

Matemática 4

Geometria Analítica

Pré-Vestibular

Teoria e Exercícios Propostos



Editora COC – Empreendimentos Culturais Ltda.
Rua General Celso de Mello Rezende, 301
Tel.: (16) 3603.9700 – CEP 14095-270
Lagoinha – Ribeirão Preto – SP



Capítulo 01. Introdução à Geometria Analítica

1. Localização	7
1.1. Localização Unidimensional	7
1.2. Localização Bidimensional	7
2. Eixo	7
3. O Sistema Cartesiano	8
4. Propriedades dos Pontos do Plano Cartesiano	9
5. Distância entre Dois Pontos	12
6. Ponto Médio de um Segmento	13
7. Como Obter um Ponto em GA	14
8. Área de Polígonos	16
8.1. Área de um Triângulo	16
8.2. Área de um Polígono	17
9. Lugares geométricos	20
9.1. Definição	20
9.2. Equação de um Lugar Geométrico	20
9.3. Pontos de um LG	22

Capítulo 02. Estudo da Reta

1. Teoria Angular	24
1.1. Inclinação de uma Reta	24
1.2. Coeficiente Angular de uma Reta	24
1.3. Como Calcular o Coeficiente Angular	25
1.4. Condição de Alinhamento para Três Pontos	26
1.5. Condição de Paralelismo de Retas	26
1.6. Condição de Perpendicularismo de Retas	27
2. Equação Fundamental de uma Reta	29
3. Equação Geral da Reta	30
4. Equação Reduzida da Reta	31
5. Equação Segmentária da Reta	32
6. Equações Paramétricas da Reta	32
7. Posições Relativas de Duas Retas	36
7.1. Retas Paralelas Distintas	36
7.2. Retas Paralelas Coincidentes	36
7.3. Retas Concorrentes	36
8. Condição de Perpendicularismo de Retas: Demonstração	37

Índice.matemática 4

Capítulo 03. Inequações do 1º Grau no Plano Cartesiano

1. Casos Particulares	40
2. Caso Geral	41

Capítulo 04. Equações da Circunferência

1. Equação Reduzida	45
2. Equação Geral	46

Capítulo 05. Distância de Ponto a Reta

1. Introdução	51
2. Fórmula de Cálculo	51
3. Obtenção de Equações de Retas	52
3.1. Dado um Ponto da Reta	52
3.2. Conhecendo a Direção da Reta	53

Capítulo 06. Circunferência: Posições Relativas

1. Posições Relativas entre Ponto e Circunferência	57
2. Posições Relativas entre Reta e Circunferência	58
3. Problemas sobre Retas e Circunferências	58
4. Posições Relativas entre Duas Circunferências	60

Exercícios Propostos 65



Capítulo 01. Introdução à Geometria Analítica

1. Localização

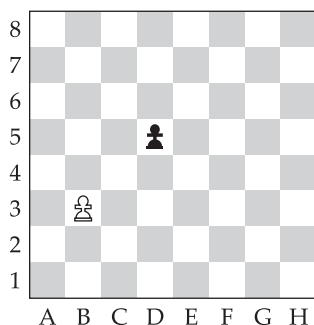
1.1. Localização Unidimensional

Para determinarmos a posição de uma composição na via férrea, basta a indicação do número do marco de quilometragem. Este número é a coordenada do trem na via férrea.

Com o exemplo, podemos perceber que, para localizarmos um “ponto” em uma “linha”, é suficiente uma medida, isto é, na localização unidimensional, as posições são indicadas por uma única coordenada.

1.2. Localização Bidimensional

No jogo de xadrez, a posição das peças no tabuleiro fica indicada por uma letra e um número (podiam ser duas letras ou dois números). As filas verticais são identificadas por letras do alfabeto latino e as filas horizontais, por números.



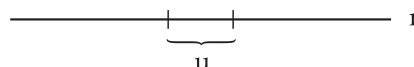
A cada casa do tabuleiro correspondem uma letra e um número que indicam as filas vertical e horizontal da casa, respectivamente.

Assim, o peão branco, representado no tabuleiro da figura, está na casa B3, e o peão preto, na casa D5.

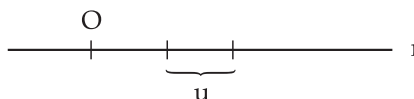
Com o exemplo, podemos perceber que, para localizar um “ponto” em um “plano”, são necessárias duas medidas, isto é, na localização bidimensional, as posições são indicadas por um par de coordenadas.

2. Eixo

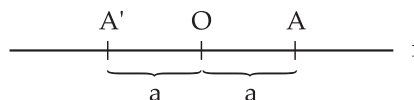
Consideremos uma reta r e uma unidade (u) de comprimento com a qual mediremos os segmentos contidos em r .



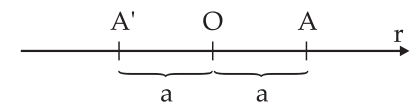
Consideremos também na reta r um ponto O arbitrário, que chamaremos de origem.



Sejam A e A' dois pontos de r tais que $\overline{OA}$ e $\overline{OA'}$ tenham a mesma medida a , tomada com a unidade u , de modo que A esteja à direita de O e A' à esquerda de O .



Vamos fixar o sentido de O para A como o sentido positivo e representá-lo com uma ponta de seta.

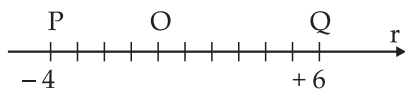


Desta forma, dizemos que o ponto A está afastado a unidades de O e que A' está afastado $-a$ unidades de O .

Podemos então associar aos pontos A e A' os números reais a e $-a$, respectivamente, que chamaremos de abscissas desses pontos.

De um modo geral, podemos associar a cada ponto de r um único número real que chamamos abscissa do ponto, número esse que será positivo para pontos marcados a partir da origem, no sentido positivo, e negativo para pontos marcados no sentido contrário.

Exemplos



abscissa de $P = -4$

abscissa de $Q = +6$

Definição: A reta orientada com um sentido positivo, com uma origem arbitrada e uma unidade de medida estabelecida, é chamada de eixo.

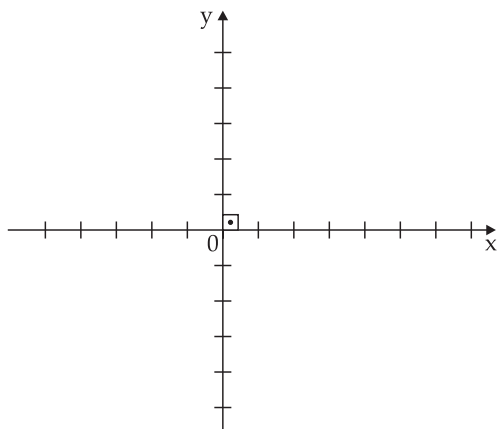
Então, quando quisermos localizar pontos em uma reta, transformamos a reta em um eixo e a localização do ponto será dada pela abscissa do ponto.

Importante

- 1º) A abscissa de origem é o número real zero.
- 2º) Cada ponto de uma eixo possui uma única abscissa e para cada abscissa existe um único ponto no eixo, isto é, estabelecemos uma **relação biunívoca** entre o conjunto dos números reais e o conjunto de pontos de uma reta (eixo).

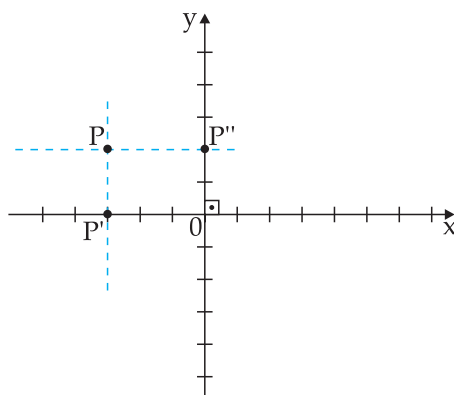
3. O Sistema Cartesiano

Consideremos em um plano dois eixos X e Y perpendiculares entre si e com origem O comum. Nestas condições, dizemos que X e Y formam um sistema cartesiano ortogonal, e o plano dotado com tal sistema será chamado de plano cartesiano.



Para localizarmos um ponto P num plano dotado de um sistema cartesiano ortogonal, traçamos por P duas retas paralelas aos eixos x e y que encontram os mesmos em P' e P'' , respectivamente.

Com as abscissas desses pontos determinamos a posição de P no plano.



$$P \begin{cases} \text{abscissa de } P' = -3 \\ \text{abscissa de } P'' = +2 \end{cases}$$

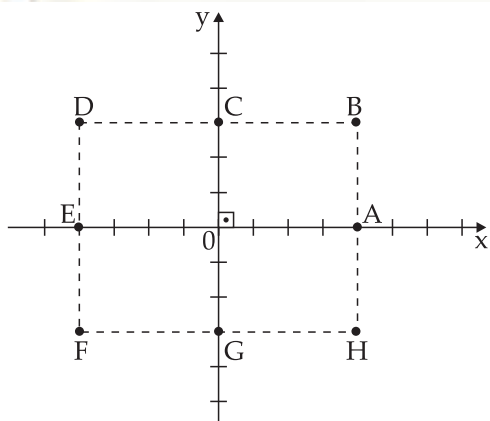
Indicamos a abscissa de P' por x_p e a abscissa de P'' por y_p e o ponto P é localizado no plano pelo par ordenado (x_p, y_p) .

Para facilidade de linguagem, usamos as seguintes denominações:

- 1º) A abscissa de P' , a primeira abscissa de P , será simplesmente a abscissa de P .
- 2º) A abscissa de P'' , a segunda abscissa de P , será a abscissa ordenada de P , ou simplesmente ordenada de P .
- 3º) O par ordenado (x_p, y_p) será denominado coordenadas de P .
- 4º) Os eixos x e y serão, respectivamente, o eixo das abscissas e o eixo das ordenadas.

