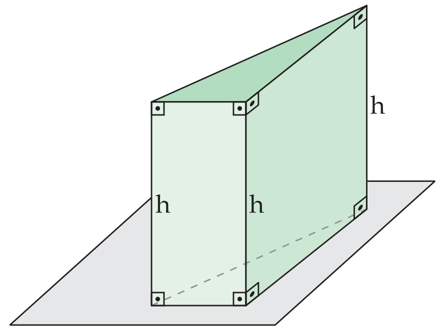
3º) os lados dos polígonos que são as bases do prisma, AB, BC, AC, A′B′, B′C′e A′C′, são as **arestas das bases** do prisma.

4º) os lados das faces laterais que têm uma extremidade em cada base são as **arestas laterais** do prisma.

5º) a distância entre os planos das bases é a **altura** do prisma.

Observação

Caso as arestas laterais sejam perpendiculares aos planos das bases, suas medidas coincidem com a altura do prisma. Neste caso as faces laterais são retângulos e estão situadas em planos perpendiculares aos planos das bases.



2. Nomenclatura e Classificação

Os prismas recebem nomes de acordo com os polígonos das bases.

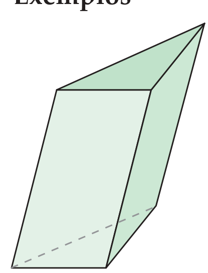
Assim,

- um prisma é triangular quando suas bases são triângulos;
- um prisma é quadrangular quando suas bases são quadriláteros;
- um prisma é pentagonal quando suas bases são pentagonais;
- um prisma é hexagonal quando suas bases são hexagonais.

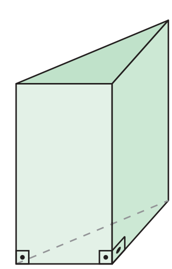
Quando as arestas laterais de um prisma forem perpendiculares aos planos das bases, o prisma é chamado de **reto**; caso contrário, de **oblíquo**.

Os prismas retos cujas bases são **polígonos regulares** são chamados de **prismas regulares**.

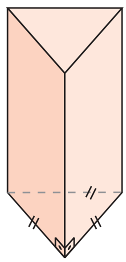
Exemplos



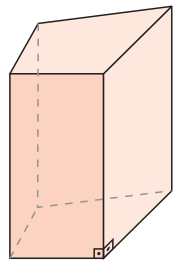
Prisma triangular oblíquo



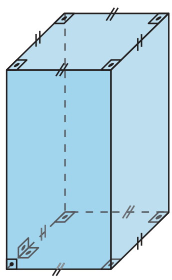
Prisma triangular reto



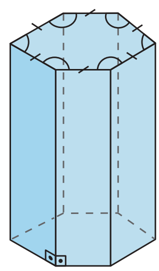
Prisma triangular regular



Prisma quadrangular reto



Prisma quadrangular regular

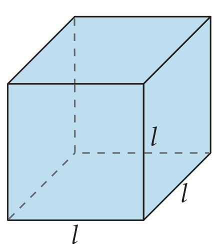


Prisma hexagonal regular

3. Cubo

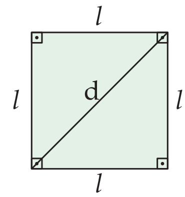
3.1. Definição e elementos

Cubo é um prisma em que todas as faces são quadradas. O cubo é um prisma quadrangular regular cuja altura é igual à medida da aresta da base.



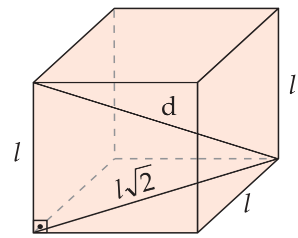
O cubo da figura tem arestas de medida l, então,

- as diagonais de suas faces medem $l\sqrt{2}$, pois são diagonais de quadrados de lados com medidas iguais a l.



$d = l\sqrt{2}$

- as diagonais do cubo medem $l\sqrt{3}$, pois:



$d^2 = l^2 + (l\sqrt{2})^2 = 3\,l^2$

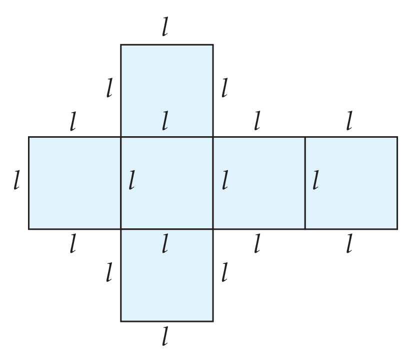
Assim, $\boxed{d = l\sqrt{3}}$

3.2. Área

A superfície do cubo é a reunião dos seis quadrados que são suas faces. Chamamos a medida desta superfície de área do cubo.

A área de um quadrado de lado l é l^2, então a área A da superfície de um cubo de aresta l é:

$$\boxed{A = 6l^2}$$

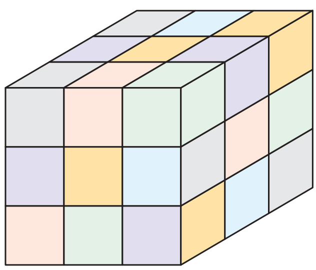


Cubo planificado

3.3. Volume

Para o cálculo do volume de um sólido, adotamos, como unidade de medida, um cubo de aresta unitária. Assim, um cubo de aresta 1 metro (1 m) tem volume 1 metro cúbico (1 m^3); um cubo de aresta 1 centímentro (1 cm) tem volume 1 centímentro cúbico (1 cm^3); um cubo de aresta 1 decímetro (1 dm) tem volume 1 decímetro cúbico (1 dm^3).

Consideremos agora um cubo de aresta 3 cm. Observamos que nele "cabem" 27 cubos de aresta 1 cm. Assim o seu volume é 27 cm^3.



De uma forma genérica, afirmamos que um cubo de aresta l tem volume V dado por:

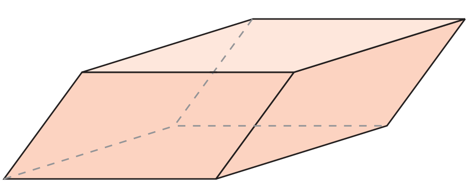
$$\boxed{V = l^3}$$

4. Paralelepípedos

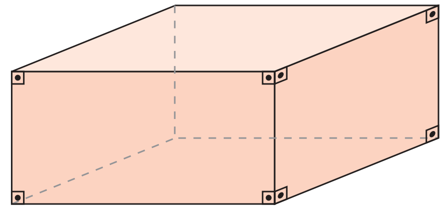
4.1. Definição

Chamamos de paralelepípedo o prisma cujas bases são paralelogramos; dessa forma, todas as faces de um paralelepípedo são paralelogramos.

Exemplos



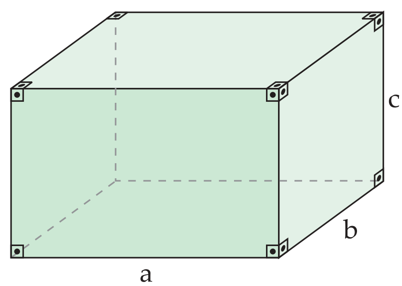
Paralelepípedo oblíquo



Paralelepípedo reto

4.2. Paralelepípedo reto retângulo

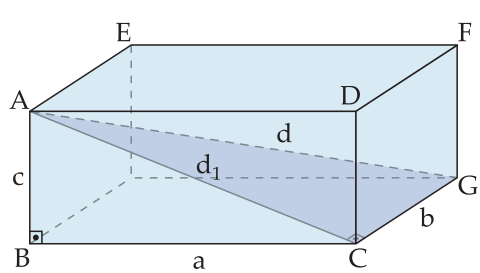
Chamamos de paralelepípedo reto retângulo o paralelepípedo reto cujas **bases são retângulos**; dessa forma, todas as suas seis faces são retângulos. Ele também é chamado de **ortoedro** ou simplesmente **paralelepípedo retângulo.**



Dizemos que, no paralelepípedo da figura, a, b e c são as suas **dimensões**, e percebemos que as medidas das 12 arestas são iguais a a, b e c, sendo quatro delas com cada uma das três medidas.

I. Diagonais de um paralelepípedo retângulo

No paralelepípedo da figura com dimensões a, b e c, sejam d_1 e d, as diagonais da face ABCD e do paralelepípedo, respectivamente.



No triângulo ABC, temos:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

ou então,

$$\boxed{d_1^2 = a^2 + c^2}$$

No triângulo ACG, temos:

$AG^2 = AC^2 + CG^2$

ou então,

$$\boxed{d^2 = d_1^2 + b^2}$$

Como $d_1^2 = a^2 + c^2$, temos:

$d^2 = a^2 + c^2 + b^2$ ou

$$\boxed{d^2 = a^2 + b^2 + c^2}$$

II. Área total (A_T) de um paralelepípedo retângulo

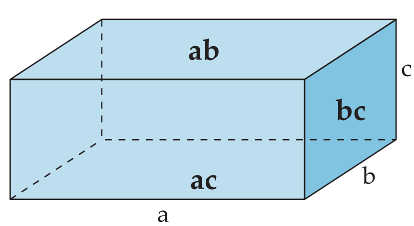
Sendo a, b e c as dimensões de um paralelepípedo retângulo, as áreas de cada par de faces opostas são: ab, ac e bc.

Assim,

$$\boxed{A_T = 2ab + 2ac + 2bc}$$

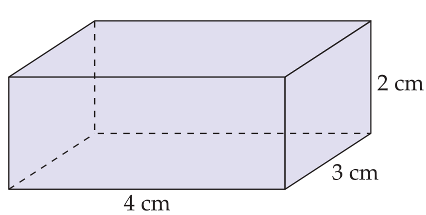
ou

$$\boxed{A_T = 2 \cdot (ab + ac + bc)}$$

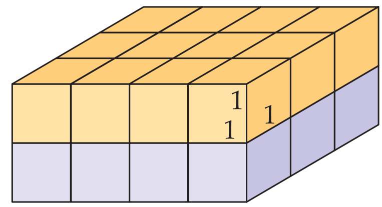


III. Volume (V) de um paralelepípedo retângulo

Consideremos inicialmente um paralelepípedo retângulo de dimensões 4 cm, 3 cm e 2 cm.



Notamos que nesse paralelepípedo cabem 2 camadas de cubinhos de aresta unitária, e que em cada camada cabem 4 · 3 cubinhos.



Como o volume de cada cubinho é 1 cm^3, o volume do paralelepípedo é:

$$\boxed{V = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24 \text{ cm}^3}$$

Sendo a, b e c as dimensões do paralelepípedo retângulo, temos:

$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$$

b_4) **Relação importante**

Sendo a, b e c as dimensões de um paralelepípedo retângulo, temos:

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Como,

$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$

e

$2ab + 2ac + 2bc = A_T$

concluímos que:

$$\boxed{(a + b + c)^2 = d^2 + A_T}$$

Exercícios Resolvidos

01. Qual o volume de um cubo de área 54 cm^2?

Resolução

*Sendo **a** a aresta do cubo, temos:*

$6a^2 = 54 \Rightarrow a^2 = 9$

Assim, $a = 3$ *cm*

$V = a^3 = 3^3 \Rightarrow \boxed{V = 27\,cm^3}$

02. A diagonal de uma face do cubo tem medida $5\sqrt{2}$ cm. Qual a área do cubo?

Resolução

Sendo $\boldsymbol{a}$ *a aresta do cubo, temos:*

$$a\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow a = 5\,cm$$

$$A = 6\,a^2 = 6 \cdot 5^2$$

$$\therefore \boxed{A = 150\,cm^2}$$

03. Aumentando de 1 cm a aresta de um cubo, a área de uma face aumenta de 7 cm². Qual é a área total do cubo?

Resolução

Sendo $\boldsymbol{a}$ *a aresta do cubo, temos:*

$$(a+1)^2 = a^2 + 7$$

$$a^2 + 2a + 1 = a^2 + 7 \Rightarrow a = 3$$

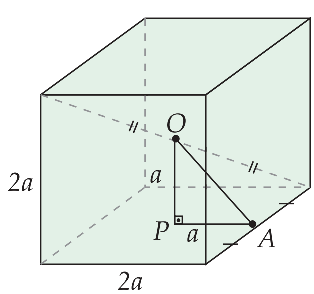
$$A = 6a^2 = 6 \cdot 3^2 \Rightarrow A = 54cm^2$$

04. Num cubo de volume $8a^3$, qual a distância do centro (ponto de encontro das diagonais) ao ponto médio de uma aresta?

Resolução

Sendo l a aresta do cubo, temos:

$$l^3 = 8a^3 \Rightarrow l = 2a$$



$$OA^2 = OP^2 + PA^2$$

$$OA^2 = (a)^2 + (a)^2$$

$$OA^2 = 2a^2$$

$$\therefore OA = a\sqrt{2}$$

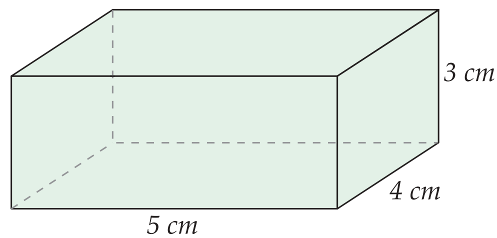
05. Num paralelepípedo retângulo de dimensões 3 cm, 4 cm e 5 cm, calcular:

a) a medida da diagonal;

b) a área total A_T;

c) o volume V.

Resolução



a) $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$d^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 = 50$

Assim, $d = 5\sqrt{2}cm$

b) $A_T = 2ab + 2ac + 2bc$

$A_T = 2 \cdot 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 3$

Assim, $A_T = 94cm^2$

c) $V = a \cdot b \cdot c$

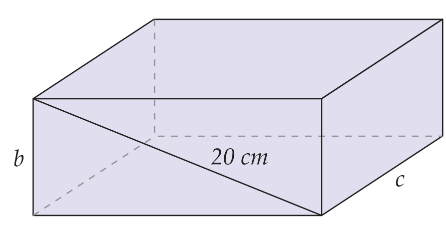
$V = 3 \cdot 4 \cdot 5$

Assim, $V = 60cm^3$

06. A área total de um ortoedro é 720 cm², a diagonal de uma face mede 20 cm e a soma de suas dimensões é 34 cm. Calcular as dimensões.

Resolução

Sendo d = 20 cm a diagonal da face de arestas a e b, temos:



$a^2 + b^2 = 20^2$ (I)

$2ab + 2ac + 2bc = 720$ (II)

Como: $a + b + c = 34$

$(a + b + c)^2 = 34^2$

$$\underbrace{a^2+b^2}_{20^2}+c^2+\underbrace{2ab+2ac+2bc}_{720}=1156$$

$400 + c^2 + 720 = 1156$

$c^2 = 36$

Assim, $\boxed{c = 6\ cm}$

Então,

$$\begin{cases} a^2+b^2=400 \\ a+b=28 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos:

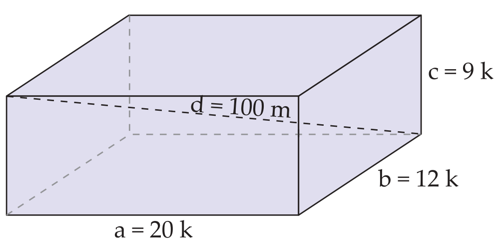
$a = 16$ cm e $b = 12$ cm ou

$a = 12$ cm e $b = 16$ cm

Então as dimensões do ortoedro são:

16 cm, 12 cm e 6 cm

07. Calcular o volume de um paralelepípedo retângulo, sabendo que suas dimensões são proporcionais a 9, 12 e 20, e que a diagonal mede 100 m.



Resolução

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$100^2 = (20k)^2 + (12k)^2 + (9k)^2$

$100^2 = 625k^2$

Assim, $25k = 100 \Rightarrow k = 4$

Então, $a = 20 \cdot 4 = 80\ m$

$b = 12 \cdot 4 = 48\ m$

$c = 9 \cdot 4 = 36\ m$

$V = a \cdot b \cdot c = 80 \cdot 48 \cdot 36$

$\boxed{V = 138\ 240\ m^3}$

08. (Vunesp-SP) A água de um reservatório, na forma de um paralelepípedo retângulo, de comprimento 30 m e largura 20 m, atingia a altura de 10 m. Com a falta de chuvas e o calor, 1 800 metros cúbicos da água do reservatório evaporaram. A água restante no reservatório atingiu a altura de:

a) 2 m
b) 3 m
c) 7 m
d) 8 m
e) 9 m

Resposta: *C*

Inicialmente, o volume de água no reservatório era de $10 \cdot 20 \cdot 30 = 6\ 000\ m^3$. Após a evaporação, restaram $6\ 000 - 1\ 800 = 4\ 200\ m^3$. Sendo h a altura atingida pela água restante no reservatório, temos $h \cdot 20 \cdot 30 = 4\ 200 \Leftrightarrow h = 7\ m$.