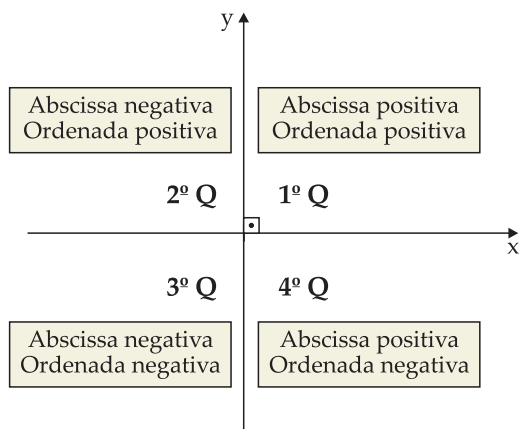
Exemplo

Indicamos a seguir as coordenadas dos pontos representados no plano cartesiano.



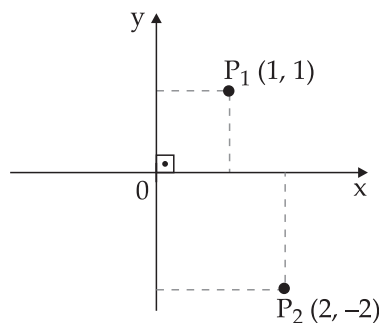
A (4, 0) D (-4, 3) G (0, -3)
 B (4, 3) E (-4, 0) H (4, -3)
 C (0, 3) F (-4, -3) O (0, 0)

Os eixos x e y dividem o plano cartesiano em quatro regiões que chamamos quadrantes (Q), que são numerados conforme a figura abaixo:

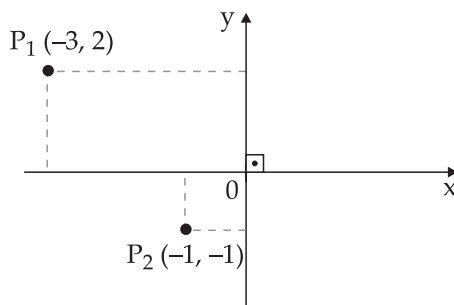


4. Propriedades dos Pontos do Plano Cartesiano

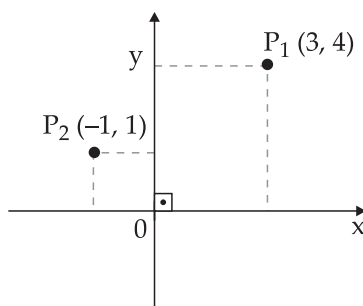
P₁) Se um ponto tem abscissa positiva, ele pertence ao 1º ou ao 4º quadrante do plano cartesiano ou ao eixo x .



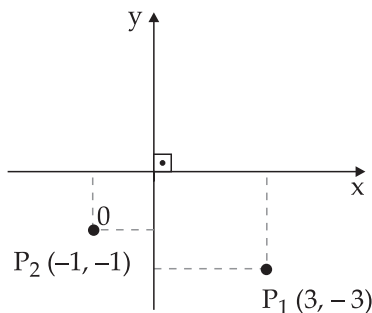
P₂) Se um ponto tem abscissa negativa, ele pertence ao 2º ou ao 3º quadrante do plano cartesiano ou ao eixo x .



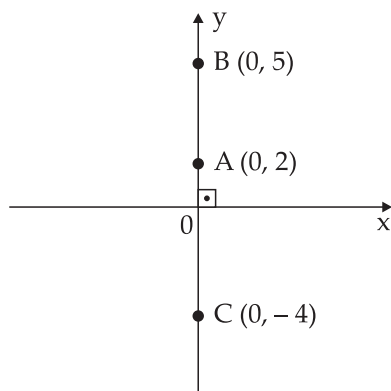
P₃) Se um ponto tem ordenada positiva, ele pertence ao 1º ou ao 2º quadrante do plano cartesiano ou ao eixo y .



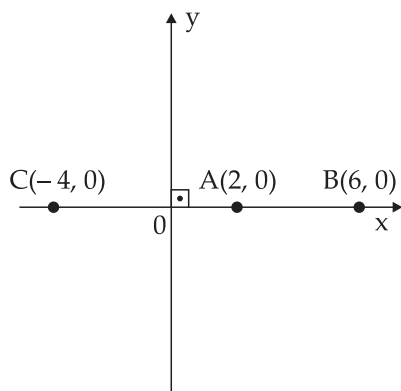
P₄) Se um ponto tem ordenada negativa, ele pertence ao 3º ou ao 4º quadrante do plano cartesiano ou ao eixo y.



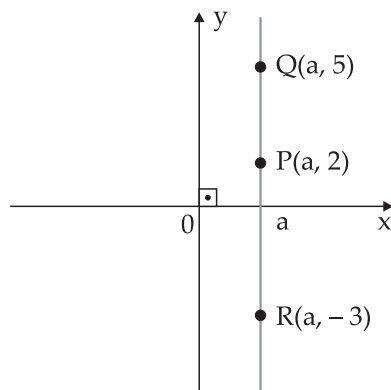
P₅) Se um ponto tem abscissa nula, ele pertence ao eixo y.



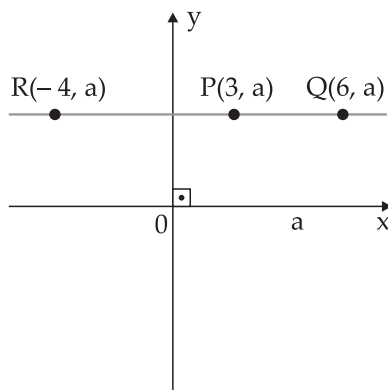
P₆) Se um ponto tem ordenada nula, ele pertence ao eixo x.



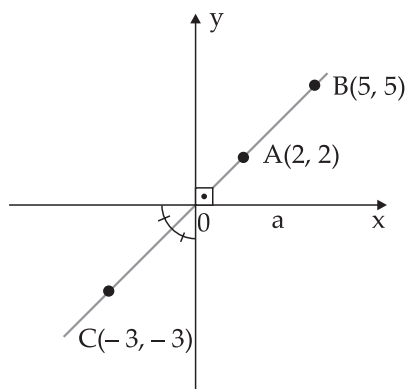
P₇) Se um ponto tem abscissa a , ele pertence à reta paralela ao eixo, traçada pela abscissa a .



P₈) Se um ponto tem ordenada a , ele pertence à reta paralela ao eixo x, traçada pela ordenada a .

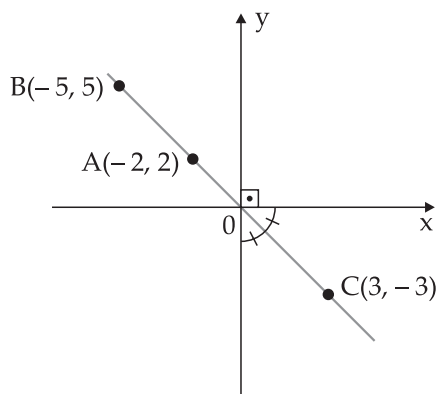


P₉) Se um ponto tem coordenadas iguais, ele pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

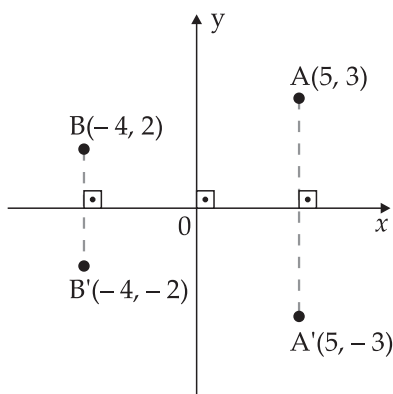




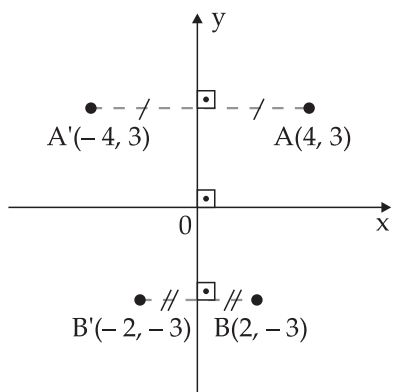
P₁₀) Se um ponto tem coordenadas opostas, ele pertence à bissetriz dos quadrantes pares.



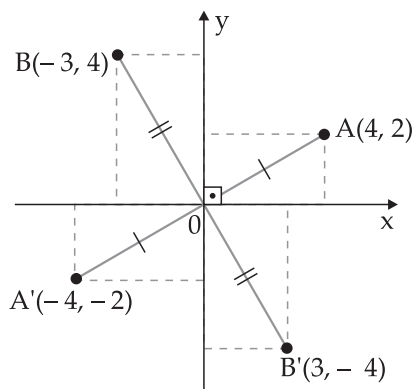
P₁₁) Dois pontos simétricos em relação ao eixo x têm a mesma abscissa e ordenadas opostas.



P₁₂) Dois pontos simétricos em relação ao eixo y têm a mesma ordenada e abscissas opostas.

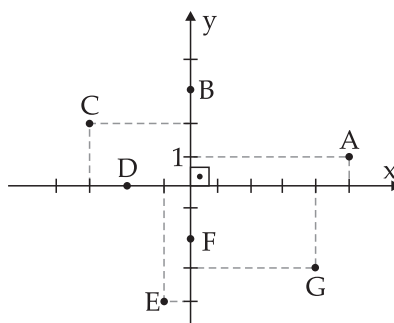


P₁₃) Dois pontos simétricos em relação à origem têm abscissas opostas e ordenadas opostas.



Exercícios Resolvidos

01. Dar as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E, F e G da figura abaixo:



Resposta

A(5, 1); B(0, 3); C(-3, 2); D(-2, 0); E(-1, 4); F(0, -2); G(4, -3).

02. Seja o ponto $A(3p - 1, p - 3)$ um ponto pertencente à bissetriz dos quadrantes ímpares, então a ordenada do ponto A é:

- a) 0 d) $-\frac{8}{3}$
 b) -1 e) -4
 c) -2

Resolução

Como A pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares $X_A = Y_A \Rightarrow 3p - 1 = p - 3 \Rightarrow p = -1$

Logo, o ponto $A(-4, -4)$ tem ordenada igual a -4.

Resposta: E

03. O ponto $A(p - 2, 2p - 3)$ pertence ao eixo das ordenadas. Obter o ponto B' simétrico de $B(3p - 1, p - 5)$ em relação ao eixo das abscissas.

Resolução

Se A pertence ao eixo das ordenadas, temos que $p - 2 = 0 \Rightarrow p = 2$, logo, $B(5, -3)$.

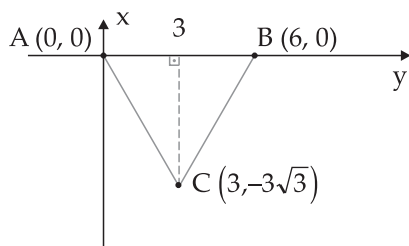
Como B' é o simétrico de B em relação ao eixo das abscissas, temos a mesma abscissa e a ordenada oposta, logo, $B'(5, 3)$ é o ponto procurado.

Resposta: $B'(5, 3)$

04. Um triângulo equilátero de lado 6 tem um vértice na origem do sistema cartesiano e outro vértice no eixo das abscissas. Determine as coordenadas do 3º vértice, sabendo que ele está no 4º quadrante (faça a figura).

Resolução

Lembrando que a altura do triângulo equilátero mede $l \frac{\sqrt{3}}{2}$, temos: $h = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

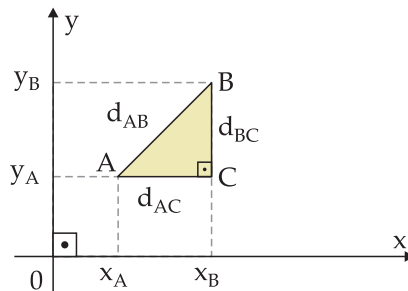


Resposta: $C(3, -3\sqrt{3})$

5. Distância entre Dois Pontos

Consideremos dois pontos A e B tais que $\overline{AB}$ não seja paralela ao eixo x, nem ao eixo y.

Traçando por A e B paralelas aos eixos coordenados, obtemos o triângulo retângulo ABC.



$d_{AC} = |x_B - x_A|$ e $d_{BC} = |y_B - y_A|$, então, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned} d_{AB}^2 &= d_{AC}^2 + d_{BC}^2 \\ d_{AB}^2 &= (|x_B - x_A|)^2 + (|y_B - y_A|)^2 \\ d_{AB}^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \end{aligned}$$

Podemos observar que:

$$\begin{aligned} (x_B - x_A)^2 &= (x_A - x_B)^2 = (\Delta x)^2 \text{ e} \\ (y_B - y_A)^2 &= (y_A - y_B)^2 = (\Delta y)^2 \end{aligned}$$

Assim:

$$d_{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Importante

É fácil verificar que a fórmula para cálculo da distância entre dois pontos A e B continua válida quando $\overline{AB}$ for paralelo a um dos eixos cartesianos, ou mesmo quando A e B coincidem, caso em que $d_{AB} = 0$.

Exemplos de Aplicação

01. Achar o ponto P do eixo das abscissas que dista $2\sqrt{5}$ do ponto $A(3, 4)$.



Resolução

$P \in$ eixo das abscissas $\Rightarrow P(x, 0)$

$P(x, 0)$ dista $2\sqrt{5}$ de $A(3, 4) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (2\sqrt{5})^2 = (x-3)^2 + (0-4)^2$$

Assim:

$$20 = x^2 - 6x + 9 + 16$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 5$$

Resposta: $P_1(1, 0)$ e $P_2(5, 0)$

02. Achar o ponto eqüidistante de $A(0, 2)$ e $B(4, -3)$ cuja ordenada é o dobro da abscissa.

Resolução

$$y_P = 2x_P \Rightarrow P(x, 2x)$$

P eqüidista de $A(0, 2)$ e $B(4, -3) \Rightarrow d_{PA} = d_{PB}$

ou seja: $(x-0)^2 + (2x-2)^2 = (x-4)^2 + (2x+3)^2$

$$x^2 + 4x^2 - 8x + 4 =$$

$$x^2 - 8x + 16 + 4x^2 + 12x + 9$$

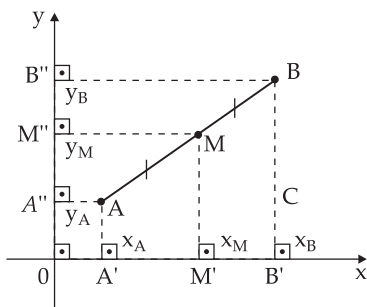
$$-21 = 12x \Rightarrow x = -\frac{7}{4}$$

$$\text{Assim, } x_P = -\frac{7}{4} \text{ e } y_P = 2x = -\frac{7}{2}$$

Resposta: $\left(-\frac{7}{4}, -\frac{7}{2}\right)$

6. Ponto Médio de um Segmento

Consideremos num plano cartesiano dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ extremidades do segmento $\overline{AB}$ cujo ponto médio é $M(x_M, y_M)$.



$$AM = MB \Rightarrow A'M' = M'B'$$

ou seja $x_M - x_A = x_B - x_M$

$$2x_M = x_A + x_B \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Analogamente temos:

$$AM = MB \Rightarrow A''M'' = M''B''$$

ou seja, $y_M - y_A = y_B - y_M$

$$2y_M = y_A + y_B \Rightarrow y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Exemplo de aplicação

Determine o ponto médio do segmento AB onde $A(1, 7)$ e $B(3, -5)$. O ponto médio do segmento com extremidades $A(1, 7)$ e $B(3, -5)$ é o ponto $M(x_M, y_M)$, onde:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{7-5}{2} = 1$$

Assim:

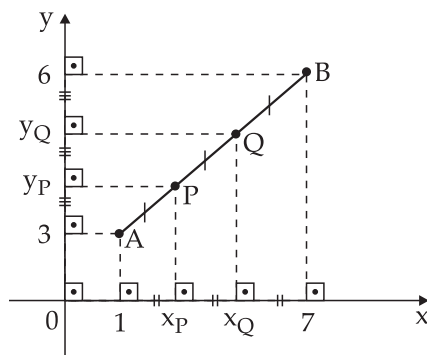
$$M = (2, 1).$$

Observação: Podemos, também, utilizar o teorema de Tales para determinarmos pontos que dividem o segmento $\overline{AB}$ em razões diferentes da razão obtida com o ponto médio.

Exemplos de Aplicação

01. Dados os pontos $A(1, 3)$ e $B(7, 6)$, obter os pontos que dividem $\overline{AB}$ em três partes iguais.

Resolução



As abscissas de A, P, Q e B formam uma P.A. de razão

$$r_x = \frac{x_B - x_A}{3} = \frac{7-1}{3} = 2$$

As ordenadas de A, P, Q e B formam uma P.A. de razão:

$$r_y = \frac{y_B - y_A}{3} = \frac{6-3}{3} = 1; \text{ assim;}$$

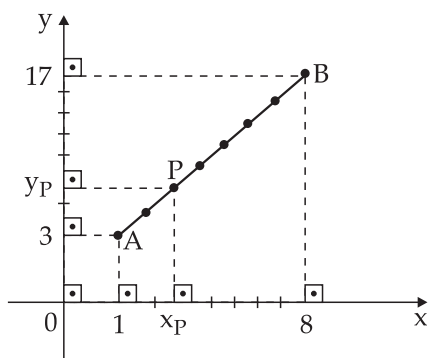
$$\begin{cases} x_P = x_A + r_x = 1 + 2 = 3 \\ x_Q = x_A + 2r_x = 1 + 2 \cdot 2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_P = y_A + r_y = 3 + 1 = 4 \\ y_Q = y_A + 2r_y = 3 + 2 \cdot 1 = 5 \end{cases}$$

Resposta: P(3, 4) e Q(5, 5)

02. Obter o ponto P interno ao segmento $\overline{AB}$ que divide esse segmento na razão $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{5}$, com A(1, 3) e B(8, 17).

Resolução



Dividindo $\overline{AB}$ em 7 partes iguais, o ponto P é o segundo ponto divisor a partir de A. Dessa forma, nas progressões formadas pelas abscissas e pelas ordenadas dos pontos divisores, temos:

$$x_P = x_A + 2 \cdot \frac{(x_B - x_A)}{7}$$

$$x_P = 1 + 2 \cdot \frac{(8-1)}{7} = 1 + 2 = 3$$

$$y_P = y_A + 2 \cdot \frac{(y_B - y_A)}{7}$$

$$y_P = 3 + 2 \cdot \frac{(17-3)}{7} = 3 + 4 = 7$$

Resposta: P(3, 5)

7. Como Obter um Ponto em GA

Encontrar um ponto P nos problemas de Geometria Analítica é descobrir as coordenadas x_P e y_P do ponto. Dessa forma, temos nesses problemas duas incógnitas, que, para serem descobertas, necessitam de duas equações. Assim, é preciso que tenhamos no início duas informações sobre o ponto.

Para facilitar a montagem das equações em tais problemas, temos, a seguir alguns exemplos de informações com as respectivas interpretações algébricas.

1º) O ponto P pertence ao eixo das abscissas.

Interpretação: P tem coordenadas (x, 0).

2º) O ponto P pertence ao eixo das ordenadas.

Interpretação: P tem coordenadas (0, y).

3º) O ponto P pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Interpretação: P tem coordenadas (x, x).

4º) O ponto P pertence à bissetriz dos quadrantes pares.

Interpretação: P tem coordenadas (x, -x).

5º) O ponto P dista 5 unidades de A (1, 2).

Interpretação: Consideramos P (x,y) e fazemos:

$$5^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$$



6º) O ponto P é equidistante de A (1, 2) e B (3, 5).

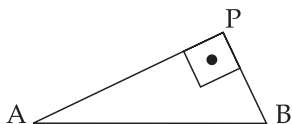
Interpretação: Consideramos P (x, y) e fazemos:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$

7º) O ponto P enxerga o segmento de extremidades A (1, 2) e B (3, 5) sob ângulo reto.