09. (Fuvest-SP) Dois blocos de alumínio, em forma de cubo, com arestas medindo 10 cm e 6 cm, são levados juntos à fusão e em seguida o alumínio líquido é moldado como um paralelepípedo reto de arestas 8 cm, 8 cm e x cm. O valor de x é:

a) 16
b) 17
c) 18
d) 19
e) 20

Resposta: *D*

Pelo enunciado, o volume do paralelepípedo é igual à soma dos volumes dos cubos.

Assim,

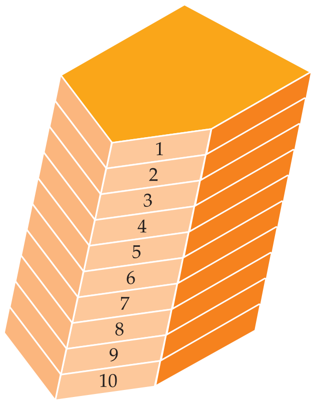
$8 \cdot 8 \cdot x = 6^3 + 10^3$

$64\ x = 216 + 1\ 000$

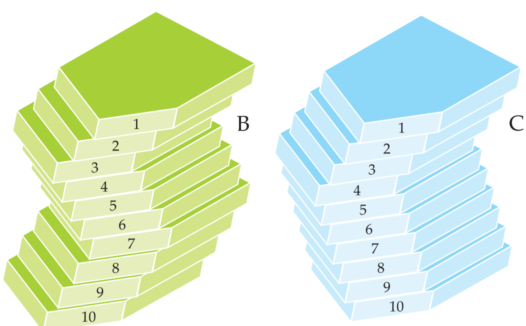
$64\ x = 1\ 216 \Rightarrow x = 19$

5. Princípio de Cavalieri

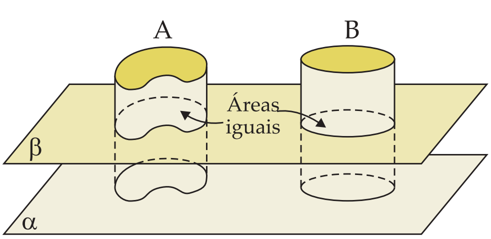
Consideremos um prisma pentagonal e vamos selecioná-lo por planos paralelos de modo a dividi-lo em dez pequenos prismas pentagonais com as mesmas bases e altura.



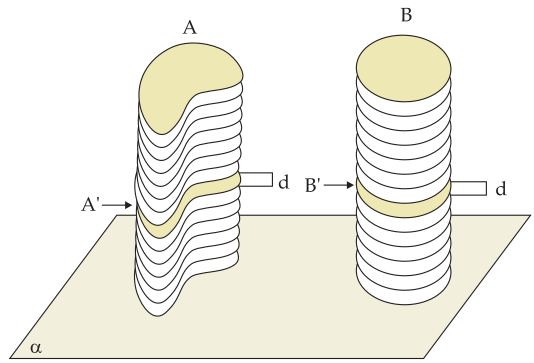
Podemos observar que dispomos os dez prismas de modos diferentes e o volume do sólido permanece o mesmo do prisma original.



Consideremos agora dois sólidos **A** e **B** cujas bases têm a mesma área e estão contidas num mesmo plano α. Consideremos ainda que qualquer plano β paralelo a α intercepta os dois sólidos em secções de mesma área.



Se seccionarmos os sólidos **A** e **B** por planos paralelos α, de modo que a distância d entre cada par de planos seja mínima, cada pequeno sólido formado em **A** terá o mesmo volume do correspondente formado em **B**.



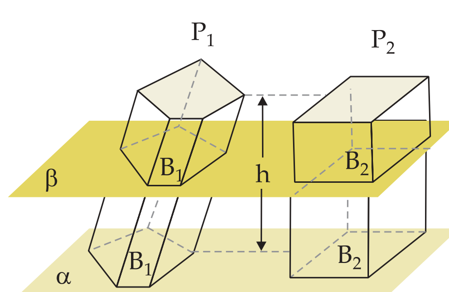
Como o volume de **A** é igual à soma dos volumes dos pequenos sólidos **A′** e o volume de **B** é igual à soma dos volumes dos pequenos sólidos **B′**, os sólidos **A** e **B** têm o mesmo volume.

A partir desses conceitos podemos estabelecer o **Princípio de Cavalieri** (Francisco Bonaventura Cavalieri 1598 – 1647):

> Sejam dois sólidos A e B, cujas bases estão contidas num mesmo plano α. Se todo plano β, paralelo a α, interceptar A e B determinando secções de mesma área, então os sólidos A e B têm o mesmo volume.

6. Volume de um Prisma Qualquer

Consideremos um prisma P_1, de altura h e área da base $B_1 = S$, e um paralepípedo retângulo P_2 de altura h e área da base $B_2 = S$.



Como as secções nos dois sólidos, por qualquer plano β paralelo a α, apresentam a mesma área S, podemos garantir pelo princípio de Cavalieri que o prisma tem o mesmo volume do paralelepípedo.

$$V_{P_1} = V_{P_2}$$

Como $V_{P_2} = B_2 \cdot h$ ou seja, $V_{P_2} = S \cdot h$, vem que $V_{P_1} = S \cdot h$, ou em síntese:

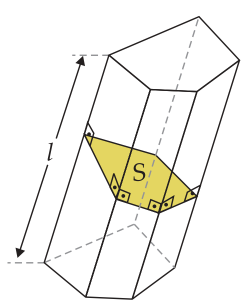
$$\boxed{V = S \cdot h}$$

Conclusão

O volume de um prisma é o produto da área da base pela medida da altura.

Observação

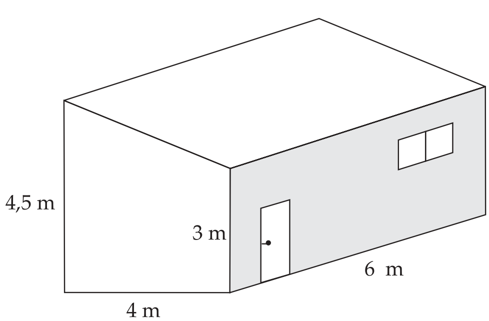
É possível provar que o volume de qualquer prisma pode ser obtido multiplicando a área da secção reta pela medida da aresta lateral do prisma.



$$\boxed{V = S \cdot l}$$

Exemplo

Calcular o volume ocupado por um salão que tem a forma de um prisma quadrangular e dimensões indicadas na figura.



Observarmos que o prisma tem como base um trapézio retângulo e a altura mede 6 m.

A área da base (A_b) é:

$$A_b = \frac{(4{,}5+3)}{2} \times 4 = 15\,m^2$$

Assim, o volume (V) do prisma é:

$$V = A_b \cdot h = 15 \times 6 = 90\ m^3$$

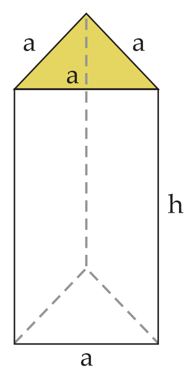
7. Área e Volume de Prismas Regulares

Sabemos que um prisma é chamado de regular quando é reto e tem base regular.

Vamos calcular a área e o volume dos principais prismas regulares:

7.1. Prisma triangular regular

Consideremos um prisma triangular regular com aresta da base **a** e altura **h**.



I. Área da base (B)

$$B = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

II. Área lateral (A_L)

$A_L = 3 \cdot A_{\text{face lateral}}$

$A_L = 3 \cdot (ah) = 3\ ah$

III. Área total (A_T)

$$A_T = A_L + 2B$$

$$A_T = 3ah + 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_T = 3ah + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

IV. Volume (V)

$$V = B \cdot h$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$$

Exemplo

Em um prisma triangular regular, a área da base é $9\sqrt{3}$ m² e a área lateral é o triplo da área da base. Calcular o volume desse prisma.

$$9\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a^2 = 36$$

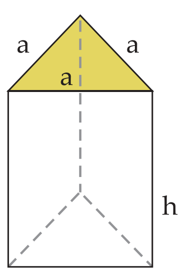
Então: a = 6 m

$A_L = 3\,B$

$$3ah = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\cancel{3} \cdot \cancel{6} \cdot h = \cancel{3} \cdot \frac{6^{\cancel{2}}\sqrt{3}}{4}$$

$$h = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,m$$



$$V = B \cdot h$$

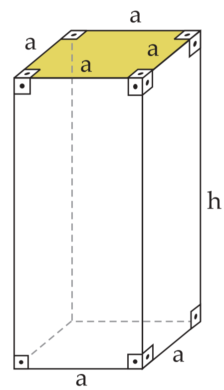
$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$$

$$V = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore V = \frac{81}{2}\,m^3$$

7.2. Prisma quadrangular regular

Consideremos um prisma quadrangular regular com aresta da base **a** e altura **b**.



I. Área da base (B)

$B = a^2$

II. Área lateral (A_L)

$A_L = 4 \cdot A_{\text{face lateral}}$

$A_L = 4\,(ah) = 4\,ah$

III. Área total (A_T)

$A_T = A_L + 2B$

$A_T = 4ah + 2a^2$

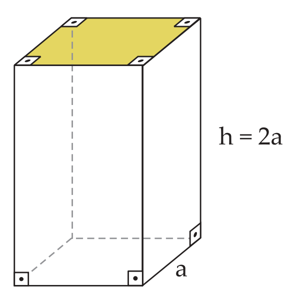
IV. Volume (V)

$V = B \cdot h$

$V = a^2 \cdot h$

Exemplo

Calcular a área total de um prisma quadrangular regular de volume 54 cm³, sabendo que a aresta lateral deste sólido tem o dobro da medida da aresta da base.



$V = B \cdot h$

$V = a^2 \cdot 2a = 54$

$2a^3 = 54 \Rightarrow a = 3$ cm

Assim: $h = 2a = 6$ cm

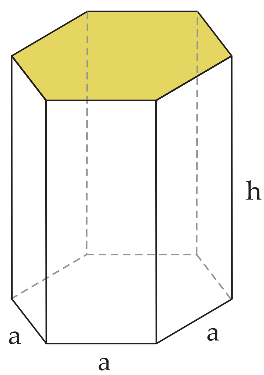
Então: $A_T = 2a^2 + 4ah$

$A_T = 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 \cdot 6$

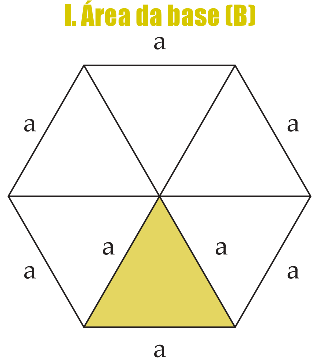
$A_T = 90\ cm^2$

7.3. Prisma hexagonal regular

Consideremos um prisma hexagonal regular com aresta da base **a** e altura **h**.



I. Área da base (B)



$$B = 6 \cdot \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \right) \qquad B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

II. Área lateral (A_L)

$A_L = 6 \cdot A_{face\ lateral}$

$A_L = 6\ (ah) = 6\ ah$

III. Área total (A_T)

$A_T = A_L + 2B$

$$A_T = 6\,ah + 2 \cdot \left(\frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \right)$$

$$A_T = 6\,ah + 3a^2 \cdot \sqrt{3}$$

IV. Volume (V)

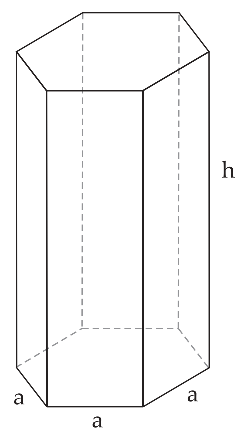
$V = B \cdot h$

$$V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot h$$

Exemplo

Num prisma hexagonal regular, a área lateral é 75% da área total.

Calcule a razão entre a aresta lateral e a aresta da base.



$$A_L = 6\ ah$$

$$A_T = 6\,ah + 3a^2\sqrt{3}$$

$$A_L = 75\%\ \text{de}\ A_T$$

$$6\,ah = \frac{3}{4}\left(6\,ah + 3a^2\sqrt{3}\right)$$

$$\frac{ah}{a^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{h}{a} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Exercícios Resolvidos

01. (Mackenzie-SP) Um prisma regular triangular tem todas as arestas congruentes e 48 m^2 de área lateral. Seu volume vale

a) 16 m^3

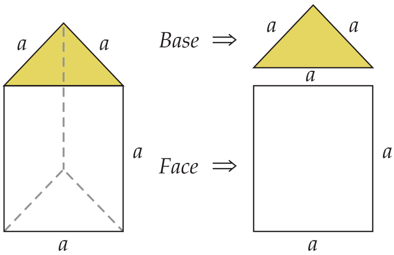
b) 32 m^3

c) 64 m^3

d) $4\sqrt{3}\ m^3$

e) $16\sqrt{3}\ m^3$

Resolução



$A_B = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$A_f = a^2$

$A_L = 3 \cdot A_f \Rightarrow 3a^2 = 48 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4\ m$

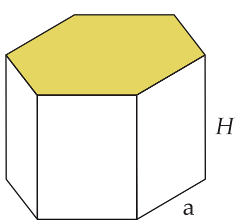
$V = A_B \cdot H$

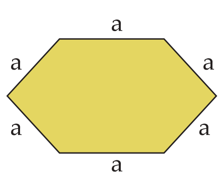
$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a \Rightarrow V = \frac{16\sqrt{3} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4}} \Rightarrow V = 16\sqrt{3}\ m^3$$

Resposta: *E*

02. Calcule a altura e a aresta da base de um prisma hexagonal regular, sabendo que seu volume é 4 m^3 e a superfície lateral é 12 m^2.

Resolução





$$\begin{cases} S_e = 6 \cdot aH = 12 \Rightarrow aH = 2 \\ V = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot H = 4 \Rightarrow a^2H = \dfrac{8\sqrt{3}}{9} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$a = \frac{4\sqrt{3}}{9}\,m \quad e \quad H = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,m$$

Resposta

$$\text{Aresta da base} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\ m$$

$$\text{Altura} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ m$$

03. (Mackenzie-SP 2000) Se a soma dos ângulos internos de todas as faces de um prisma é 6480°, então o número de lados da base do prisma é

a) 8
b) 9
c) 10
d) 12
e) 15

Resolução

*Sendo **n** o número de lados da base do prisma, então este possui **n** faces laterais quadrangulares e duas faces que são polígonos de n lados. Portanto, a soma dos ângulos internos de todas as sua faces é*

$n \cdot 360° + 2 \cdot (n - 2) \cdot 180°$

Conseqüentemente, $n \cdot 360° + 2 \cdot (n - 2) \cdot 180° =$

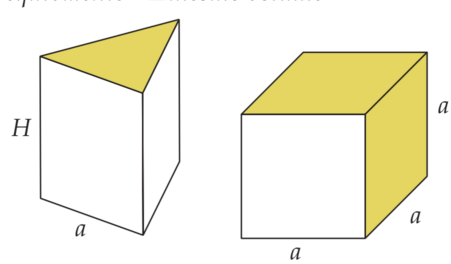
$= 6\,480° \Leftrightarrow n = 10$

Resposta: *C*

04. Um prisma regular é equivalente a um cubo de aresta *a*. Determine a altura do prisma sabendo que sua aresta da base mede *a*.

Resolução

equivalente $= \Delta$ *mesmo volume*



$V_p = V_c$

$BH = a^3$

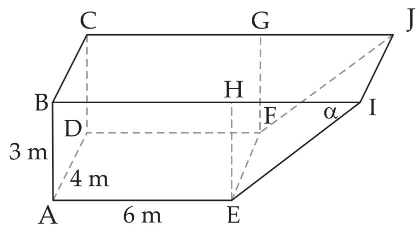
$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = a^3$$

$$H = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$$

Resposta

$$h = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$$

05. (Vunesp-SP) Um tanque para criação de peixes tem a forma da figura



onde *A, B, C, D, E, F, G* e *H* representam um paralelepípedo retângulo e *E, F, G, H, I* e *J* um prisma, cuja base *E, H* e *I* é um triângulo retângulo (com ângulo reto no vértice *H* e ângulo α no vértice I tal que sen $\alpha = \frac{3}{5}$). A superfície interna do tanque será pintada com um material impermeabilizante líquido. Cada metro quadrado pintado necessita de 2 litros de impermeabilizante, cujo preço é R$ 2,00 o litro. Sabendo-se que $AB = 3$ m, $AE = 6$ m e $AD = 4$ m, determine:

a) as medidas de *EI* e *HI;*

b) a área da superfície a ser pintada e quanto será gasto, em reais.