Interpretação: Consideramos P (x, y) e no triângulo retângulo APB (reto em P) aplicamos o teorema de Pitágoras:

$$(3-1)^2 + (5-2)^2 = [(x-1)^2 + (y-2)^2] + [(x-3)^2 + (y-5)^2]$$



Exercícios Resolvidos

01. (FASP) A distância entre os pontos (2, -1) e (-1, 3) é igual a:

- a) zero
- b) $\sqrt{5}$
- c) $\sqrt{7}$
- d) 5
- e) n.d.a

Resolução

$$\Delta x = 2 - (-1) = 3 \text{ e } \Delta y = -1 - 3 = -4$$

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2}$$

$$d = 5$$

Resposta: D

02. (PUC-SP) Sendo A (3, 1), B (4, -4) e C (-2, 2) os vértices de um triângulo, então esse triângulo é:

- a) retângulo e não isósceles.
- b) retângulo e isósceles.
- c) equilátero.
- d) isósceles e não retângulo.
- e) escaleno.

Resolução

$$d_{AB} = \sqrt{(3-4)^2 + (1+4)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(3+2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(4+2)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$$

$$d_{BC} > d_{AB} = d_{AC} \text{ e}$$

$$d_{BC}^2 \neq d_{AB}^2 + d_{AC}^2$$

Portanto, o ΔABC é isósceles e não é retângulo.

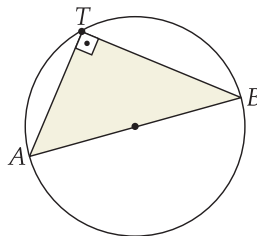
Resposta: D

03. Achar o ponto T da bissetriz dos quadrantes ímpares que enxerga o segmento de extremidades A(2, 1) e B(5, 2) sob ângulo reto.

Resolução

$T \in \text{bissetriz dos quadrantes ímpares} \Rightarrow T(x, x)$

Se T enxerga $\overline{AB}$ sob ângulo reto, então o triângulo ATB é retângulo em T.



$$\Rightarrow d_{TA}^2 + d_{TB}^2 = d_{AB}^2$$

Assim:

$$[(x-2)^2 + (x-1)^2] + [(x-5)^2 + (x-2)^2] = [(2-5)^2 + (1-2)^2]$$

$$x^2 - 4x + 4 + x^2 - 2x + 1 + x^2 - 10x + 25 + x^2 - 4x + 4 = 9 + 1$$

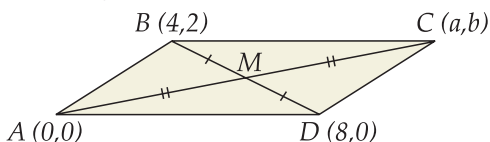
$$4x^2 - 20x + 24 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3$$

Resposta: $T_1(2, 2)$ e $T_2(3, 3)$

04. O paralelogramo ABCD tem lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Sendo A(0, 0), B(4, 2) e D(8, 0), determine as coordenadas do ponto C.

Resolução



M é ponto de encontro das diagonais, portanto ponto médio dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Dados B e D, temos $M(6, 1)$ e agora temos A e M, logo:

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_C + x_A}{2} \Rightarrow 6 = \frac{a+0}{2} \\ y_M &= \frac{y_C + y_B}{2} \Rightarrow 1 = \frac{b+0}{2} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a=12 \\ b=2 \end{cases}, \text{ por-}$$

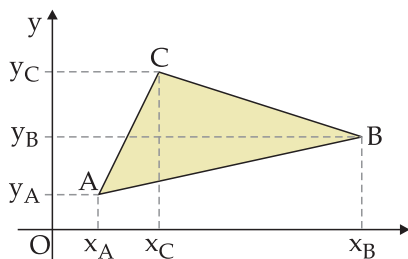
tanto, $C(12, 2)$.

Resposta: C (12, 2)

8. Área de Polígonos

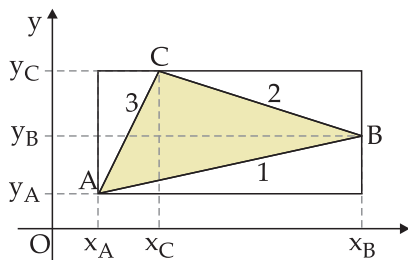
8.1. Área de um Triângulo

Calcule a área do triângulo ABC da figura:



Resolução

Para calcular a área do triângulo vamos cercá-lo por um retângulo, conforme a figura.



A área do triângulo ABC pode ser obtida subtraindo-se as áreas dos triângulos 1, 2 e 3 da área do retângulo, ou seja,

$$S_{\Delta ABC} = S_{\text{ret}} - S_{\Delta_1} - S_{\Delta_2} - S_{\Delta_3}. \quad (\text{I})$$

Calculando essas áreas obteremos:

$$\begin{aligned} S_{\text{ret}} &= (x_B - x_A) \cdot (y_C - y_A) = \\ &= x_B \cdot y_C - x_B y_A - x_A y_C + x_A y_A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} (x_B - x_A) \cdot (y_B - y_A) = \\ &= \frac{1}{2} (x_B y_B - x_B y_A - x_A y_B + x_A y_A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} (x_B - x_C) \cdot (y_C - y_B) = \\ &= \frac{1}{2} (x_B y_C - x_B y_B - x_C y_C + x_C y_B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{1}{2} (x_C - x_A) \cdot (y_C - y_A) = \\ &= \frac{1}{2} (x_C y_C - x_C y_A - x_A y_C + x_A y_A) \end{aligned}$$

Substituindo os valores calculados na equação I, encontraremos:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_B y_C + x_A y_B + x_C y_A - \\ -x_B y_A - x_A y_C - x_C y_B \end{pmatrix} \quad (\text{II})$$

Calcule agora o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Resolução

Aplicando a regra de Sarrus temos:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A$$

Comparando II e III, concluímos que:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \Delta.$$

Porém, se trocarmos a ordem dos pontos, o valor de Δ pode ser negativo e a área deve ser sempre positiva. Para evitar esse problema basta utilizar o módulo do determinante.



Assim:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|.$$

Pode-se verificar que os resultados obtidos continuam valendo, qualquer que seja a posição do triângulo ABC.

Dessa forma, concluímos que, dados 3 pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, a área do triângulo ABC é

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|, \text{ onde } \Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

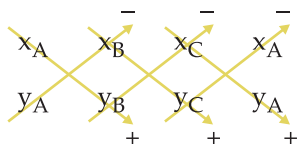
Observações Importantes

- 1) Se $\Delta = 0$, a área do triângulo será zero; isso implica que os pontos são colineares, ou seja,

$$A, B \text{ e } C \text{ alinhados} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(Veja a demonstração completa na leitura complementar.)

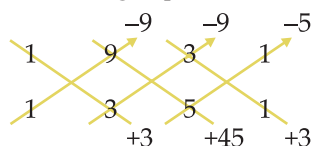
- 2) O valor de Δ pode ser calculado rapidamente com o auxílio de uma regra prática conhecida como regra do agrimensor, conforme o diagrama abaixo:



Exemplo: Sendo $A(1, 1)$, $B(9, 3)$ e $C(8, 5)$, então,

$$S \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} \cdot u$$

Utilizando a regra prática



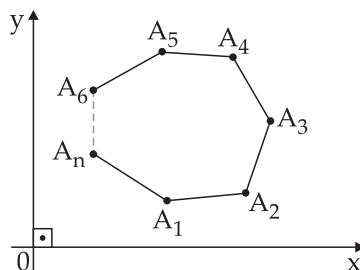
$$\Delta = 3 + 45 + 3 - 9 - 9 - 5 = 28$$

- 3) Demonstra-se que se organizarmos Δ , colocando as coordenadas dos pontos numa sequência do sentido anti-horário, o valor de Δ será não negativo, então a área poderá ser escrita assim:

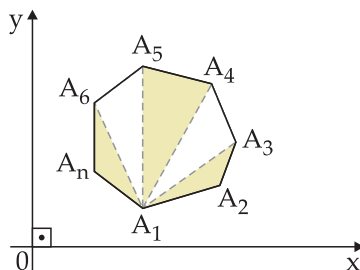
$$S = \frac{\Delta}{2}$$

8.2. Área de um Polígono

Consideremos um polígono convexo $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ com vértices $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n)$, lidos no sentido anti-horário.

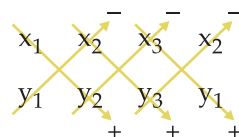


Para calcularmos a área da região limitada pelo polígono, podemos dividi-lo em $(n-2)$ triângulos, conforme a figura.



Assim, a área S será:

$$S = S_{A_1 A_2 A_3} + S_{A_1 A_3 A_4} + S_{A_1 A_4 A_5} + \dots + S_{A_1 A_{n-1} A_n}$$



$$S_{A_1 A_2 A_3} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - \\ -x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_1 y_3 \end{pmatrix}$$

Do mesmo modo:

$$S_{A_1A_3A_4} = \frac{1}{2}(x_1y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_3y_1 - x_4y_3 - x_1y_4)$$

$$S_{A_1A_{n-1}A_n} = \frac{1}{2}(x_1y_{n-1} + x_{n-1}y_n + x_ny_1 - x_{n-1}y_1 - x_ny_{n-1} - x_1y_n)$$

Tomando as igualdades e efetuando a adição membro a membro, temos:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} S_{A_1A_2A_3} &= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3) \\ S_{A_1A_3A_4} &= \frac{1}{2}(x_1y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_3y_1 - x_4y_3 - x_1y_4) \\ S_{A_1A_4A_5} &= \frac{1}{2}(x_1y_4 + x_4y_5 + x_5y_1 - x_4y_1 - x_5y_4 - x_1y_5) \\ S_{A_1A_nA_{n-1}} &= \frac{1}{2}(x_1y_{n-1} + x_{n-1}y_n + x_ny_1 - x_{n-1}y_1 - x_ny_{n-1} - x_1y_n) \end{aligned} \right. \\ & \hline S &= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + \dots + x_{n-1}y_n + x_ny_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3 - \dots - x_1y_n) \end{aligned}$$

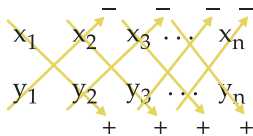
Fazendo:

$$x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_ny_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - \dots - x_1y_n = \Delta p$$

temos:

$$S = \frac{\Delta p}{2}$$

O valor de Δp pode ser obtido a partir da regra prática, colocando-se as coordenadas em seqüência anti-horária:



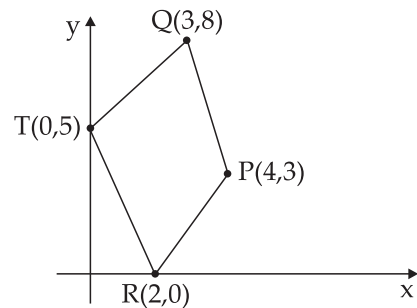
$$S = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_{n-1}y_n - x_2y_1 - x_3y_2 - \dots - x_1y_n)$$

Exemplo

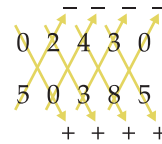
Achar a área do quadrilátero de vértices T(0, 5), Q(3, 8), R(2, 0) e P(4, 3).