Resolução

a) No triângulo retângulo EHI*, com ângulo reto no vértice H,* $EH = AB = 3$ *m,* $\frac{EH}{EI} = \text{sen}\ \alpha \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{EI} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow EI = 5\,\text{m e } HI = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4\text{ m}$$

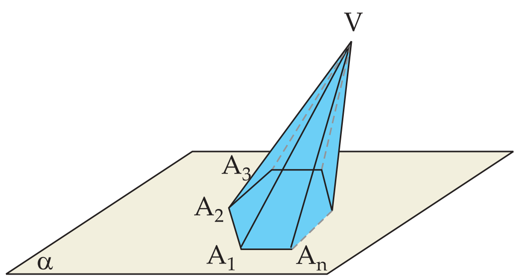
b) A área da superfície a ser pintada é igual à soma das áreas dos retângulos ABCD, ABHE, DCGF, ADFE, EFJI, e das áreas dos triângulos retângulos EHI, FGJ. Logo, é igual a $4 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + \frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{4 \cdot 3}{2} = 104\ m^2$*. Serão gastos, portanto,* $104 \cdot 2 \cdot 2 = 416$ *reais.*

Capítulo 04. Pirâmides

1. Generalidades

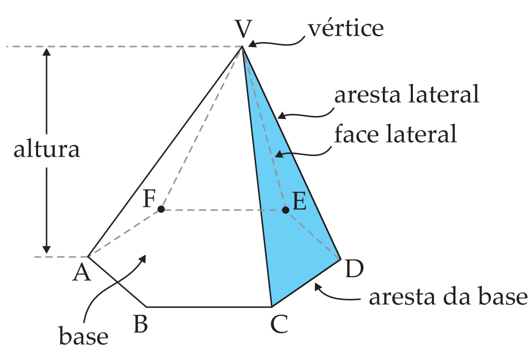
1.1. Definição

Consideremos uma região poligonal convexa $A_1\ A_2 \dots A_n$ de n lados num plano α, e um ponto V fora de α. Chamamos de **pirâmide convexa** a reunião de todos os segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos da região poligonal (polígono).

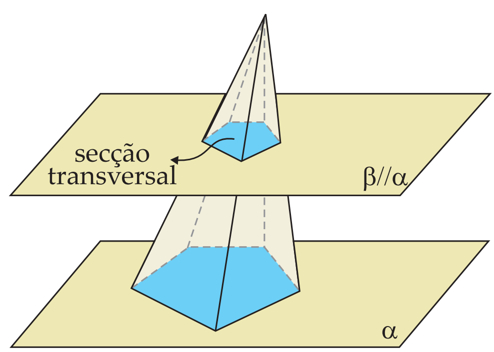


1.2. Elementos

Na pirâmide da figura temos os seguintes elementos:



- **Vértice da pirâmide**: o vértice da pirâmide é o ponto V.
- **Base**: a base da pirâmide é o polígono ABCDEF.
- **Altura**: a altura da pirâmide é a distância do vértice V ao plano da base.
- **Arestas da base**: as arestas da base são os lados do polígono da base.
- **Arestas laterais**: as arestas laterais são os segmentos que unem o vértice V aos vértices do polígono da base.
- **Faces laterais**: as faces laterais são os triângulos determinados pelo vértice V e cada uma das arestas da base.
- **Superfície lateral**: a superfície lateral de uma pirâmide é a superfície poliédrica formada por todas as faces laterais.
- **Secção transversal**: a secção transversal de uma pirâmide é a intersecção dessa pirâmide com qualquer plano paralelo à sua base.



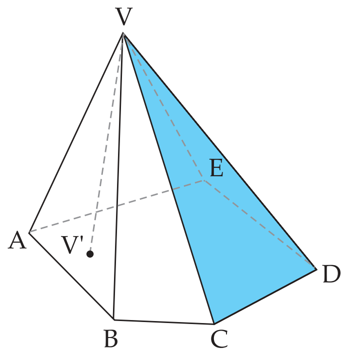
1.3. Nomenclatura

O nome de uma pirâmide é dado de acordo com a sua base, assim, temos alguns exemplos:

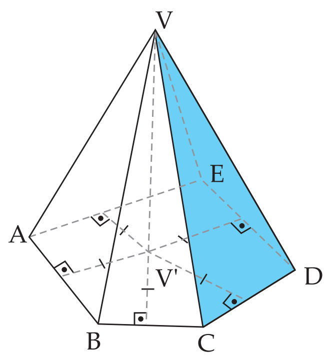
- Pirâmide triangular: a base é um triângulo.
- Pirâmide quadrangular: a base é um quadrilátero.
- Pirâmide pentagonal: a base é um pentágono.

1.4. Classificação

Uma pirâmide pode ser classificada como **reta** ou **oblíqua,** conforme a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base, seja o centro (circuncentro) da mesma ou não.



Pirâmide pentagonal oblíqua

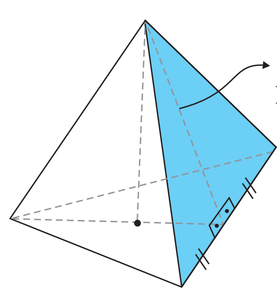


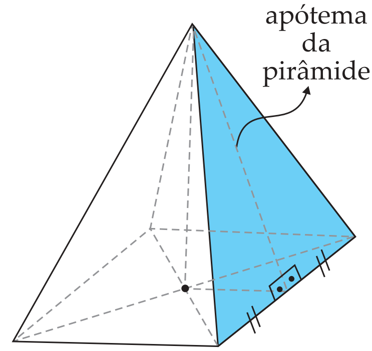
Pirâmide pentagonal reta

Propriedade:

As arestas laterais de uma pirâmide reta são todas congruentes.

Chamamos de **pirâmide regulares** as pirâmides retas cujas bases são polígonos regulares.





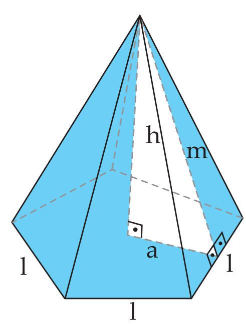
Chamamos de **apótema da pirâmide** a distância do vértice da pirâmide às arestas da base.

2. Área Lateral e Área Total

A área lateral de uma pirâmide é a área da sua superfície lateral, isto é, a soma das áreas das faces laterais.

A área total de uma pirâmide é a soma da área lateral com a área da base.

Consideremos uma pirâmide regular com perímetro da base 2p, apótema da base **a** e apótema da pirâmide **m**.



$$A_L = n \cdot \frac{l \cdot m}{2} =$$

$$= \frac{n \cdot l}{2} \cdot m = \frac{2p}{2} \cdot m = p \cdot m$$

$$A_T = A_L + B = p \cdot m +$$

$$+ n \cdot \frac{l \cdot a}{2} = p \cdot m + p \cdot a$$

Assim: $\boxed{A_T = p\,(m + a)}$

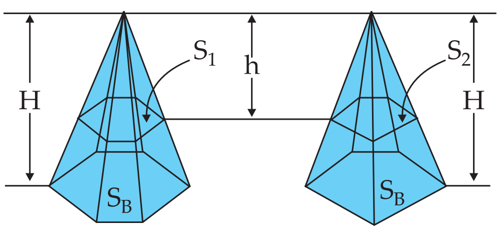
3. Volume

3.1. Teorema

Duas pirâmides que têm alturas iguais e bases de áreas iguais têm volumes iguais.

Demonstração:

Consideremos duas pirâmides de mesma altura H e com bases de mesma área S_B, conforme a figura. Sejam S_1 e S_2 as áreas das secções transversais que obtemos ao seccionarmos os dois sólidos por um plano à distância h dos vértices pirâmides.

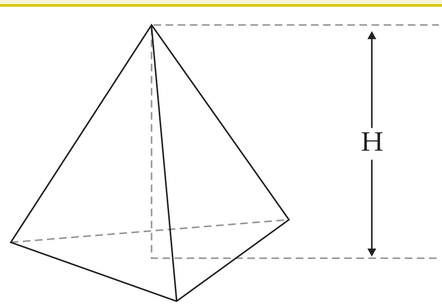


pirâmide 1 pirâmide 2

A partir da semelhança dos sólidos, concluímos que $S_1 = S_2$, pelo princípio de Cavalieri, têm volumes iguais, nas duas pirâmedes.

3.2. Pirâmide triangular

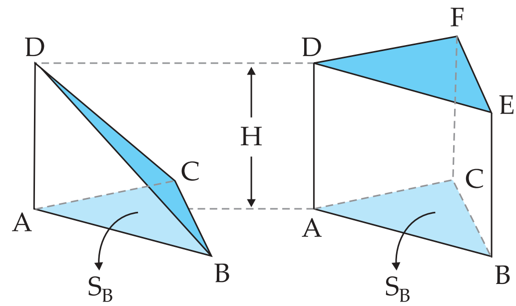
O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do produto da área de sua base pela sua altura.



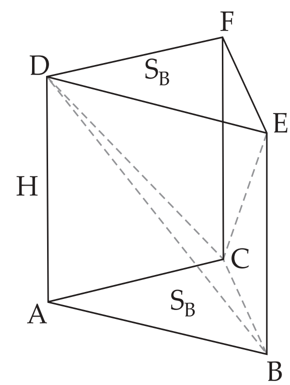
$$\boxed{V = \frac{B \cdot H}{3}}$$

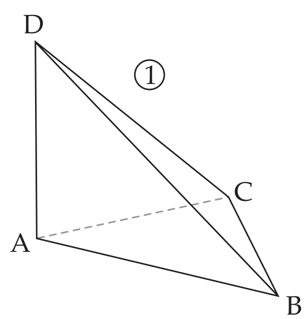
Demonstração:

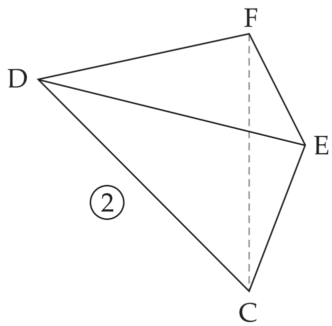
Consideremos um prisma com a mesma base e altura de uma pirâmide triangular.

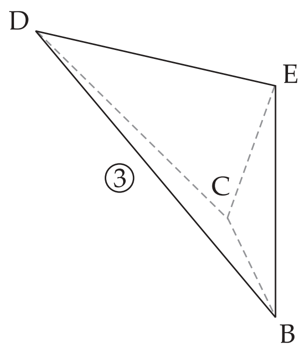


Vamos decompor esse prisma em três pirâmides (1, 2 e 3), conforme a figura a seguir, e provar que essas três pirâmides têm volumes iguais.









As pirâmides 1 e 2 têm volumes iguais, pois suas bases ABC e DEF têm áreas iguais e ambas as pirâmides possuem a mesma altura (a própria altura do prisma).

Assim: $V_1 = V_2$ (I)

Observemos agora as pirâmides 2 e 3.

Consideremos como bases os triângulos FEC e BCE. As áreas desses triângulos são iguais, pois cada um deles é "metade" da face BCFE do prisma.

Além disso, as pirâmides 2 e 3 têm a mesma altura (distância do vértice D ao plano da face BCFE do prisma).

Assim: $V_2 = V_3$ (II)

Então: $V_1 = V_2 = V_3$

Portanto, o volume de cada uma das pirâmides é igual a $\frac{1}{3}$ do volume do prisma.

Particularmente, como a pirâmide (1) tem a mesma base, a mesma altura do prisma, concluímos que:

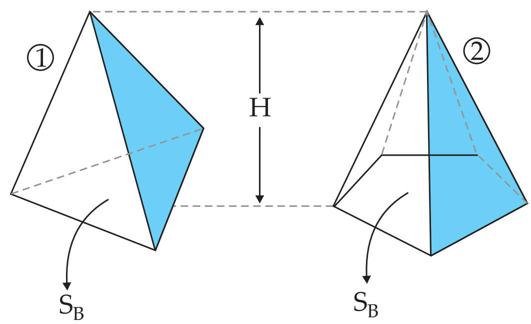
$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot S_B \cdot H$$

3.3. Pirâmide qualquer

> O volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto da área de sua base pela altura.

Demonstração:

Consideremos uma pirâmide qualquer e uma pirâmide triangular, que tenham a mesma altura e bases com mesma área S_B.



No item A mostramos que $V_1 = V_2$. Como o volume da pirâmide triangular é:

$$V_1 = \frac{S_B \cdot H}{3}$$

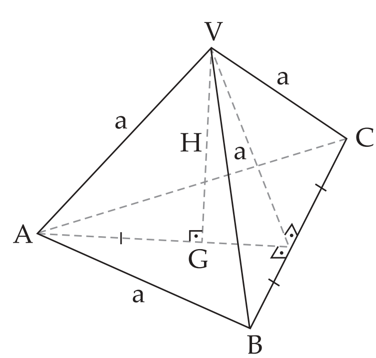
Temos que:

$$\boxed{V_2 = \frac{S_B \cdot H}{3}}$$

4. Sólidos Especiais

4.1. Tetraedro regular

Consideremos um tetraedro regular VABC de aresta com medida **a:**



As quatro faces do tetraedro são triângulos eqüiláteros de lado **a**, então:

$$A_T = 4 \cdot A_\Delta = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \boxed{A_T = a^2\sqrt{3}}$$

No ΔVGA, temos:

$$AG = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}; VA = a$$

e VG = altura H

$VA^2 = VG^2 + AG^2$

$$a^2 = (H)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{6a^2}{9}$$

$$\therefore \boxed{H = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

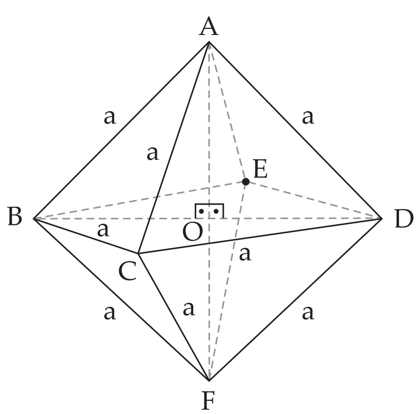
O volume do tetraedro é dado por:

$$V = \frac{S_B \cdot H}{3} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{3}$$

$$\therefore \boxed{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$$

4.2. Octaedro regular

Consideremos um octaedro regular ABCDEF de aresta com medida **a:**



As oito faces do octaedro são triângulos eqüiláteros de lado **a**, então:

$$A_T = 8 \cdot A_\Delta = 8 \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \boxed{A_T = 2a^2\sqrt{3}}$$

Sendo O o centro do octaedro, O também é o centro do quadrado ABFD, então:

$$OA = OB = \frac{\text{diagonal}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Assim, o volume do octaedro é dado por:

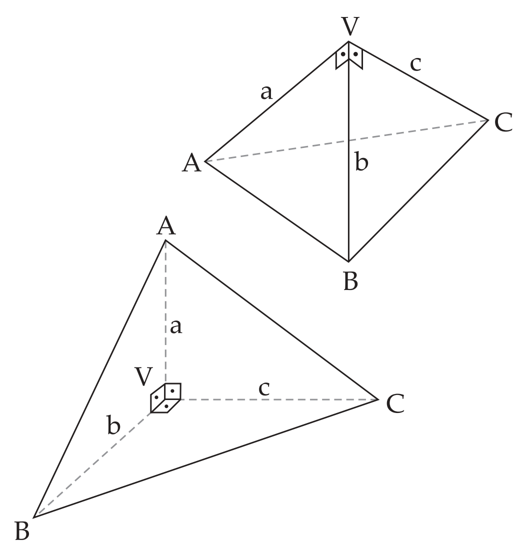
$V = 2 \cdot V_{\text{pirâmide}}$

$$V = 2 \cdot \frac{S_B \cdot H}{3} = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{3}$$

$$\therefore \boxed{V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{3}}$$

4.3. Tetraedro tri-retangular

Consideremos um tetraedro tri-retangular VABC com as arestas do triedro tri-retângulo de medidas a,b e c.



Para calcularmos o volume desse sólido, podemos imaginá-lo com base VBC, assim a altura será VA. Desta maneira:

$$V = \frac{S_{VBC} \cdot VA}{3}$$

Onde: $S_{VBC} = \dfrac{b \cdot c}{2}$ e $VA = a$

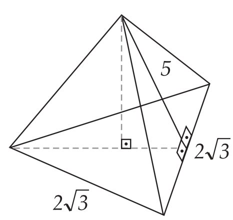
Logo: $V = \dfrac{\dfrac{b \cdot c}{2} \cdot a}{3}$

$$\therefore \boxed{V = \frac{a\,b\,c}{6}}$$

Exercícios Resolvidos

01. Uma pirâmide triangular regular tem apótema com medida 5 cm e base com aresta $2\sqrt{3}$ cm. Calcular a área lateral e a área total dessa pirâmide.

Resolução:



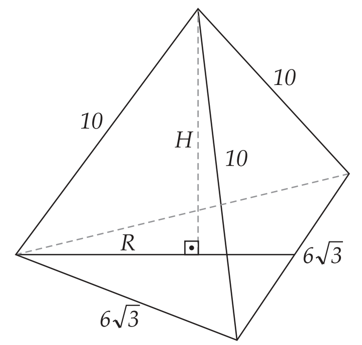
$$A_L = 3 \cdot \frac{2\sqrt{3} \cdot 5}{2} = 15\sqrt{3}\ cm^2$$

$$A_T = A_L + B = 15\sqrt{3} + \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$A_T = 18\sqrt{3}\ cm^2$$

02. Calcular o volume de uma pirâmide triangular regular com aresta da base e aresta lateral medindo $6\sqrt{3}$ cm e 10 cm, respectivamente.

Resolução:



$$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3} = 6\ cm$$

$H^2 + R^2 = 10^2$

$\therefore H^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow H^2 = 64$

$\therefore H = 8\ cm$

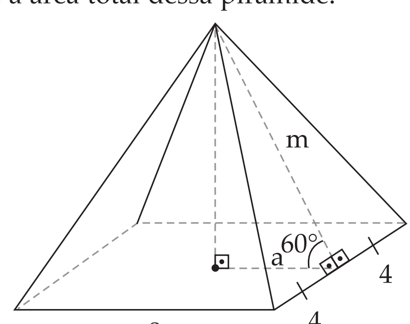
$$V = \frac{S_B \cdot H}{3}$$

$$Onde:\ S_B = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(6\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$S_B = 27\sqrt{3}\ cm^2$

$$\therefore V = \frac{27\sqrt{3} \cdot 8}{3} = 72\sqrt{3}\ cm^3$$

03. Uma pirâmide quadrangular regular tem aresta da base 8 cm e as faces laterais formam 60° com a base. Calcular a área lateral e a área total dessa pirâmide.



$$a = \frac{lado}{2} = 4\ cm$$

$$\cos 60° = \frac{a}{m}$$

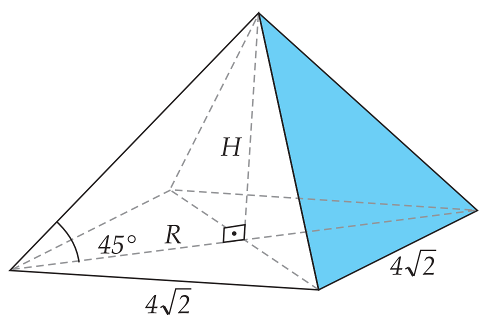
$$\frac{1}{2} = \frac{4}{m} \Rightarrow m = 8\ cm$$

$$A_L = 4 \cdot \frac{l\,m}{2} = 4 \cdot \frac{8 \cdot 8}{2} = 128\ cm^2$$

$$A_T = A_L + B = 128 + 8^2 = 192\ cm^2$$

04. Calcular o volume de uma pirâmide quadrangular regular, com aresta da base $4\sqrt{2}$ cm e com arestas laterais formando 45° com o plano da base.

Resolução



$$R = \frac{\text{diagonal da base}}{2} = \frac{4\sqrt{2} \cdot 2}{2} = 4\ cm$$

$$tg\ 45° = \frac{H}{R} \therefore 1 = \frac{H}{4} \Rightarrow H = 4\ cm$$

$$V = \frac{S_B \cdot H}{3}$$

$$Onde: S_B = \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 32\ cm^2$$

$$V = \frac{32 \cdot 4}{2} = 64\ cm^3$$

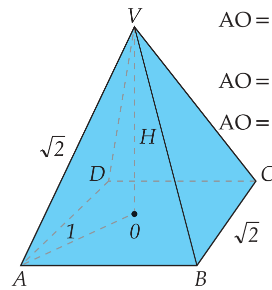
05. Fuvest-SP

Uma pirâmide regular tem as oito arestas iguais a $\sqrt{2}$. Calcule:

a) a altura dessa pirâmide;

b) o volume dessa pirâmide.

Resolução



$$AO = \frac{\text{diagonal da base}}{2}$$

$$AO = \frac{1\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2}$$

$$AO = 1$$

a) Aplicando o Teorema de Pitágoras no ΔVOA, temos: $H = 1\ u.c$

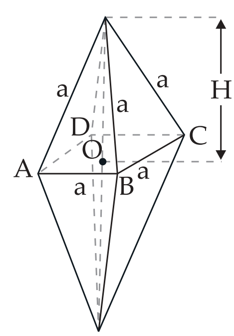
$$b)\ V = \frac{1}{3}BH \rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{2}{3}u.v$$

Resposta

a) $H = 1\ u.c$

b) $V = \frac{2}{3}u.v$

06. (PUC-SP) A área total de um octaedro regular é $6\sqrt{3}\ cm^2$. Seu volume é



a) $3\sqrt{2}\ cm^2$

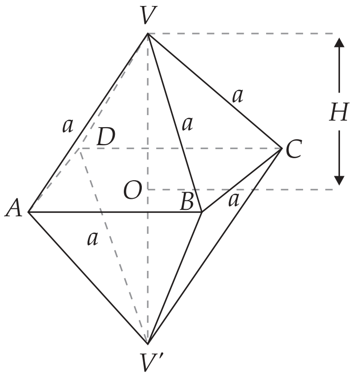
b) $\sqrt{6}\ cm^3$

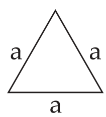
c) $2\sqrt{3}\ cm^3$

d) 6 cm³

e) n.r.a.

Resolução:



face $\Rightarrow$  $\Rightarrow A_f = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad A_T = 8\ A_f \Rightarrow$

$$\Rightarrow 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 3 = Área_{ABCD}$$

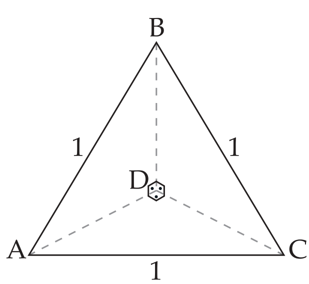
$$H = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2} \Rightarrow H = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$V = 2 \cdot \frac{Área_{ABCD} \cdot H}{3} \Rightarrow V = \frac{2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{6}\ cm^3$$

Resposta: *B*

07. (Unisanta-SP) O volume do tetraedro abaixo é



a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

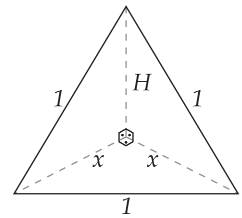
b) $\dfrac{\sqrt{2}}{24}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

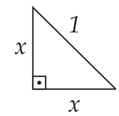
d) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

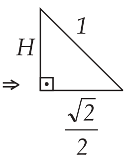
e) n.r.a.

Resolução



$$V = \frac{A_B \cdot H}{3}$$

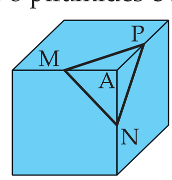
Base $\Rightarrow$  $\Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Altura $\Rightarrow$  $\Rightarrow H = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$V = \frac{\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{3} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{2}}{24}$$

Resposta: *B*

08. (Vunesp-SP) Em cada um dos vértices de um cubo de madeira, recorta-se uma pirâmide AMNP, em que M, N e P são os pontos médios das arestas, como se mostra na ilustração. Se V é o volume do cubo, o volume do poliedro que resta ao tirar as 8 pirâmides é igual a:



a) $\dfrac{1}{2}$V

b) $\dfrac{3}{4}$V

c) $\dfrac{2}{3}$V

d) $\dfrac{5}{6}$V

e) $\dfrac{3}{8}$V

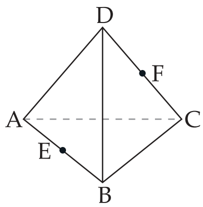
Resolução

$$V_{poliedro} = V_C - 8\ V_{pir.} = a^3 - 8 \cdot \frac{\dfrac{a/2 \cdot a/2}{2} \cdot \dfrac{a}{2}}{3} \Rightarrow$$

$$V_{pol.} = a^3 - \frac{a^3}{6} \Rightarrow V_{pol.} = \frac{5a^3}{6}$$

Resposta: D

09. Na figura abaixo, ABCD é um tetraedro regular de lado **a**. Sejam E e F os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente. Então, o valor de EF é:



a) $\frac{a}{2}$

b) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

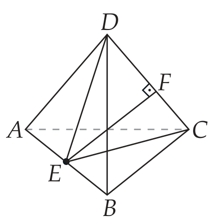
c) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

d) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Resolução

Como ΔABC e ΔABD são triângulos equiláteros de lado a e E é o ponto médio de $\overline{AB}$, então as suas alturas são, respectivemente, $\overline{EC}$ e $\overline{ED}$, com $EC = ED = \frac{a\sqrt{3}}{2}$



Logo ΔCED é isósceles de base $\overline{CD}$. Temos ainda que $CF = FD = \frac{a}{2}$ e, portanto, $\overline{EF}$ é altura do ΔCED e, assim, $EF^2 + FC^2 = CE^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow EF^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow EF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Resposta: B

10. (Vunesp-SP) Uma pirâmide e um prisma, ambos de bases quadradas, têm o mesmo volume. Sabendo-se que o lado do quadrado da base da pirâmide tem medida 2 m e que o lado do quadrado da base do prisma tem medida m, a razão entre as alturas da pirâmide e do prisma, nesta ordem, é igual a:

a) 3 cm

b) $\frac{m}{3}$

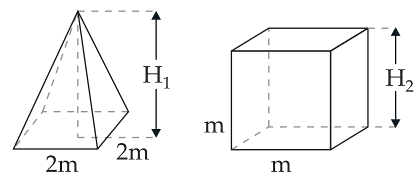
c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{3}{2}$

e) $\frac{1}{4}$

Resolução

Sejam: V_1 o volume da pirâmide e V_2 o volume do prisma:



$$V_1 = \frac{2m \cdot 2m \cdot H_1}{3} \qquad V_2 = m \cdot m \cdot H_2$$

$$\text{Como } V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{4m^2 H_1}{3} = m^2 H_2 \Rightarrow \frac{H_1}{H_2} = \frac{3}{4}$$

Resposta: C

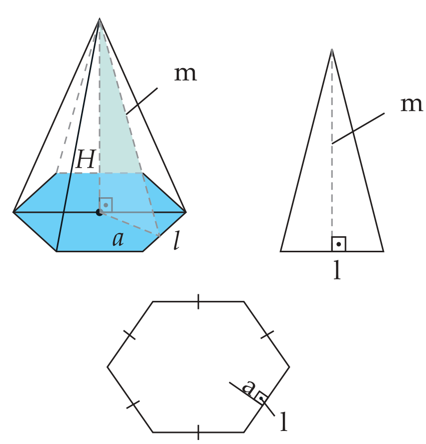
11. Numa pirâmide hexagonal, a altura mede 4 cm e o apótema da base mede 3 cm. Calcule dessa pirâmide

a) a área lateral;

b) a área total;

c) o volume.

Resolução



1) $m = 5\ cm$

2) $\dfrac{l\sqrt{3}}{2} = 3 \Rightarrow l = 2\sqrt{3}\ cm$

a) $A_l = 6 \cdot S_f = 6 \cdot \dfrac{2\sqrt{3} \cdot 5}{2} = 30\sqrt{3}\ cm^2$

$A_l = 30\sqrt{3}\ cm^2$

3) $B = 6 \cdot \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \dfrac{(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3} cm^2$

b) $A_T = B + S_e = 18\sqrt{3} + 30\sqrt{3} \Rightarrow$

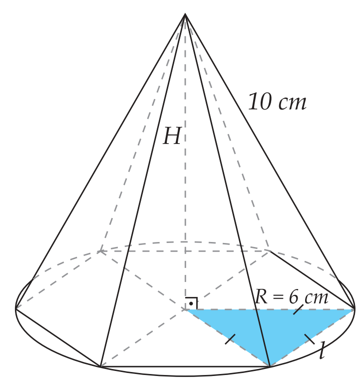
$A_T = 48\sqrt{3}\ cm^2$

c) $V = \dfrac{1}{3} BH \Rightarrow \dfrac{1}{3} \cdot 18\sqrt{3} \cdot 4 = 24\sqrt{3}\ cm^3$

$V = 24\sqrt{3}\ cm^3$

12. Calcule o volume de uma pirâmide hexagonal regular, cuja aresta lateral mede 10 cm e o raio da circunferência circunscrita à base mede 6 cm.

Resolução:



$H^2 + 6^2 = 10^2 \quad \therefore \quad H = 8\ cm \quad ; \quad l = 6\ cm$

$S_B = 6 \cdot \dfrac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \quad \therefore \quad S_B = 54\sqrt{3}\ cm^2$

$V = \dfrac{S_B \cdot H}{3} = \dfrac{54\sqrt{3} \cdot 8}{3}$

$\therefore \quad V = 144\sqrt{3}\ cm^3$

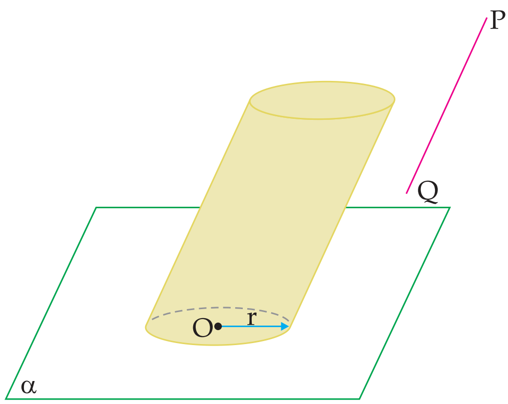
Capítulo 05. Cilindros

1. Generalidades

1.1. Definição

Consideremos num plano α um círculo de centro O e raio r. Seja $\overline{PQ}$ um segmento não paralelo e não contido em α . Chamamos de **cilindro circular** à reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a $\overline{PQ}$, com uma extremidade no círculo e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por α.

.



1.2. Elementos

- **Bases**

As bases de um cilindro circular são os dois círculos determinados pelas extremidades de todos os segmentos paralelos a $\overline{PQ}$ que, reunidos, formam o cilindro.

- **Eixo**

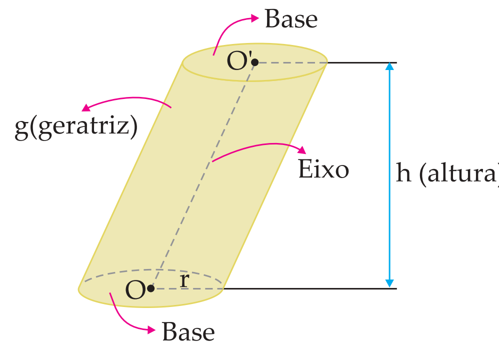
Eixo de um cilindro circular é a reta determinada pelos centros das bases do cilindro.

- **Geratriz**

Geratriz (g) de um cilindro circular é qualquer um dos segmentos com extremidades nas extremidades das bases e pararelos ao eixo do do cone.

- **Altura**

Altura de um cilindro é a distância h entre os planos das bases.