Resolução

Devemos, inicialmente, representar o quadrilátero no plano cartesiano, para obtermos a seqüência anti-horária.



Assim, a seqüência anti-horária pode ser: T, R, P e Q.



Logo:

$$S = \frac{1}{2}(0 + 6 + 32 + 15 - 10 - 0 - 9 - 0)$$

$$S = \frac{1}{2}(34), \text{ ou seja, } S = 17$$

Observação: Podemos dispor os pontos em uma seqüência horária, e considerar o resultado em módulo.

9. Lugares Geométricos

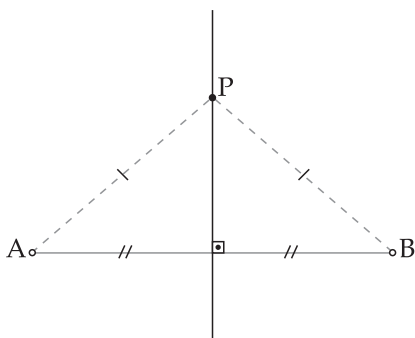
9.1. Definição

Dizemos que um conjunto de pontos é um lugar geométrico (l.g.) quando todos os seus pontos, e apenas eles, têm uma certa propriedade comum.

Exemplos

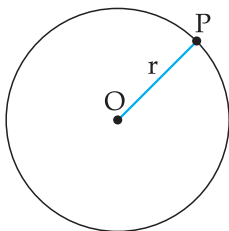
1º) Sendo A e B dois pontos distintos de um plano α , a **mediatriz** de $\overline{AB}$ é o lugar geométrico dos pontos de α equidistantes de A e B, pois:

- todos os pontos da mediatriz são equidistantes de A e B.
- entre todos os pontos de α , somente os pontos da mediatriz estão à mesma distância de A e B.



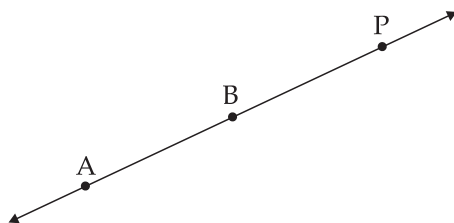
2º) Sendo O um ponto de um plano α e $r \neq 0$ uma distância dada, a **circunferência** de centro O e raio r do plano α é o lugar geométrico dos pontos de α , que distam r de O, pois:

- todos os pontos da circunferência distam r de O.
- entre todos os pontos de α , somente os pontos da circunferência estão a uma distância r de O.



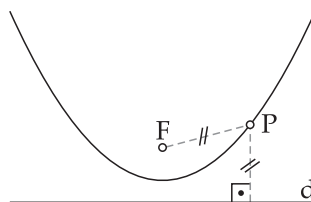
3º) Sendo A e B dois pontos distintos de um plano α , a **reta** determinada por A e B é o lugar geométrico dos pontos de α alinhados com A e B, pois:

- todo ponto da reta $\overleftrightarrow{AB}$ está alinhado com A e B.
- entre todos os pontos de α , somente os pontos da reta $\overleftrightarrow{AB}$ estão alinhados com A e B.



4º) Sendo F um ponto não pertencente a uma reta d , ambos pertencentes a um plano α , a **parábola** de foco F e diretriz na reta d é o lugar geométrico dos pontos de α equidistantes de F e d , pois:

- todo ponto da parábola está à mesma distância de F e d .
- entre todos os pontos de α , somente os pontos da parábola são equidistantes de F e d .



9.2. Equação de um Lugar Geométrico

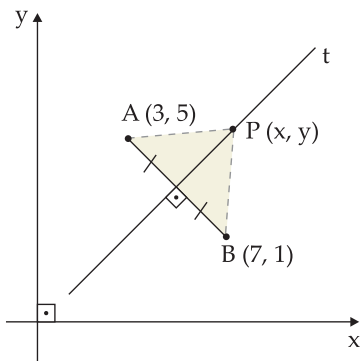
A equação de um l.g. do plano cartesiano é uma equação nas incógnitas x e y cujas soluções são os pares (x, y) dos pontos do l.g.

Para obtermos uma equação de um lugar geométrico, consideramos um ponto $P(x, y)$ genérico e aplicamos ao ponto P a propriedade característica do l.g., isto é, a propriedade exclusiva de todos os pontos do lugar geométrico.



Exemplos

1º) Dados os pontos A (3, 5) e B (7, 1), obter a equação da reta t , mediatriz de $\overline{AB}$.



$$P \in t \Leftrightarrow d_{PA} = d_{PB}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} &= \\ &= \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2} \end{aligned}$$

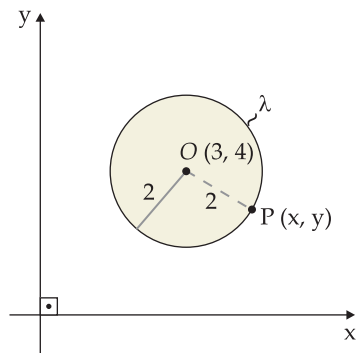
$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 &= \\ &= x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 \end{aligned}$$

Assim, a equação de t é:

$$8x - 8y - 16 = 0$$

$$\text{ou } (t) \ x - y - 2 = 0$$

2º) Dado o ponto O (3, 4), achar a equação da circunferência λ de centro O e raio $r = 2$.



$$P \in \lambda \Leftrightarrow d_{PO} = 2$$

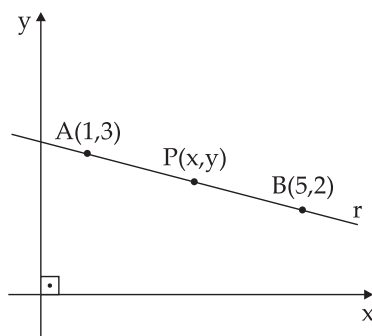
$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = 2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 4$$

Assim, a equação de λ é:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$$

3º) Dados os pontos A(1, 3) e B(5, 2), obter a equação da reta r determinada por A e B.



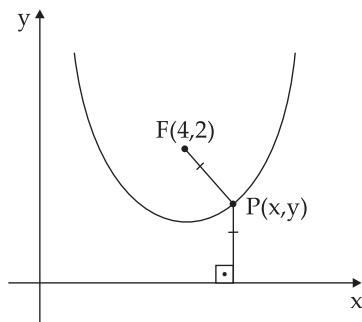
$$P \in r \Leftrightarrow \Delta = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Assim, a equação de r é:

$$x + 4y - 13 = 0$$

4º) Dado o ponto F (4, 2), obter a equação da parábola p com foco em F e diretriz no eixo x.



$$P \in p \Leftrightarrow d_{PF} = d_{P, \text{eixo } x}$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = |y|$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = y^2$$

Assim, a equação de p é:

$$x^2 - 8x - 4y + 20 = 0$$

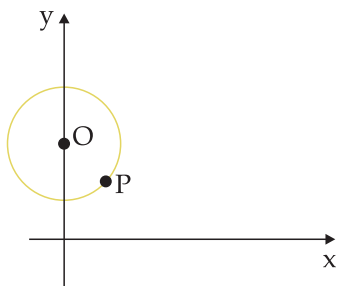
9.3. Pontos de um LG

Dado um lugar geométrico, para saber se um ponto pertence ou não a ele, basta verificar se suas coordenadas constituem uma solução da equação do l.g.

Exemplo

Verificar se o ponto $A(\sqrt{2}, 4)$ pertence à circunferência de centro $O(0, 3)$ e raio $\sqrt{3}$.

Resolução



$$P \in \text{circunf.} \Leftrightarrow d_{po} = \sqrt{3}$$

$$(x-0)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{3})^2$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 6 = 0$$

Substituindo $(\sqrt{2}, 4)$ na equação, temos:

$$\begin{aligned} (\sqrt{2})^2 + 4^2 - 6 \cdot 4 + 6 &= \\ = 2 + 16 - 24 + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Assim, $(\sqrt{2}, 4)$ é solução da equação, e, portanto, A pertence à circunferência dada.

Importante: Se sabemos que um ponto pertence a dois lugares geométricos do plano cartesiano de equações conhecidas, para obtermos esse ponto devemos resolver o sistema

determinado por suas equações, e a solução será o par ordenado das coordenadas do ponto.

Exemplos de Aplicação

Obter o ponto de intersecção das retas

$$(r) - 2x + y - 4 = 0 \text{ e}$$

$$(s) 3x + 4y - 24 = 0$$

Resolução

Para obter o ponto P , intersecção de r e s , basta resolver o sistema formado por suas equações:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2x + y - 4 = 0 & (x-4) \\ 3x + 4y - 24 = 0 \end{cases} \\ + \begin{cases} 8x - 4y + 16 = 0 \\ 3x + 4y - 24 = 0 \end{cases} \\ \hline 11x \quad \quad -8 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } x = \frac{8}{11}$$

Substituindo na equação de (r) , temos:

$$-2 \cdot \frac{8}{11} + y - 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{60}{11}$$

$$\text{Então, } P = \left(\frac{8}{11}, \frac{60}{11} \right)$$

Exercícios Resolvidos

01. Obter a equação do lugar geométrico dos pontos do plano que representam:

- o eixo das abscissas;
- o eixo das ordenadas;
- a bissetriz dos quadrantes ímpares;
- a bissetriz dos quadrantes pares.