- **Superfície lateral**

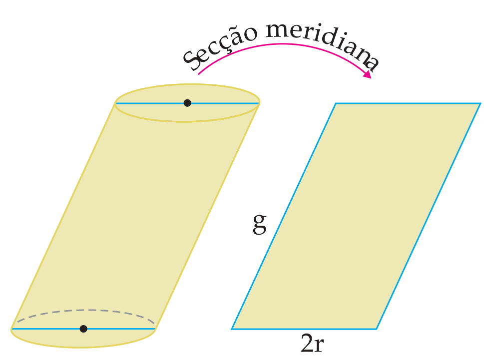
Superfície lateral é a reunião de todas as geratrizes. A área dessa superfície é chamada da **área lateral** e indicada por $\mathbf{A_L}$

- **Superfície Total**

Superfície total é a reunião da superfície lateral com os dois círculos das bases. A área dessa superfície é chamada **área total** e indicada por $\mathbf{A_T}$

- **Secção Meridiana**

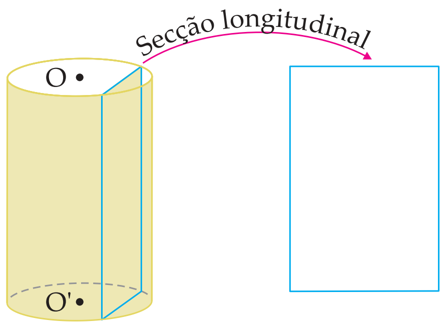
Secção meridiana de um cilindro é o quadrilátero que obtemos na interseção do cilindro com um plano que contém o eixo.



- **Secção Longitudinal**

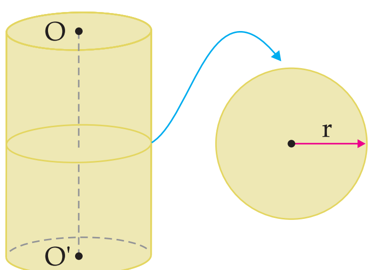
A secção longitudinal de um cilindro é obtida pela intersecção com um plano que contém o eixo do cilindro ou é paralelo a ele.

Quando o cilindro é circular reto, a secção longitudinal é um retângulo e será máxima quando a secção for meridiana.



- **Secção Transversal**

A secção transversal de um cilindro circular reto é obtida pela intersecção com um plano perpendicular ao eixo do cilindro. A secção transversal é um círculo congruente à base.



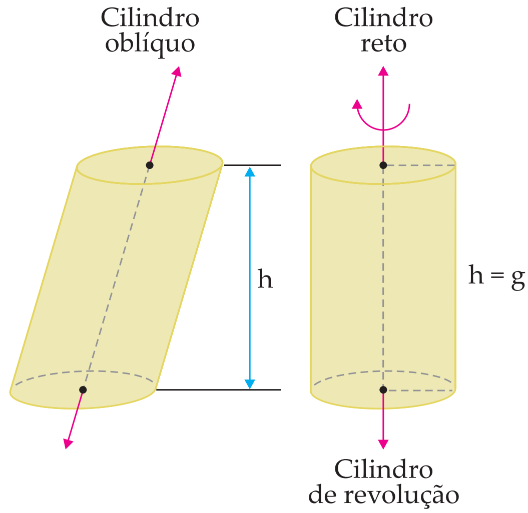
1.3. Classificação

- **Cilindro Circular Oblíquo**

Cilindro circular oblíquo é aquele que apresenta as geratrizes oblíquas aos planos das bases.

- **Cilindro Circular Reto**

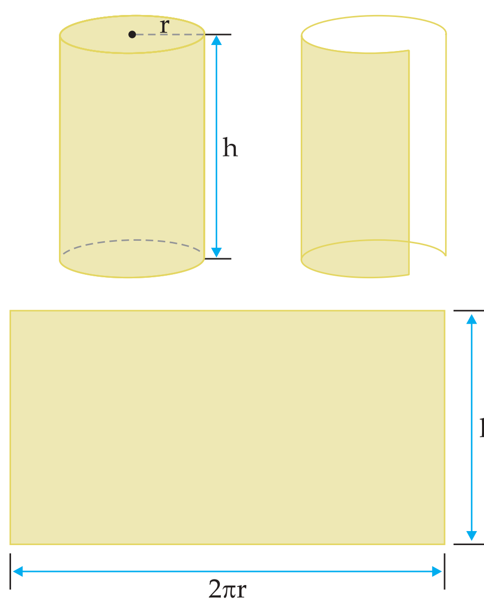
Cilindro circular reto é aquele que apresenta as geratrizes perpendiculares aos planos das bases. O cilindro circular reto também é chamado **cilindro de revolução**, pois é gerado pela rotação de um retângulo em torno de um eixo que contém um de seus lados.



2. Áreas Lateral e Total

2.1. Área lateral

A superfície lateral de um cilindro circular reto é equivalente a um retângulo cujas dimensões são o comprimento da circunferência da base e a altura do cilindro.



Assim, a área lateral de um cilindro circular reto com raio da base r e altura h é:

$$\boxed{A_L = 2\pi \cdot r \cdot h}$$

2.2. Área total

A área de superfície total de um cilindro circular reto é a soma das áreas da superfície lateral com as áreas das duas bases.

Assim, a área total de um cilindro circular reto com raio da base r e altura h é:

$A_T = A_L + 2B$

$A_T = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2$

$$\boxed{A_T = 2\pi r \cdot (h + r)}$$

Exemplos

01) Num cilindro circular reto de altura 6 cm e raio da base 2 cm, calcular:

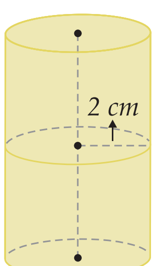
a) a área de uma secção transversal;

b) a área de uma secção meridiana;

c) a área de uma secção feita por um plano paralelo ao eixo distante 1 cm dele.

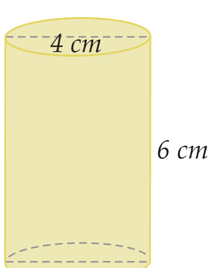
Resolução

a)



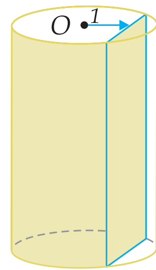
$S = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi\, cm^2$

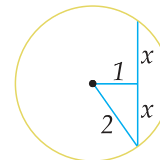
b)



$S = 4 \cdot 6 = 24\ cm^2$

c)





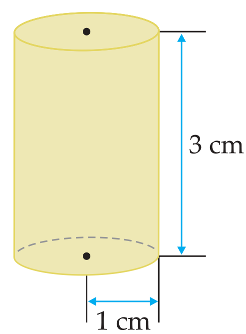
$X^2 + 1^2 = 2^2$

$\therefore x = \sqrt{3}$ cm

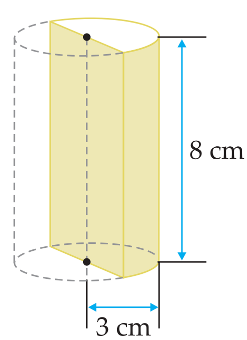
$S = 2x \cdot h = 2\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3}\ cm^2$

2º) Calcule a área lateral e a área total dos sólidos, cujas medidas estão indicadas nas figuras abaixo.

a) Cilindro de Revolução



b) Semicilindro Reto



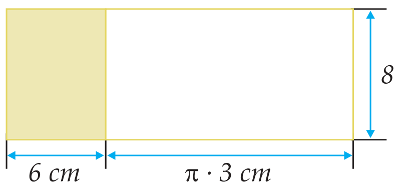
Resolução

a) $A_L = 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot 1 \cdot 3 = 6\pi\, cm^2$

$A_T = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2 \Rightarrow$

$A_T = 2\pi \cdot 1 \cdot 3 + 2\pi \cdot 1^2 = 8\pi\, cm^2$

b) *Superfície lateral do semicilindro*



$A_L = 6 \cdot 8 + \pi \cdot 3 \cdot 8 = 48 + 24\pi$

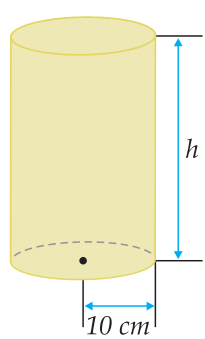
$A_L = 24 \cdot (2 + \pi)\ cm^2$

$A_T = A_L + 2 \cdot \dfrac{\pi \cdot r^2}{2} = 48 + 24\pi + \pi \cdot 3^2$

$A_T = (48 + 33\pi)\ cm^2$

03. A área lateral de um cilindro de revolução de 10 cm de raio é igual à área da base. Calcule a altura do cilindro.

Resolução



$A_L = B$

$2\pi \cdot r \cdot h = \pi \cdot r^2$

$2h = r$

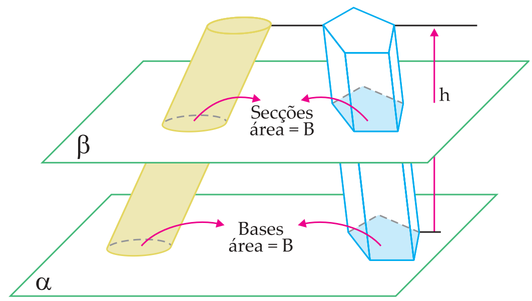
$2h = 10$

$\boxed{\therefore\ h = 5\ cm}$

3. Volume

Consideremos um cilindro e um prisma de bases equivalentes (áreas iguais) contidas nos mesmos planos paralelos (alturas iguais).

Sendo B a área das bases e h a altura dos sólidos considerados, temos:



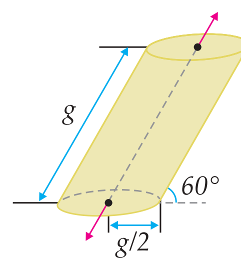
Um plano paralelo às bases, que secciona os dois sólidos, determina neles secções tranversais congruentes às respectivas bases. Pelo princípio de Cavalieri, concluímos que o cilindro e o prisma são equivalentes.

Assim:

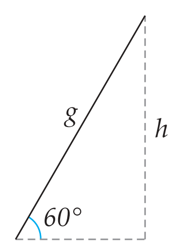
$$\boxed{V = B \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h}$$

Exemplos

01. Calcule o volume do cilindro oblíquo abaixo, em função da geratriz g.



Resolução



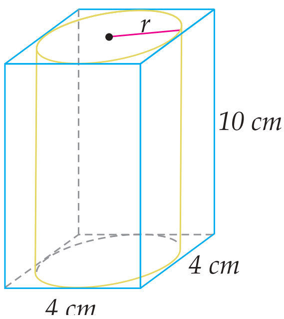
$h = g \cdot sen\ 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot g$

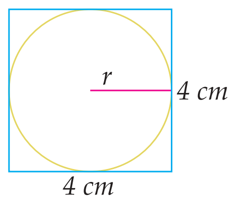
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$$V = \pi \left(\frac{g}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot g\right) = \frac{\pi \cdot \sqrt{3} \cdot g^3}{8}$$

02. Calcular o volume de um cilindro inscrito em um prisma quadrangular regular de aresta da base 4 cm e altura 10 cm.

Resolução





$r = 2cm$ e $h = 10$ cm

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V = \pi \cdot 2^2 \cdot 10 = 40\pi\ cm^3$

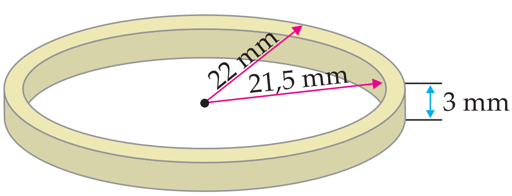
03. Calcular a massa de ouro utilizado na aliança indicada na figura, sabendo que a massa específica do ouro é 20 g/cm³.

Dados

Raio externo = 22 mm

Raio interno = 21,5 mm

Altura = 3 mm



Resolução

O volume da aliança é a diferença entre os volumes de dois cilindros circulares retos de raios 22 mm e 21,5 mm e altura 3 mm. Assim:

$V = \pi \cdot 22^2 \cdot 3 - \pi \cdot (21{,}5)^2 \cdot 3 \cong 204{,}9\ mm^3$

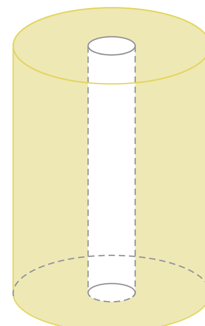
$V \cong 0{,}2049\ cm^3$

Sendo a massa específica 20 g/cm³, temos que em cada cm³ existem 20 g de ouro, então a massa m é:

$m \cong 0{,}2049 \cdot 20$

$m \cong 4\ g$

04. A figura mostra um rolo de papel com espessura 0,2 mm. Calcule o comprimento aproximado do papel enrolado, sabendo que a menor e a maior voltas têm raios 2 cm e 5 cm, respectivamente.

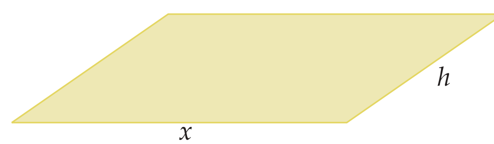


Resolução

Sendo V_1 o volume do papel enrolado, temos:

$V_1 = \pi \cdot 5^2 \cdot h - \pi \cdot 2^2 \cdot h = 21\pi \cdot h$

Sendo V_2 o volume do papel esticado, temos:



$V_2 = x \cdot h \cdot 0{,}02$ (*)

(*) prisma de altura 0,02 cm

Como $V_1 = V_2$, temos:

$$21\pi \cdot h = x \cdot 0{,}02 \cdot h \Rightarrow x = \frac{21\pi}{0{,}02}$$

$x \cong 3\,297\ cm \cong 33$ *metros*

Exercícios Resolvidos

01. O desenvolvimento da superfície lateral de um cilindro reto é um quadrado de 2 cm² de área. O volume desse cilindro em cm³ é:

a) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$

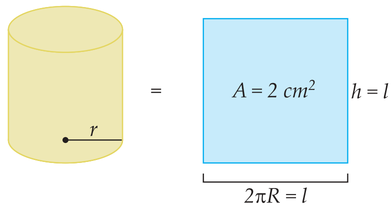
b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2\pi}$

c) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

d) 2π

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{4\pi}$

Resolução



$S = l^2 = 2 \Rightarrow l = \sqrt{2}$

$h = l = \sqrt{2}$

$2\pi R = \sqrt{2} \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{2}}{2\pi}$

$V = A_b \cdot H = \pi R^2 h \Rightarrow$

$V = \pi \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2\pi}\right)^2 \cdot \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\pi}$

Resposta: B

02. (Vunesp-SP) Um produto é acondicionado em três tipos de embalagens cilíndricas, todas de mesma altura, mas de raios *a*, *b* e *c*, distintos entre si. Se a capacidade da embalagem de raio *c* é igual à soma da capacidade da embalagem de raio *a* com a de raio *b*, prove que $c^2 = a^2 + b^2$.

Resolução

$V_c = V_a + V_b$

$\pi c^2 h = \pi a^2 h + \pi b^2 h$ *(mesma altura)*

$C^2 = a^2 + b^2$

03. (Vunesp-SP) Considere uma lata cilíndrica de raio *r* e altura *h* completamente cheia de um determinado líquido. Este líquido deve ser distribuído totalmente em copos também cilíndricos, cuja altura é um quarto da altura da lata e cujo raio é dois terços do raio da lata. Determine:

a) os volumes da lata e do copo, em função de r e h ;

b) o número de copos necessários, considerando que os copos serão totalmente cheios com o líquido.

Resolução

a) O volume da lata cilíndrica de raio r e altura h é $\pi r^2 h$ *e o volume do copo cilíndrico de raio* $\dfrac{2}{3}r$ *e altura* $\dfrac{1}{4}h$ *é* $V_{copo} = \pi \cdot \left(\dfrac{2}{3}r\right)^2 \cdot \dfrac{1}{4}h = \dfrac{\pi r^2 h}{9}$ $\therefore$

$V_{lata} = \pi r^2 h$ *e* $V_{copo} = \dfrac{\pi r^2 h}{9}$

b) $V_{copo} = \dfrac{\pi r^2 h}{9} \Rightarrow V_{copo} = \dfrac{V_{lata}}{9}$ *ou*

$V_{lata} = 9 \cdot V_{copo}$

Resposta

Serão necessários 9 copos

04. (FCV-SP) Deseja-se construir um reservatório cilíndrico com tampa, para armazenar certo líquido. O volume do reservatório deve ser de 50 m³ e o raio da base do cilindro deve ser de 2 m. O material usado na construção custa R$ 100,00 por metro quadrado. Qual o custo do material utilizado?

Resolução

Seja h a altura do reservatório. Temos

$\pi \cdot 2^2 \cdot h = 50 \Leftrightarrow h = \dfrac{25}{2\pi}$ *m.*

Assim, supondo o cilindro reto, temos que a área total do mesmo é

$2 \cdot \pi \cdot 2^2 + 2\pi \cdot 2 \cdot \dfrac{25}{2p} = 8\pi + 50\ m^2$

Logo, o custo do material utilizado para a construção do cilindro é 100 (8π + 50) ≅ 7.513,27 reais.

05. (PUC-SP) As projeções ortogonais de um cilindro sobre dois planos perpendiculares são, respectivamente, um círculo e um quadrado. Se o lado do quadrado é 10, qual o volume do cilindro?

a) $1\,000 \cdot \pi$

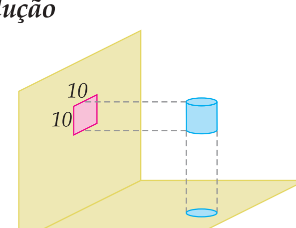
b) $750 \cdot \pi$

c) $500 \cdot \pi$

d) $250 \cdot \pi$

e) $100 \cdot \pi$

Resolução



$\begin{cases} 2R = 10 \Rightarrow R = 5 \\ H = 10 \end{cases}$

$V = \pi R^2 H \Rightarrow V = 250\pi$

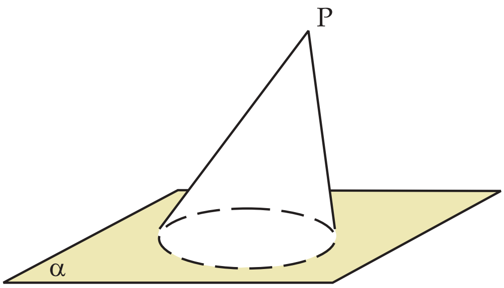
Resposta: *D*

Capítulo 06. Cones

1. Generalidades

1.1. Definição

Consideremos um círculo contido num plano α e um ponto P fora desse plano. Chamamos de **cone circular**, ou simplesmente cone, a reunião de todos os segmentos que tem uma extremidade em P e a outra num ponto qualquer do círculo.



1.2. Elementos

- **Base**

A base do cone é o círculo considerado na definição.

- **Vértice**

O vértice do cone é o ponto P.

- **Eixo**

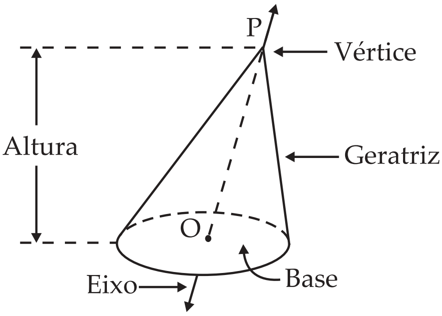
Eixo de um cone é a reta que passa pelo vértice P e pelo centro da base.

- **Geratriz**

Geratriz de um cone é qualquer segmento que tenha uma extremidade no vértice do cone e a outra na circunferência da base.

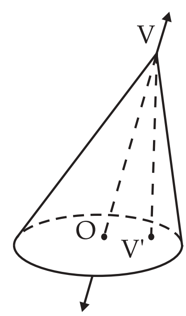
- **Altura**

Altura é a distância do vértice do cone ao plano da base.



1.3. Classificação

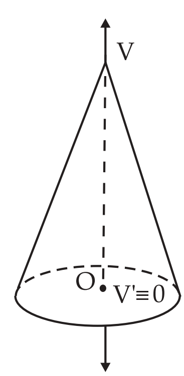
- Cone circular oblíquo



Cone circular oblíquo é aquele que apresenta o eixo oblíquo em relação ao plano da base.

Num cone circular oblíquo a projeção ortogonal do vértice no plano da base não é o seu centro.

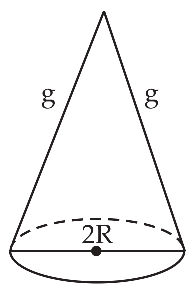
- Cone circular reto



Cone circular reto é aquele que apresenta o eixo perpendicular ao plano da base. Num cone circular reto, a projeção ortogonal do vértice no plano da base é o centro da base.

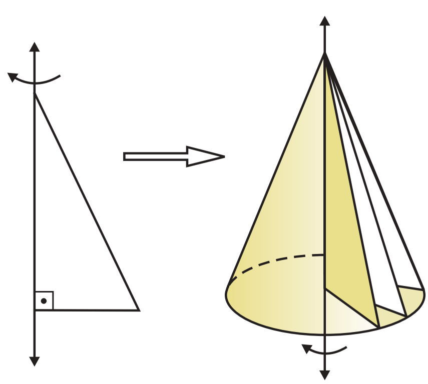
Observações

1º) Num cone reto, todas as geratrizes são congruentes entre si, então a secção meridiana é um triângulo isósceles.

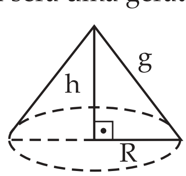


2º) Todo cone reto pode ser definido como o sólido gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.

Assim, o cone reto também é chamado de **cone de revolução.**



3º) Um dos catetos desse triângulo será a altura do cone (h), o outro será o raio (R) e a hipotenusa será uma geratriz (g). Então:

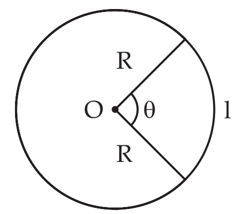


$$g^2 = h^2 + R^2$$

2. Áreas Lateral e Total

2.1. Fórmulas do setor circular

Consideremos um setor circular de raio R e ângulo central θ radianos.



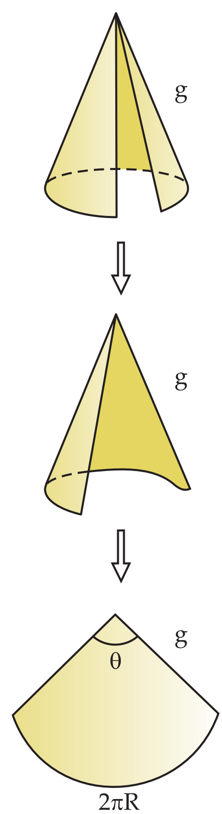
O comprimento l do arco desse setor circular é dado por:

$\boxed{l = \theta \cdot R}$ (θ em radianos)

A área S do setor circular é dada por:

$$\boxed{S = \frac{l \cdot R}{2}}$$

2.2. Área lateral



Consideremos um cone circular reto (cone de revolução) de geratriz g e raio da base R. Planificando a superfície lateral desse cone, obtemos um setor circular de raio g e cujo arco correspondente tem comprimento igual a $2\pi R$ (comprimento da circunferência da base).

Para θ em radianos, temos:

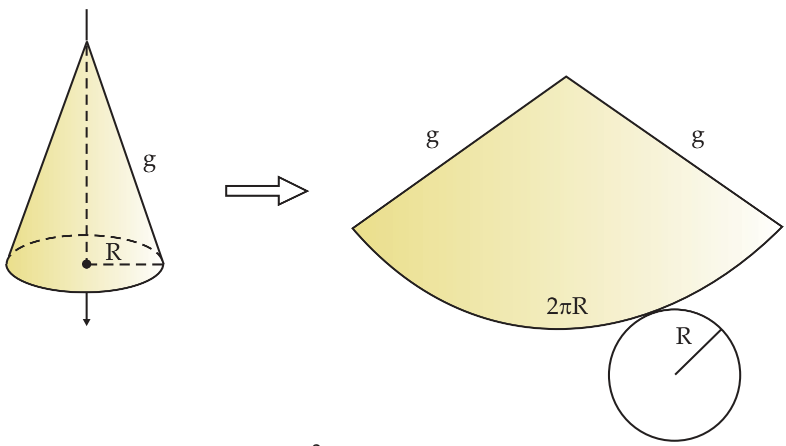
$$\theta \cdot g = 2\pi \cdot R \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{2\pi \cdot R}{g}}$$

A área total do cone é dada por:

$$A_L = \frac{2\pi \cdot R \cdot g}{2} \Rightarrow \boxed{A_L = \pi \cdot R \cdot g}$$

2.3. Área total

A superfície total de um cone de revolução é formada pela superfície lateral (setor circular) e pelo círculo da base. Assim, num cone de geratriz g e raio da base R, temos:



$$A_T = A_L + S_B \Rightarrow A_T = \pi \cdot R \cdot g + \pi \cdot R^2$$

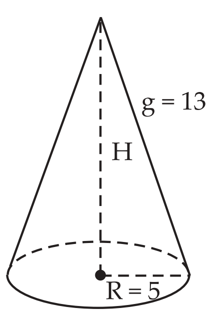
$$\boxed{A_T = \pi \cdot R \cdot (g + R)}$$

Exemplo

Num cone de revolução de geratriz 13 cm e raio da base 5 cm, calcular:

a) a altura;
b) a área lateral;
c) a área total;
d) o ângulo θ, em radianos, da superfície lateral planificada.

Resolução



a) $g^2 = H^2 + R^2$

$13^2 = H^2 + 5^2 \quad \therefore \quad \boxed{H = 12 \text{ cm}}$

b) $A^L = \pi \cdot R \cdot g = \pi \cdot 5 \cdot 13$

$\boxed{A_L = 65\pi \text{ cm}^2}$

c) $A_T = A_L + S_B = 65\pi + \pi \cdot 5^2$

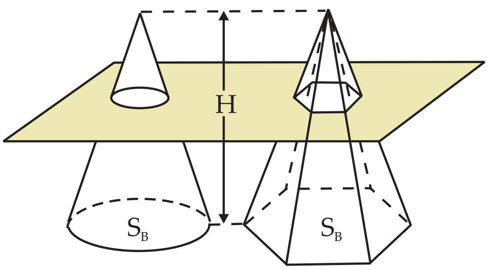
$\boxed{A_T = 90\pi \text{ cm}^2}$

d) $\theta \cdot g = 2\pi \cdot R$

$\theta \cdot 13 = 2\pi \cdot 5 \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{10\pi}{13} \text{rad}}$

3. Volume

Utilizando o princípio de Cavalieri, verificamos que um cone e uma pirâmide, cujas alturas são iguais e as bases são equivalentes, têm volumes iguais.



$$V_{cone} = V_{pirâmide}$$

Assim, o volume de um cone é igual a um terço do produto da área da base do cone pela sua altura.

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_B \cdot H$$

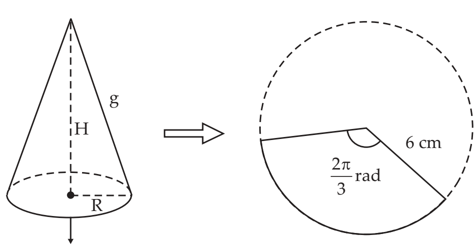
$$V = \frac{1}{3} \cdot (\pi \cdot R^2) \cdot H$$

$$\boxed{V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3}}$$

Exemplo

A superfície lateral de um cone de revolução planificada é a terça parte de um círculo de raio 6 cm. Calcular o volume desse cone.

Resolução



$$g = 6\,cm \quad e \quad \theta = \frac{2\pi}{3} rad$$

$$\theta \cdot g = 2\pi \cdot R$$

$$\frac{2\pi}{3} \cdot 6 = 2\pi \cdot R \Rightarrow R = 2\,cm$$

$$g^2 = R^2 + H^2$$

$$6^2 = 2^2 + H^2 \Rightarrow H^2 = 32$$

$$\therefore \; H = 4\sqrt{2}\,cm$$

$$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3}$$

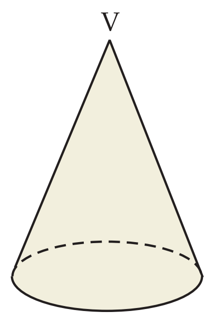
$$V = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 4\sqrt{2}}{3}$$

$$\boxed{\therefore \; V = \frac{16\pi\sqrt{2}}{3} cm^3}$$

Exercícios Resolvidos

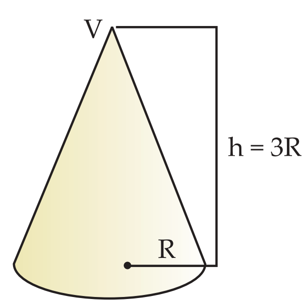
01.

A altura de um cone circular reto é o triplo da medida do raio da base. Se o comprimento da circunferência dessa base é 8π cm, então o volume do cone, em centímetros cúbicos, é:



a) 64π
b) 48π
c) 32π
d) 16π
e) 8π

Resolução



$$C_c = 2\pi R = 8\pi \Rightarrow R = 4 \Rightarrow h = 3R = 12$$

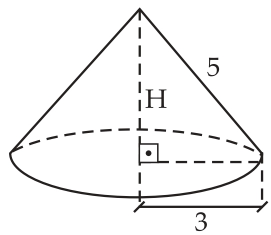
$$V_c = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h \Rightarrow V_c = 64\pi\,cm^3$$

Resposta: A

02. (UFPa-PA) Qual é o volume de um cone circular reto de diâmetro da base igual a 6 cm e de geratriz 5 cm?

a) 12π cm³
b) 24π cm³
c) 36π cm³
d) 48π cm³
e) 96π cm³

Resolução



$H^2 = 25 - 9$

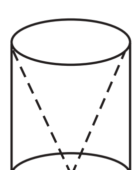
$H^2 = 16$

$H = 4\ cm$

$$\Rightarrow V = \frac{A_B \cdot H}{3} \Rightarrow V = \frac{9\pi \cdot 4}{3} \Rightarrow V = 12\pi\, cm^3$$

Resposta: A

03. (Fatec-SP) Constrói-se um pilão de madeira tomando um cilindro circular reto, de raio R e altura h, e nele escavando um cone de mesma base que o cilindro e vértice no centro da base oposta. O volume de madeira desse pilão é igual a:



a) $\pi R^2 h$
b) $\dfrac{\pi R^2 h}{3}$
c) $\dfrac{2\pi R^2 h}{3}$
d) $\dfrac{4}{3}\pi R^2 h$
e) $\dfrac{\pi R^2}{h} + \dfrac{\pi R}{h^2}$

Resolução

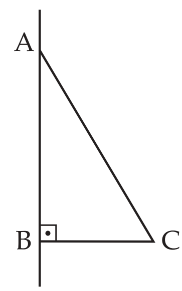
$V_{pi} = V_{cil} - V_{cone}$

$V_{pi} = \pi R^2 h - \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$

$V_{pi} = \dfrac{2}{3}\pi R^2 h$

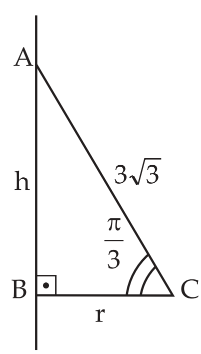
Resposta: C

04. (UFSC-SC) No triângulo ABC, m(AC) $= 3\sqrt{3}$ e $m(A\hat{C}D) = \dfrac{\pi}{3}$. Calcule o volume gerado pela rotação do triângulo ABC em torno do eixo AB.



a) $\dfrac{81}{4}\pi$
b) $\dfrac{9}{8}\pi$
c) $\dfrac{81}{8}\pi$
d) $\dfrac{81}{2}\pi$
e) $\dfrac{9}{4}\pi$

Resolução



Cálculo dos valores dos catetos do ΔABC:

$$sen\,60° = \frac{h}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{9}{2}$$

$$cos\,60° = \frac{r}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

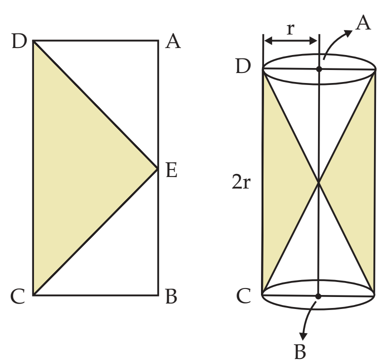
O sólido formado será um cone de $r = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ *e altura* $\frac{9}{2}$*; logo,* $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{9}{2}}{3}$$

$$V = \frac{81}{8}\pi$$

Resposta: C

05. (Fuvest-SP) Na ilustração, ABCD é um retângulo e BC = BE = EA = r. Ache, em função de r, o volume do sólido gerado pela região triangular EDC quando o retângulo dá uma volta completa em torno de AB.