Resolução

a) Todos os pontos do eixo $\vec{Ox}$ têm $y = 0$;
assim: $y = 0$

b) Todos os pontos do eixo $\vec{Oy}$ têm $x = 0$;
assim: $x = 0$

c) Todos os pontos das bissetrizes dos quadrantes ímpares têm coordenadas iguais, logo: $y = x$.

d) Todos os pontos das bissetrizes dos quadrantes pares têm coordenadas opostas, logo: $y = -x$.

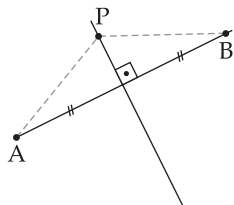


02. A equação da mediatriz do segmento

$\overline{AB}$, dados $A(2, 1)$ e $B(8, 7)$ é:

- a) $y = x - 1$ d) $y = -x - 9$
 b) $y = x + 1$ e) $y = x + 9$
 c) $y = -x + 9$

Resolução



Tomar um ponto $P(x, y)$

Propriedade: $d_{PA} = d_{PB}$

Equação:

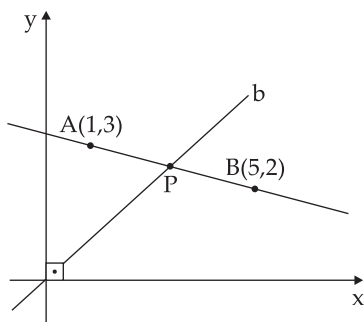
$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-8)^2 + (y-7)^2}$$

Desenvolvendo: $y = -x + 9$

Resposta: C

03. Dados os pontos $A(1, 3)$ e $B(5, 2)$, obter o ponto onde a reta $\overleftrightarrow{AB}$ intercepta a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Resolução



1º) equação da bissetriz dos quadrantes ímpares

$$x = y$$

2º) equação da reta $\overleftrightarrow{AB}$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 4y - 13 = 0$$

3º) ponto P

$$\begin{cases} x = y & (I) \\ x + 4y - 13 = 0 & (II) \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$x + 4x - 13 = 0 \Rightarrow x = \frac{13}{5}$$

$$\text{Assim, } P = \left(\frac{13}{5}, \frac{13}{5} \right)$$

$$\text{Resposta: } \left(\frac{13}{5}, \frac{13}{5} \right)$$

Obs. – Uma solução mais rápida seria lembrar que as coordenadas de P são iguais: $P(x, x)$ e que A , B e P são colineares.

04. A parábola de equação $y = x^2 - 5x + 4$ e a reta de equação $x - y - 4 = 0$ têm quantos pontos em comum?

Resolução

Para obter a intersecção de 2 l.g, basta resolver o sistema formado por suas equações, logo:

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 4 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x^2 - 5x + 4 \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 4 = x - 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 8 = 0$$

$x = 2$ ou $x = 4$, substituindo na equação da reta ou da parábola, obtemos $y = -2$ ou $y = 0$

Resposta

Dois pontos: $P_1(2, -2)$ e $P_2(4, 0)$

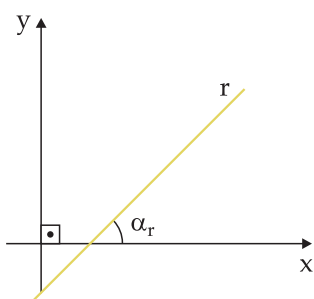
Capítulo 02. Estudo da Reta

1. Teoria Angular

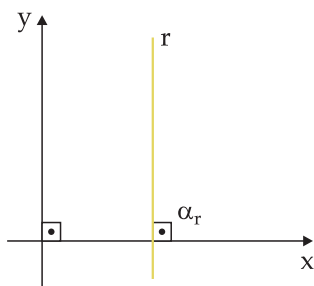
1.1. Inclinação de uma Reta

Dado um plano cartesiano e uma reta r concorrente com o eixo x , chamamos de **inclinação** de r a medida α do ângulo que r forma com o eixo x , ângulo esse medido a partir do eixo x até a reta r no sentido anti-horário.

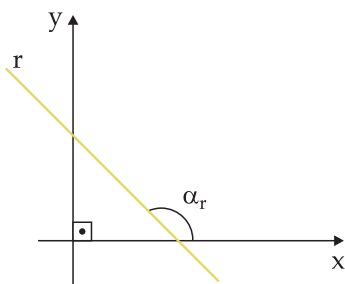
Então:



$$0^\circ < \alpha_r < 90^\circ$$



$$\alpha_r = 90^\circ$$

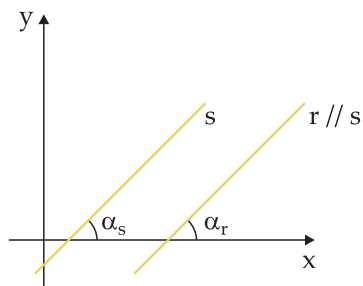


$$90^\circ < \alpha_r < 180^\circ$$

No caso em que r é paralela ao eixo x , a inclinação de r é definida como 0° .

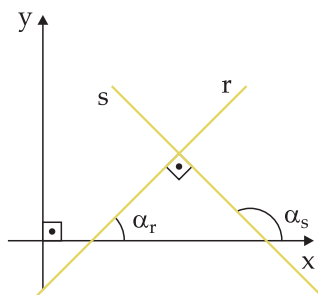
Propriedades importantes

P₁) Se duas retas de um plano cartesiano são paralelas, suas inclinações são iguais.



$$r // s \Leftrightarrow \alpha_r = \alpha_s$$

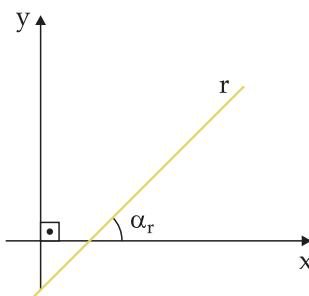
P₂) Se duas retas são perpendiculares, a diferença entre suas inclinações é 90° .



$$r \perp s \Leftrightarrow |\alpha_s - \alpha_r| = 90^\circ$$

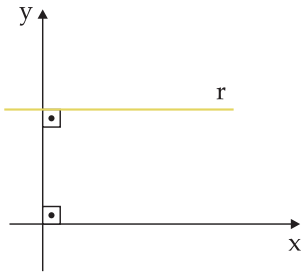
1.2. Coeficiente Angular de uma Reta

Se r é uma reta não paralela ao eixo y , **coeficiente angular** ou **declividade** de r é a tangente da inclinação de r , que indicamos por m_r . Assim:



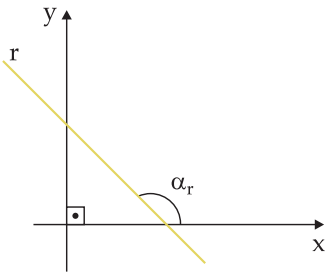
$$m_r = \operatorname{tg} \alpha_r$$

$$0^\circ < \alpha_r < 90^\circ \Leftrightarrow m_r > 0$$



$$m_r = \operatorname{tg} \alpha_r$$

$$\alpha_r = 0^\circ \Leftrightarrow m_r = 0$$



$$m_r = \operatorname{tg} \alpha_r$$

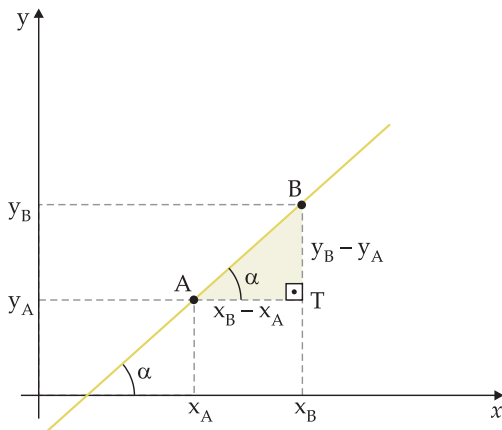
$$90^\circ < \alpha_r < 180^\circ \Leftrightarrow m_r < 0$$

No caso em que r é paralela ao eixo y , o **coeficiente angular de r não é definido**.

1.3. Como Calcular o Coeficiente Angular

Consideremos no plano cartesiano a reta não paralela ao eixo y , determinada por dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ ($x_A \neq x_B$)

1º caso: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

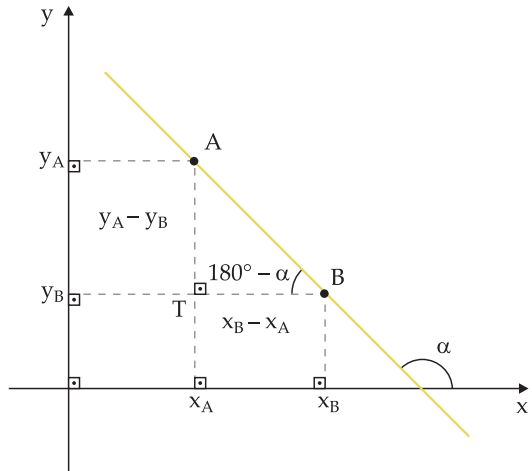


$$m_{AB} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{BT}{TA}$$

Assim:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

2º caso: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$



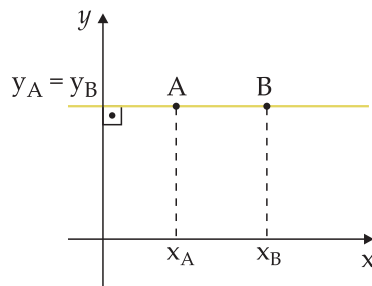
$$m_{AB} = \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$$

$$m_{AB} = -\frac{AT}{TB} = -\frac{y_A - y_B}{x_B - x_A}$$

Assim:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

3º caso: $\alpha = 0^\circ$



$$m_{AB} = 0$$

Como $x_B \neq x_A$ e $y_B = y_A$, podemos escrever:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Conclusão

Em qualquer dos casos, o coeficiente angular da reta é dado pela razão entre a diferença (Δy) das ordenadas e a diferença Δx das abscissas.

Observação – De acordo com o cálculo exposto, $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$; no entanto, podemos multiplicar o antecedente e o conseqüente da razão por -1 e ela não se alterará, e obteremos:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Exemplos

1º) O coeficiente angular da reta que passa por A (1, 5) e B (3, 8) é:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8-5}{3-1} = \frac{3}{2}$$

2º) O coeficiente angular da reta que passa por C (7, 2) e D (6, 2) é:

$$m_{CD} = \frac{2-2}{6-7} = 0$$

3º) O coeficiente angular da reta que passa por E(5, 3) e F (5, 7) não é definido, pois $x_E = x_F$, e a reta $\overleftrightarrow{EF}$ é paralela ao eixo y.

1.4. Condição de Alinhamento para Três Pontos

Conforme vimos nos módulos anteriores, para sabermos se os pontos $A(X_A, Y_A)$, $B(X_B, Y_B)$ e $C(X_C, Y_C)$ estão alinhados, calculamos o determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \\ X_C & Y_C & 1 \end{vmatrix} \text{ e verificamos se o valor}$$

desse determinante é zero. (Caso contrário formam um triângulo cuja área é $A = \frac{1}{2}|\Delta|$).

Agora, porém, podemos verificar se três pontos distintos estão alinhados utilizando o conceito de coeficiente angular.

Observe as figuras:

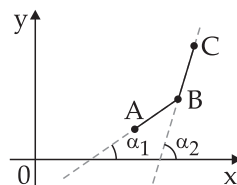


Figura 1

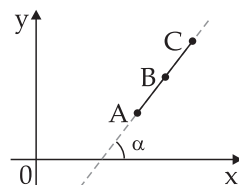


Figura 2

Na figura 1 as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ têm inclinação diferentes ($\alpha_1 \neq \alpha_2$), pois A, B e C não estão alinhados. Assim, $\text{tg } \alpha_1 \neq \text{tg } \alpha_2$, ou seja, $m_{AB} \neq m_{BC}$.

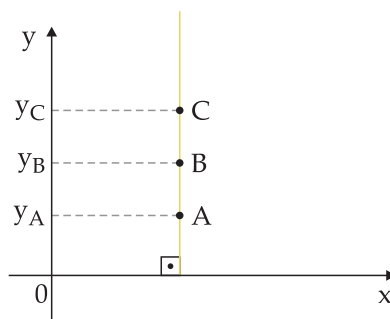
Na figura 2, observamos que A, B e C estão alinhados e, portanto,

$$m_{AB} = m_{BC} = \text{tg } \alpha$$

Podemos afirmar que:

três pontos A, B e C estão alinhados numa reta não vertical quando $m_{AB} = m_{BC}$.

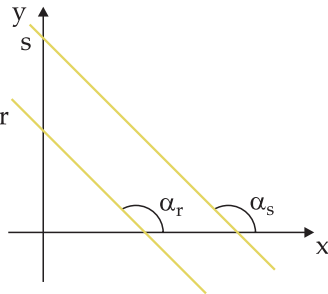
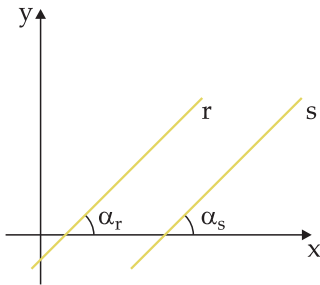
Se A, B e C estiverem em uma reta paralela ao eixo Y não poderemos calcular o coeficiente angular. Todavia, nesse caso será fácil notar que $X_A = X_B = X_C$.



$$X_A = X_B = X_C$$

1.5. Condição de Paralelismo de Retas

Duas retas r e s **não** paralelas ao eixo y são **paralelas** entre si quando tiverem os coeficientes angulares iguais.



$$r // s \Leftrightarrow \alpha_r = \alpha_s$$

$$\text{Assim: } r // s \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha_r = \operatorname{tg} \alpha_s$$

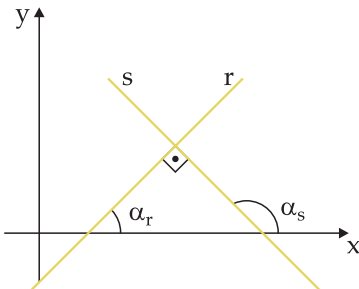
ou seja:

$$r // s \Leftrightarrow m_r = m_s$$

Observação – Se $m_r \neq m_s$, as retas r e s não são paralelas, isto é, são **concorrentes**.

1.6. Condição de Perpendicularismo de Retas

Duas retas r e s **não paralelas ao eixo y** são **perpendiculares** entre si quando tiverem os coeficientes angulares com produto -1 .



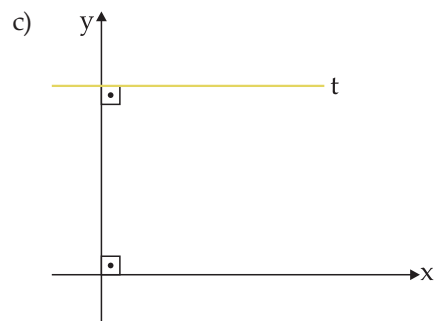
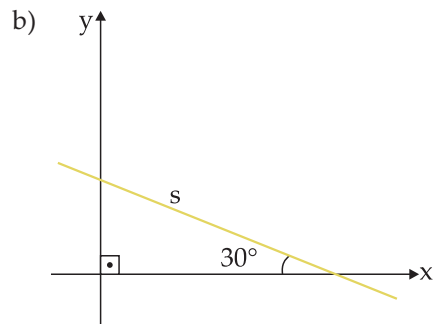
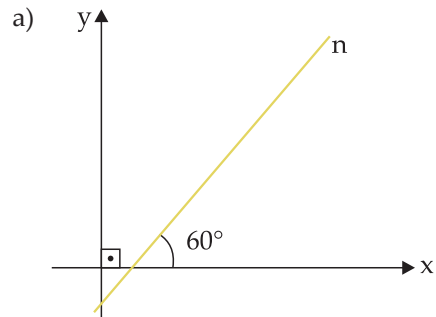
$$r \perp s \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1.$$

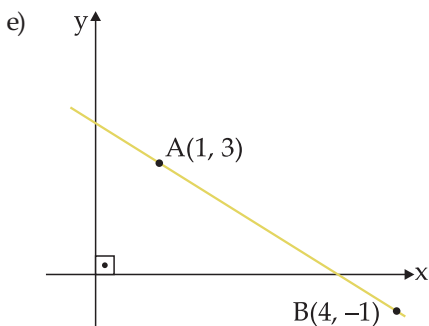
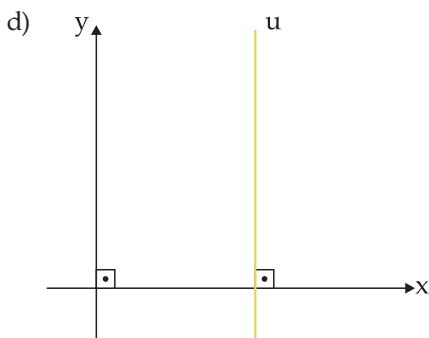
(Essa propriedade será demonstrada quando estudarmos posições relativas de duas retas).

Importante – Se duas retas são perpendiculares, e nenhuma delas é paralela ao eixo y , o coeficiente angular de uma delas é o **oposto do inverso** do coeficiente angular da outra.

Exercícios Resolvidos

01. Determine o coeficiente angular de cada reta abaixo.





Resolução

a) $m_r = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$

b) $m_s = \operatorname{tg} 120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (lembre-se de que a inclinação deve ser medida no sentido anti-horário)

c) $m_t = \operatorname{tg} 0^\circ = 0$

d) $m_u = \operatorname{tg} 90^\circ \Rightarrow \nexists m_u$

e) $m_{AB} = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-3}{4-1} = -\frac{4}{3}$

02. Obter a para que os pontos A, B e C sejam colineares:

a) A(1, 3), B(2, 5) e C(4, a)

b) A(4, -3), B(4, 0) e C(a, 7)

Resolução

a) $m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{5-3}{2-1} = \frac{a-5}{4-2}$

$\frac{2}{1} = \frac{a-5}{2} \Rightarrow 4 = a-5 \Rightarrow a = 9$

b) $X_A = X_B = 4 \Rightarrow A$ e B estão na mesma verti-

cal. Então, para que estejam alinhados devemos ter

$X_C = X_A = X_B \Rightarrow a = 4$

03. (PUC-SP) Os pontos A(k, 0), B(1, -2) e C(3, 2) são vértices de um triângulo. Então, necessariamente:

a) $k = -1$

b) $k = -2$

c) $k = 2$

d) $k \neq 2$

e) $k \neq 2$

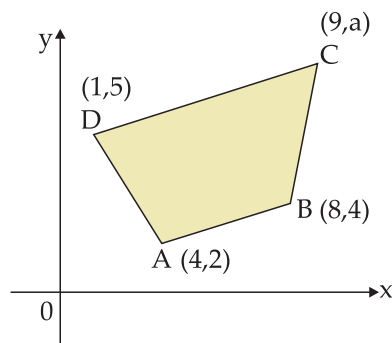
Resolução

Para termos um triângulo, os pontos A, B e C não são colineares, ou seja, $m_{AB} \neq m_{BC}$.

$\frac{0+2}{k-1} \neq \frac{-2-2}{1-3} \Rightarrow k \neq 2$

Resposta: E

04. No quadrilátero ABCD da figura, os lados AB e CD são paralelos. Determine o valor de a.



Resolução

$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \Rightarrow m_{AB} = m_{CD} \Rightarrow$

$\frac{4-2}{8-4} = \frac{a-5}{9-1}$

$\frac{2}{4} = \frac{a-5}{8} \Rightarrow 4 = a-5 \Rightarrow a = 9$

05. ABCD é um losango com A(1, 5) e C(4, -2). Determine o coeficiente angular da reta suporte da diagonal BD.



Resolução

Num losango as diagonais são perpendiculares.