Resolução

$$V = V_{cil} - 2V_{cone}$$

$$V = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{\pi r^2\, r}{3}$$

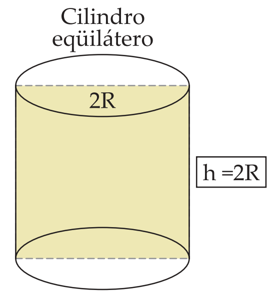
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Resposta: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

4. Cilindro e Cone Eqüiláteros

4.1. Cilindro eqüilátero

Cilindro eqüilátero é um cilindro de revolução cuja secção meridiana é um quadrado (h = 2R).



Área lateral

$A_L = 2\pi\, R \cdot h = 2\pi R \cdot 2R$

$\boxed{A_L = 4\pi R^2}$

Área total

$A_T = 2 \cdot A_B + A_L = 2\pi R^2 + 4\pi R^2$

$\boxed{A_T = 6\,\pi R^2}$

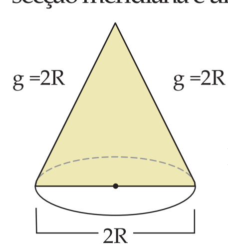
Volume

$V = A_B \cdot h = \pi R^2 \cdot 2R$

$\boxed{V = 2\pi R^3}$

4.2. Cone eqüilátero

Cone eqüilátero é um cone de revolução cuja secção meridiana é um triângulo eqüilátero (g = 2R)



$h = \frac{2R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{h = R\sqrt{3}}$

Área lateral

$A_L = \pi Rg = \pi R \cdot 2R$

$A_L = 2\pi R^2$

Área total

$A_T = A_L + A_B = 2\pi R^2 + \pi R^2$

$\boxed{A_T = 3\pi R^2}$

Volume

$$V = \frac{1}{3}A_B \cdot h = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R\sqrt{3}$$

$$\boxed{V = \frac{\pi R^2\sqrt{3}}{3}}$$

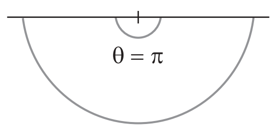
Lembrando que o ângulo θ, em radianos, da superfície lateral planificada é dado por:

$$\boxed{\theta = \frac{2\pi R}{g}}$$

Como para o cone eqüilátero g = 2R

$$\theta = \frac{2\pi R}{2R} \Rightarrow \boxed{\theta = \pi}$$

Portanto, a superfície lateral planificada de um cone eqüilátero é um semicírculo.



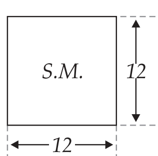
Exercícios Resolvidos

01. (UFRN-RN) Se um cilindro eqüilátero mede 12 m de altura, então o seu volume em m³ vale:

a) 144 π
b) 200 π
c) 432 π
d) 480 π
e) 600 π

Resolução

Cilindro eqüilátero ⇔ secção meridiana é um quadrado. H = 2R



$H = 12 = 2R$

$R = 6$

$\Rightarrow V = \pi R^2 \cdot H \Rightarrow V = \pi \cdot 6^2 \cdot 12 \Rightarrow V = 432\pi\ m^3$

Resposta: *C*

02. (UFPA-PA) Um cone eqüilátero tem de área de base 4π cm². Qual sua área lateral?

a) 2π cm²
b) 4π cm²
c) 8π cm²
d) 16π cm²
e) 32π cm²

Resolução

Cone eqüilátero

$\pi R^2 = 4\pi \Rightarrow R = 2$

$g = 2R = 4$

$A_L = \pi R g \Rightarrow A_L = 8\pi cm^2$

Resposta: *C*

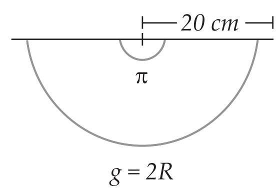
03. (Fuvest-SP) Um pedaço de cartolina possui a forma de um semicírculo de raio 20 cm. Com essa cartolina, um menino constrói um chapéu cônico e o coloca com a base apoiada sobre uma mesa. Qual é a distância do bico do chapéu à mesa?

a) $10\sqrt{3}$ cm
b) $3\sqrt{10}$ cm
c) $20\sqrt{2}$ cm
d) 20 cm
e) 10 cm

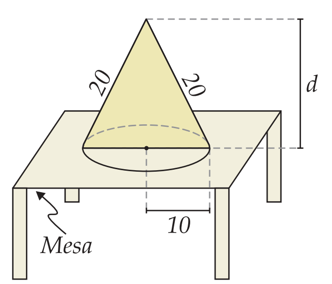
Resolução

Semicírculo ⇒ cone eqüilátero

Lembrando que o raio do semicírculo é a geratriz do cone e não o raio da base, temos



$g = 2R$
$20 = 2R$
$R = 10\ cm$



$d = h = h\Delta e$

$$d = \frac{20\sqrt{3}}{2}$$

$d = 10\sqrt{3}\ cm$

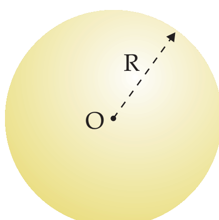
Resposta: *D*

Capítulo 07. Esfera

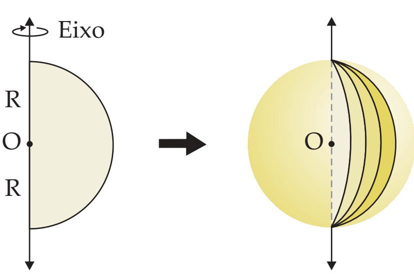
1. Generalidades

1.1. Definição

Dados um ponto O e uma distância R, chamamos **esfera** ao conjunto de todos os pontos do espaço cujas distâncias em relação ao ponto O são menores ou iguais a R. O ponto O é o centro da esfera e R seu raio.



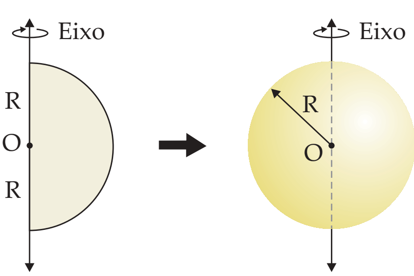
A esfera é também o sólido de revolução gerado pela rotação de um **semicírculo** em torno de um eixo que contém o diâmetro.



1.2. Superfície esférica

Chamamos de **superfície esférica** de centro O e o raio R ao conjunto de todos os pontos P do espaço, tais que a distância OP é igual a R.

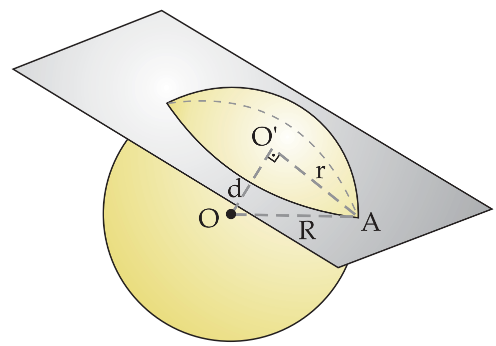
A superfície esférica também é a superfície gerada pela rotação de uma **semicircunferência** em torno de seu diâmetro.



1.3. Secção da esfera

Toda secção de uma esfera por um plano é um círculo. Quando o plano passa pelo centro da esfera , a secção é um círculo com o mesmo raio da esfera, que chamamos **círculo máximo.**

Sendo d a distância de um plano ao centro da esfera de raio R (d < R), a secção será um círculo de raio r e a relação entre d, R e r é dada pelo teorema de Pitágoras.

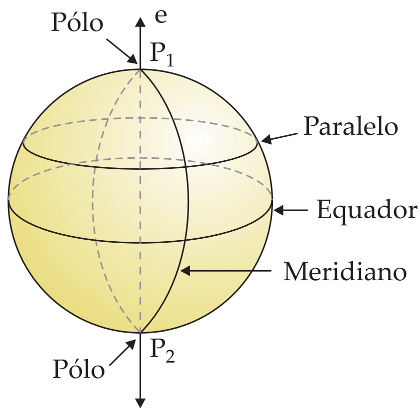


$$\boxed{R^2 = d^2 + r^2} \quad \Delta OO'A$$

1.4. Elementos

Consideremos uma superfície esférica de centro O, raio R e eixo **e**.

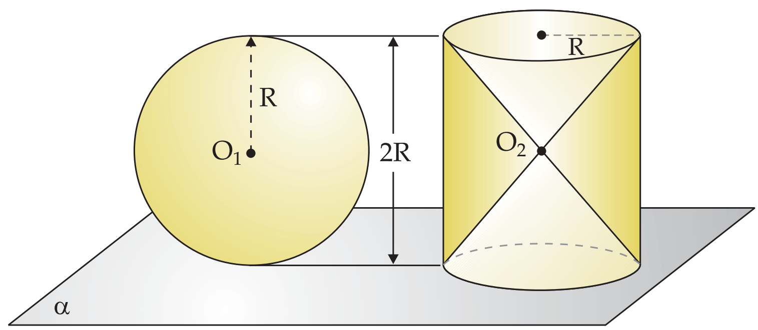
- **Pólos**
  Pólos são os pontos de intersecção do eixo com a superfície da esfera.
- **Equador**
  Equador é a circunferência que obtemos ao seccionarmos a superfície por um plano perpendicular ao eixo passando pelo centro O.
- **Paralelo**
  Paralelo é uma circunferência que obtemos ao seccionarmos a superfície por um plano perpendicular ao eixo.
- **Meridiano**
  Meridiano é uma circunferência que obtemos ao seccionarmos a superfície por um plano que contém o eixo **e.**



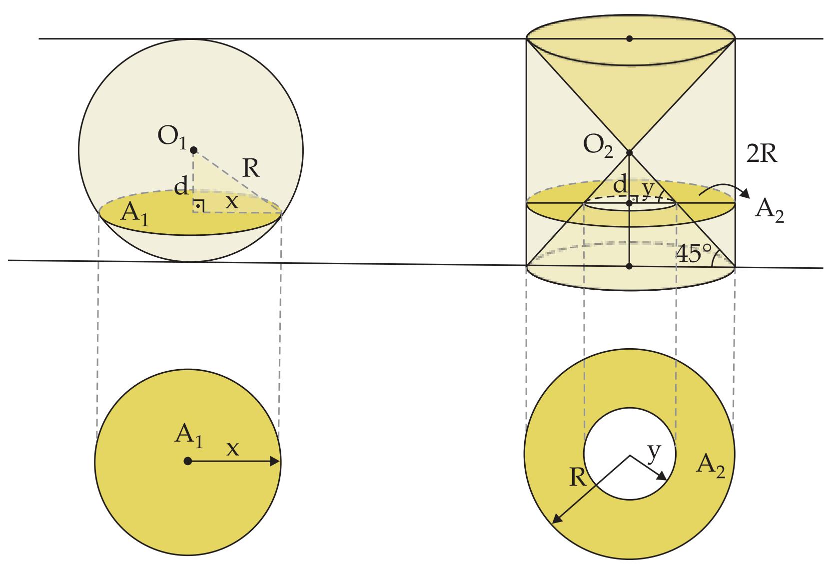
2. Volume

Consideremos dois sólidos S_1 e S_2 apoiados num mesmo plano α, definidos do seguinte modo:

- **Sólido S_1**: esfera de centro O_1 e raio R.
- **Sólido S_2**: anticlepsidra de um cilindro eqüilátero de centro O_2 e raio R. A anticlepsidra é o sólido que obtemos do cilindro, eliminando dois cones com bases nas bases do cilindro e vértices no centro do cilindro. O sólido formado pelos dois cones que eliminamos é a clepsidra.



Vamos seccionar S_1 e S_2 por um plano paralelo a α a uma distância de O_1 e O_2, e obteremos as áreas A_1 e A_2 dessas secções.



$$x^2 + d^2 = R^2 \Rightarrow x^2 = R^2 - d^2$$

$$A_1 = \pi \cdot x^2 = \pi \cdot \left(R^2 - d^2\right)$$

$$y = d$$

$$A_2 = \pi \cdot R^2 - y^2 = \pi \cdot \left(R^2 - d^2\right)$$

Notamos que as áreas A_1 e A_2 são sempre iguais qualquer que seja a distância d < R. Assim, pelo princípio de Cavalieri, concluímos que seus volumes são iguais.

Então, o volume da esfera é igual à diferença entre os volumes do cilindro e dos dois cones.

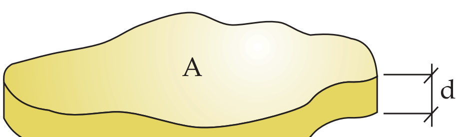
$$V = \pi \cdot R^2 \cdot 2 \cdot R - 2 \cdot \frac{\pi \cdot R^2 \cdot R}{3} = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$$

Assim

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

3. Área da Superfície Esférica

Consideremos um sólido formado por um "empilhamento" de superfícies congruentes, conforme a figura.



A = área da superfície

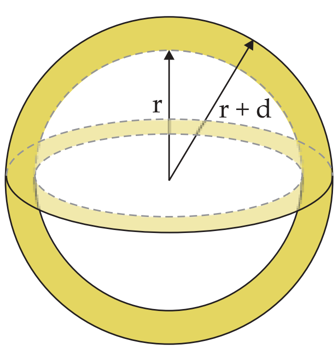
d = altura

O volume do sólido considerado é dado por:

$V = A \cdot d$

Então, $\boxed{A = \frac{V}{d}}$

Consideremos agora duas superfícies esféricas de centro O e raios R e r, com R – r = d > 0, e vamos calcular o volume desse sólido.



$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot (r+d)^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot \left[\cancel{r^3} + 3r^2d + 3rd^2 + d^3 - \cancel{r^3}\right]$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot \left[3r^2d + 3rd^2 + d^3\right]$$

Dividindo a igualdade por d, temos:

$$\frac{V}{d} = \frac{4}{3}\pi \cdot \left[3r^2 + 3rd + d^2\right]$$

Considerando d próximo de zero, o sólido pode ser considerado como se fosse formado por um "empilhamento" de superfícies congruentes.

Assim, quando d tende a zero, $\frac{V}{d}$ é a área da superfície da esfera:

$$A = \lim_{d \to 0} \frac{V}{d} = \frac{4}{3}\pi \cdot \left[3r^2 + 3r \cdot 0 + 0^2\right]$$

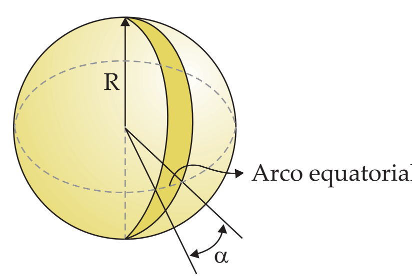
$$\boxed{\therefore \quad A = 4\pi \cdot r^2}$$

4. Partes da Esfera

4.1. Fuso esférico

Fuso esférico é a parte da superfície esférica limitada por dois planos que contêm um diâmetro.

O ângulo α, medido na secção equatorial, é o que caracteriza o fuso.



A área do fuso é proporcional à medida do ângulo α, então,

- em graus:

$$360° \;\text{———}\; 4\pi \cdot R^2$$

$$\alpha \;\text{———}\; A_{fuso}$$

$$\boxed{A_{fuso} = \frac{\alpha}{360°} \cdot 4\pi \cdot R^2}$$

- em radianos:

$$2\pi \text{ ——— } 4\pi \,.\, R^2$$
$$\alpha \text{ ——— } A_{fuso}$$

$$\boxed{A_{fuso} = 2 \cdot R^2 \cdot \alpha}$$

Exemplo

A área de um fuso de raio 4 cm e diedro 60° é:

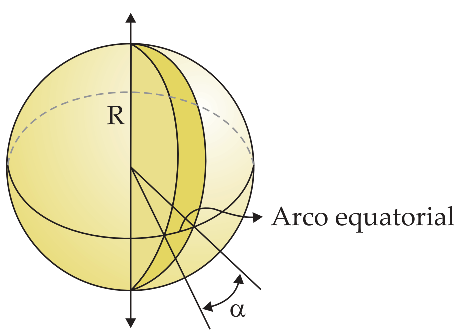
$$360° \text{ ——— } 4\pi \cdot 4^2$$
$$60° \text{ ——— } A_{fuso}$$

$$A_{fuso} = \frac{4\pi \cdot 4^2}{6} = \frac{32\pi}{3}\ cm^2$$

4.2. Cunha esférica

Cunha esférica é a parte da esfera limitada por dois planos que contêm um diâmetro.

O ângulo α, medido na secção equatorial, é o que caracteriza o fuso.



O volume de uma cunha é proporcional à medida α, então

- em graus:

$$360° \text{ ——— } \frac{4}{3}\pi \cdot R^2$$
$$\alpha \text{ ——— } V_{cunha}$$

$$\boxed{V_{cunha} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R^3}$$

- em radianos:

$$2\pi \text{ ——— } \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$$
$$\alpha \text{ ——— } V_{cunha}$$

$$\boxed{V_{cunha} = \frac{2 \cdot R^3 \cdot \alpha}{3}}$$

Observação

A área da superfície de uma cunha é dada pela soma das áreas do fuso e dos dois semicírculos de raio R (raio da esfera).

Exemplo

Dada uma cunha esférica de diedro 45° e raio 4 cm, calcular:

a) volume da cunha;
b) área da superfície da cunha.

Resolução

a) $V_{cunha} = \frac{45°}{360°} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{32\pi}{3}\ cm^3$

b) $A_{fuso} = \frac{45°}{360°} \cdot 4\pi \cdot 4^2 = 32\pi\ cm^2$

$$A_{cunha} = A_{fuso} + \cancel{2} \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{\cancel{2}} = 32\pi + \pi \cdot 4^2$$

$$A_{cunha} = 48\pi\ cm^2$$

Exercícios Resolvidos

01. (Unicamp-SP) O volume V de uma bola de raio r é dado pela fórmula $V = 4/3\pi r^3$.

a) Calcule o volume de uma bola de raio r = 3/4 cm. Para facilitar os cálculos você deve substituir π pelo número 22/7.

b) Se uma bola de raio r = 3/4 cm é feita com um material, cuja densidade volumétrica (quociente da massa pelo volume) é de 5,6 g/cm³, qual será a sua massa?

Resolução

a) $V_e = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{27}{64} \Rightarrow V_e = \frac{99}{56}\,cm^3$

b) $d = \frac{m}{V} \Rightarrow 5{,}6 = \frac{m}{\frac{99}{56}} \Rightarrow m \cong 9{,}9\ g$

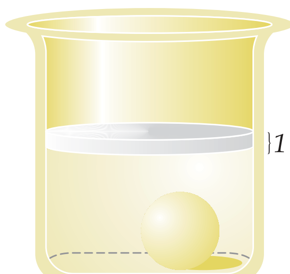
Resposta

a) 99/56 cm³
b) 9,9 g

02. (Fuvest-SP) Um recipiente cilíndrico, cujo raio da base é 6 cm, contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é colocada no interior do recipiente, ficando totalmente submersa. Se a altura da água subiu 1 cm, então o raio da esfera é:

a) 1 cm
b) 2 cm
c) 3 cm
d) 4 cm
e) 5 cm

Resolução



$V_e = V_{líquido\ deslocado}$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi \cdot 6^2 \cdot 1 \Rightarrow \boxed{R = 3\ cm}$$

Resposta: *C*

03. (UCMG) Numa esfera de 26 cm de diâmetro, faz-se um corte por um plano que dista 5 cm do centro. O raio da secção feita mede, em cm:

a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) 12

Resolução

$R^2 = r^2 + d^2 \Rightarrow$

$(13)^2 = r^2 + 5^2 \Rightarrow$

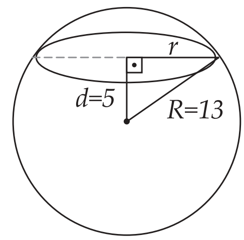
$169 = r^2 + 25 \Rightarrow$

$169 - 25 = r^2 \Rightarrow$

$r^2 = 144 \Rightarrow$

$r = 12$

Resposta: *E*

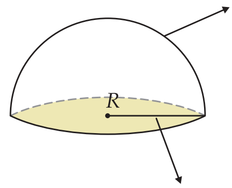


04. (FGV-SP) Deseja-se construir um galpão em forma de um hemisfério, para uma exposição. Se, para o revestimento total do piso, utilizou-se 78,5 m² de lona, quantos metros quadrados de lona se utilizaria na cobertura completa do galpão?

(Considerar π = 3,14)

a) 31,4
b) 80
c) 157
d) 208,2
e) 261,66

Resolução



$S_{lona} = \frac{S_{SE}}{2} = \frac{4\pi R^2}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{lona} = 2\pi R^2$

Como $S_{piso} = \pi R^2$, *temos que*

$S_{piso} = 78{,}5 = \pi R^2 \therefore$

$S_{lona} = 2.S_{piso}$

$S_{lona} = 157 m^2$

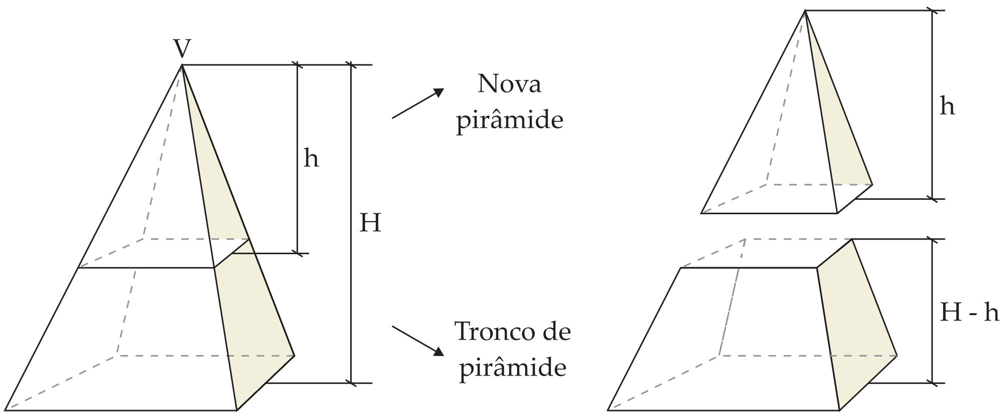
Resposta: *C*

Capítulo 08. Sólidos Semelhantes

1. Definição

Consideremos uma pirâmide (*) de vértice V e altura H.

Vamos seccionar essa pirâmide por um plano paralelo à sua base a uma distância h do vértice V.



Obtemos assim dois sólidos:

- o sólido que contém o vértice V é uma nova pirâmide de altura h.
- o sólido que contém a base da pirâmide considerada é um tronco de pirâmide de altura H – h.

(*) A mesma análise pode ser feita com um cone.

Propriedade Fundamental

A nova pirâmide e a pirâmide primitiva são semelhantes e a razão de semelhança é $k = \dfrac{h}{H}$

2. Conseqüências

1º) A razão entre as áreas das bases é igual ao quadrado da razão de semelhança $\dfrac{h^2}{H^2}$.

2º) A razão entre as áreas laterais é igual ao quadrado da razão de semelhança $\dfrac{h^2}{H^2}$.

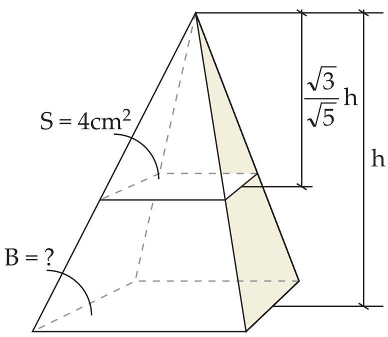
3º) A razão entre as áreas totais é igual ao quadrado da razão de semelhança $\dfrac{h^2}{H^2}$.

4º) A razão entre os volumes é igual ao cubo da razão de semelhança $\dfrac{h^3}{H^3}$.

Exemplos de Aplicação

01. Considere uma pirâmide qualquer de altura h e de base B. Traçando-se um plano paralelo à base B, cuja distância ao vértice da pirâmide é $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ h cm, obtém-se uma secção plana de área 4 cm². Calcule a área B.

Resolução

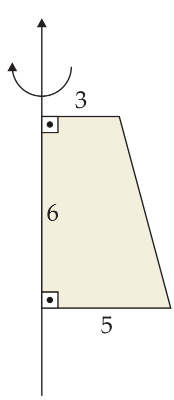


$$K=\frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}h}{h}\Rightarrow K=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\Rightarrow k^2=\frac{3}{5}$$

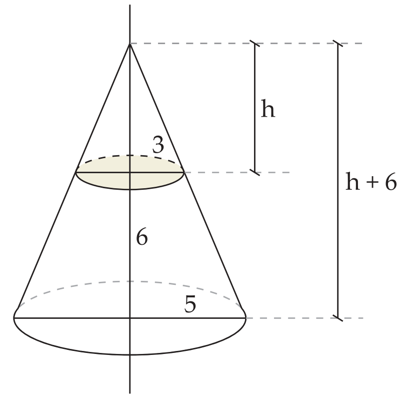
$$\frac{S}{B}=k^2\ \therefore \frac{4}{B}=\frac{3}{5}$$

$$B=\frac{20}{3}\,cm^3$$

02. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de 360° do trapézio da figura em torno do eixo.



Resolução



$$k=\frac{h}{h+6}=\frac{3}{5}\Rightarrow h=9$$

$$V_{sólido}=V_{cone\ maior}-V_{cone\ menor}$$

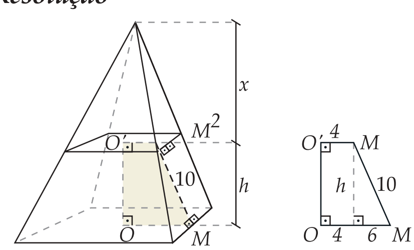
$$V=\frac{\pi\cdot 5^2\cdot 15}{3}-\frac{\pi\cdot 3^2\cdot 9}{3}$$

$$\boxed{V=98\pi}$$

03. O apótema (*) de um tronco de pirâmide regular mede 10 dm, as bases são quadradas, de lados, respectivamente, 8 dm e 20 dm. Calcule o volume.

(*) Apótema de tronco de pirâmide regular é a altura de cada uma das faces laterais

Resolução



$$h^2+6^2=10^2\ \therefore\ h=8\ cm$$

$$k=\frac{x}{x+8}=\frac{8}{20}\Rightarrow x=\frac{16}{3}\,cm$$

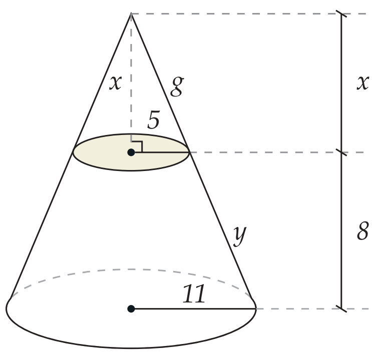
$$V_{Tronco}=V_{pir.\ maior}-V_{pir.\ menor}$$

$$V=\frac{20^2\cdot\left(8+\frac{16}{3}\right)}{3}-\frac{8^2\cdot\frac{16}{3}}{3}$$

$$V=\frac{16\,000}{9}-\frac{1024}{9}=1664\ dm^3$$

04. Determine a área lateral e a área total de um tronco de cone, sabendo que os raios de suas bases medem 11 cm e 5 cm e que a altura do tronco mede 8 cm.

Resolução



$$k = \frac{x}{x+8} = \frac{5}{11} \Rightarrow x = \frac{20}{3}\,cm$$

$$\left(\frac{20}{3}\right)^2 + 5^2 = g^2 \therefore g = \frac{25}{3}\,cm$$

$$\frac{g}{g+y} = \frac{5}{11}$$

$$\frac{\frac{25}{3}}{\frac{25}{3}+y} = \frac{5}{11} \Rightarrow y = 10$$

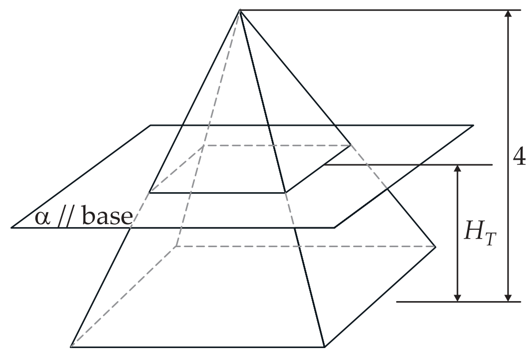
$$A_L = \pi \cdot 11 \cdot \left(\frac{25}{3}+10\right) - \pi \cdot 5 \cdot \frac{25}{3}$$

$$A_L = \frac{605\pi}{3} - \frac{125\pi}{3} = 160\pi\,cm^2$$

$$A_T = 160\pi + \pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 11^2 = 306\pi\,cm^2$$

Exercícios Resolvidos

01. (UFMG-MG) Corta-se uma pirâmide regular de base quadrangular e altura 4 cm por um plano paralelo ao plano da base, de maneira que os volumes dos dois sólidos obtidos sejam iguais. A altura do tronco da pirâmide obtida é, em centímetros:



a) 1
b) $4 - 2\sqrt[3]{4}$
c) 2
d) $4 - \sqrt{2}$
e) $4 - \sqrt[4]{2}$

Resolução

(I) Sendo o plano paralelo à base, as pirâmides são semelhantes.

Como o volume do tronco e da pirâmide são iguais, sendo V o volume da pirâmide original e V' o volume da nova pirâmide temos:

(II) $V = 2V' \Rightarrow \frac{V}{V'} = 2 \Rightarrow k^3 = 2 \Rightarrow k = \sqrt[3]{2}$

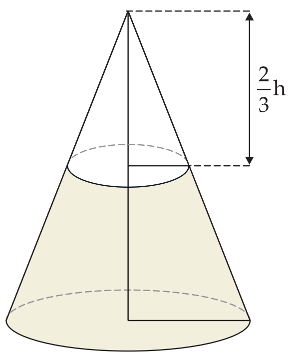
(III) $\frac{h'}{h} = k \Rightarrow \frac{4}{h} = \sqrt[3]{2} \Rightarrow h = 2\sqrt[3]{4}$

(IV) Como $h + H_T = H \Rightarrow 2\sqrt[3]{4} + H_T = 4 \Rightarrow H_T = 4 - 2\sqrt[3]{4}$

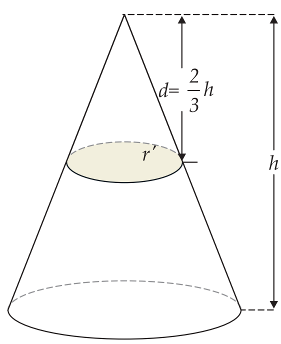
Resposta: *B*

02. (UnB-DF) Um cone circular reto é seccionado por um plano paralelo à sua base a $\frac{2}{3}$ de seu vértice. Se chamarmos V o volume do cone, então o volume do tronco de cone resultante vale:

a) $\frac{8}{27}V$
b) $\frac{2}{3}V$
c) $\frac{4}{9}V$
d) $\frac{19}{27}V$



Resolução



$$\frac{V_{cone}'}{V_{cone}} = \left(\frac{d}{h}\right)^3 \Rightarrow \frac{V'}{V} = \left(\frac{\frac{2}{3}h}{h}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow$$

$$8V = 27V' \Rightarrow V' = \frac{8V}{27}$$

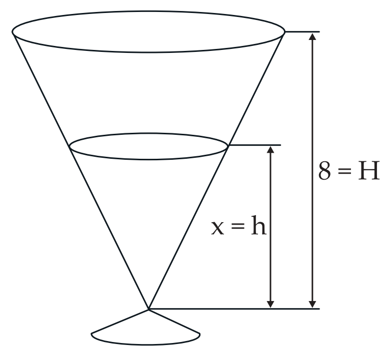
Se o cone menor é $\frac{8}{27}$ do cone maior, então, o volume do tronco do cone será:

$$V_{Tronco} = V_{cone\ maior} - V_{cone\ menor}$$

$$V_{Tronco} = V - \frac{8}{27}V = \frac{19}{27}V$$

Resposta: *D*

03. (Fuvest-SP) Um copo tem a forma de um cone com altura 8 cm e raio de base 3 cm. Queremos enchê-lo com quantidades iguais de suco e água. Para que isso seja possível, a altura x atingida pelo primeiro líquido colocado deve ser:



a) $\frac{8}{3}$ cm
b) 6 cm
c) 4 cm
d) $4\sqrt{3}$ cm
e) $4\sqrt[3]{4}$ cm

Resolução

(I) Admitindo os cones semelhantes, temos:

(II) $V = 2V' \Rightarrow \frac{V}{V'} = 2 = k^3 \Rightarrow k = \sqrt[3]{2}$

(III) $\frac{H}{h} = k \Rightarrow \frac{8}{x} = \sqrt[3]{2} \Rightarrow x = 4\sqrt[3]{4}$ *cm*

Resposta: *E*