Então:

$$\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD} \Rightarrow m_{AC} \cdot m_{BD} = -1$$

$$m_{AC} = \frac{-2-5}{4-1} = -\frac{7}{3} \therefore$$

$$-\frac{7}{3} \cdot m_{BD} = -1 \Rightarrow m_{BD} = \frac{3}{7}$$

2. Equação Fundamental de uma Reta

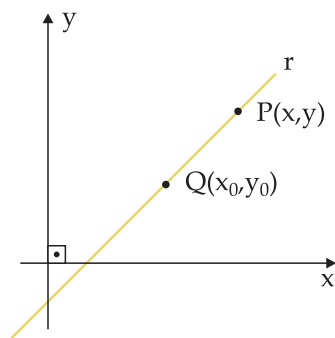
Vamos determinar a equação de uma reta conhecendo um dos seus pontos e a sua direção.

Existem dois casos que devemos considerar:

• 1º caso

A reta tem coeficiente angular.

Seja r uma reta do plano cartesiano que passa pelo ponto $Q(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular m . Para determinarmos a equação desta reta, consideramos um ponto $P(x, y)$ e fazemos com que ele tenha a propriedade característica de r . Assim:



$$P(x, y) \in r \Leftrightarrow m_{PQ} = m_r$$

Então: $\frac{y-y_0}{x-x_0} = m$

ou $y - y_0 = m(x - x_0)$

Essa equação obtida é chamada **equação fundamental** de r .

Exemplo

Obter uma equação da reta que passa pelo ponto $A(3, 2)$ e tem coeficiente angular -2 .

Resolução

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 2 = -2(x - 3) \Rightarrow y - 2 = -2x + 6$$

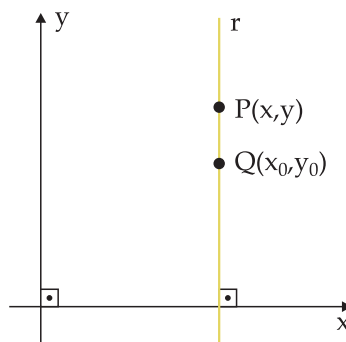
Assim, uma equação de r é:

$$2x + y - 8 = 0$$

• 2º caso

A reta não tem coeficiente angular.

Seja r uma reta do plano cartesiano que passa pelo ponto $Q(x_0, y_0)$ e tem inclinação 90° . Para determinarmos a equação desta reta, consideramos um ponto $P(x, y)$ e fazemos com que ele tenha a propriedade característica de r . Assim:



$$P(x, y) \in r \Leftrightarrow x_P = x_Q$$

Então: $x = x_0$

Essa equação obtida é a equação de r .

Exemplo

Obter uma equação da reta que passa pelo ponto $A(3, 2)$ e é paralela ao eixo y .

Resolução

$x = x_0$, isto é, $x = 3$ é a equação da reta.

Exercícios Resolvidos

01. (UFES) A equação da reta que passa pelo ponto $(3, -2)$, com inclinação de 60° , é:

- a) $\sqrt{3}x - y - 2 - 3\sqrt{3} = 0$
- b) $\sqrt{3}x - 3y - 6 - 3\sqrt{3} = 0$
- c) $\sqrt{3}x + y + 3 - 2\sqrt{3} = 0$
- d) $\sqrt{3}x - y - 2 + 2\sqrt{3} = 0$
- e) $\sqrt{3}x - y - 5\sqrt{3} = 0$

Resolução

$$m = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\text{Logo, } y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y + 2 = \sqrt{3}(x - 3) \Rightarrow y + 2 = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}x - y - 2 - 3\sqrt{3} = 0$$

Resposta: A

02. Dar a equação da reta que passa pelos pontos A $(2, 5)$ e B $(3, 4)$.

Resolução

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{5 - 4}{2 - 3} = -1$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

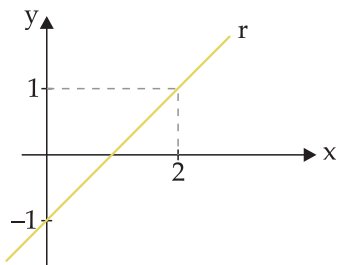
$$y - 5 = -1(x - 2)$$

$$y - 5 = -x + 2$$

Resposta: $x + y - 7 = 0$

Observação – Utilizamos as coordenadas do ponto A para obtermos a equação da reta, mas o resultado seria o mesmo se utilizássemos as coordenadas do ponto B.

03. Qual é a equação da reta r da figura abaixo?



- a) $y = x + 1$
- b) $x + y - 1 = 0$
- c) $x + y + 1 = 0$
- d) $y = x - 1$
- e) $y = -x + 1$

Resolução

A reta r passa pelos pontos A $(2, 1)$ e B $(0, -1)$.

Assim:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1 - 1}{0 - 2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 2) \Rightarrow y - 1 = x - 2$$

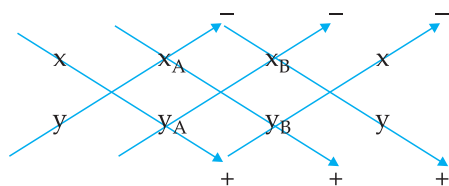
$$y = x - 1$$

Resposta: D

3. Equação Geral da Reta

Toda reta do plano cartesiano tem equação que pode ser escrita na forma: $ax + by + c = 0$, em que a , b e c são conhecidos e $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Essa forma de equação é denominada **equação geral** da reta.

De fato, supondo que A (x_A, y_A) e B (x_B, y_B) são dois pontos distintos de uma reta r qualquer, uma equação de r é:



$$xy_A + x_A y_B + x_B y - x_A y - x_B y_A - xy_B = 0$$

$$(y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + (x_A y_B - x_B y_A) = 0$$

Fazendo $y_A - y_B = a$, $x_B - x_A = b$ e

$$x_A y_B - x_B y_A = c, \text{ temos:}$$

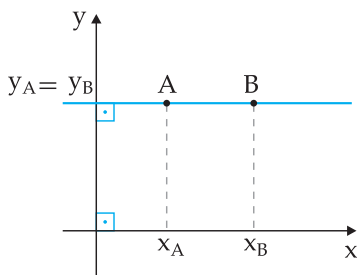
$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

onde não podemos ter simultaneamente $a = 0$ e $b = 0$, pois, neste caso, $y_A = y_B$ e $x_B = x_A$ e teríamos A e B coincidentes; logo $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

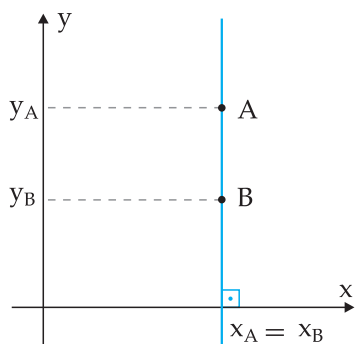


Observações

- 1ª) Se $a = 0$, temos que $y_A = y_B$ e a reta é paralela ao eixo x .



- 2ª) Se $b = 0$, temos que $x_A = x_B$ e a reta é paralela ao eixo y .



- 3ª) Se $c = 0$, a reta passa pela origem, pois $(0, 0)$ é uma solução de $ax + by = 0$.

4. Equação Reduzida da Reta

Consideremos uma reta r no plano cartesiano que corta o eixo y no ponto $Q(0, q)$ e tem coeficiente angular m . A equação de r é dada por:

$$y - q = m(x - 0) \Rightarrow y = mx + q$$

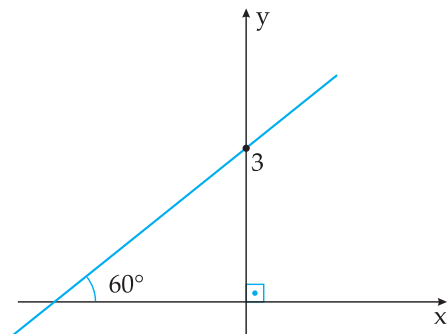
Esta forma de apresentar a equação de r é chamada de **forma reduzida**, e seus coeficientes são:

m = coeficiente angular de r

q = coeficiente linear de r

Exemplos

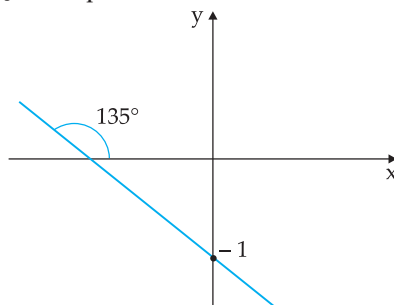
- 1ª) A equação reduzida da reta com inclinação 60° e que corta o eixo y no ponto $Q(0, 3)$ é:



$$m = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \text{ e } q = 3$$

$$y = \sqrt{3}x + 3$$

- 2ª) A reta com equação reduzida $y = -x - 1$ tem $m = -1$ e $q = -1$, então a sua representação no plano cartesiano é:



Observações

- 1ª) A equação reduzida de uma reta fornece diretamente o coeficiente angular (m) e a ordenada (q) do ponto onde a reta intercepta o eixo y . Dessa forma, a reta (r) $ax + bx + c = 0$

tem equação reduzida $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, desde que $b \neq 0$, e seus coeficientes são:

$$-\frac{a}{b} = m = \text{coeficiente angular}$$

$$-\frac{c}{b} = q = \text{coeficiente linear}$$

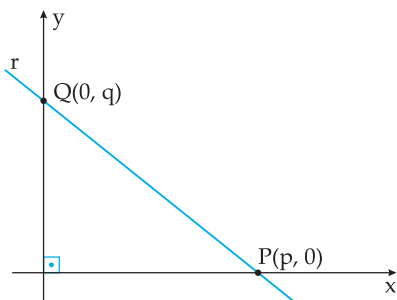
Exemplo

A reta da equação $2x - 3y + 6 = 0$ tem forma reduzida $y = \frac{2}{3}x + 2$ com $m = \frac{2}{3}$ e $q = 2$.

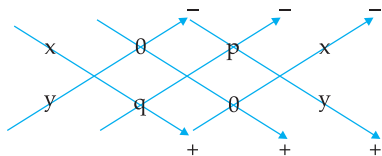
- 2ª) As retas de inclinação 90° (paralelas ao eixo y), não têm equação na forma reduzida.

5. Equação Segmentária da Reta

Consideremos uma reta r que intercepta os eixos cartesianos nos pontos $P(p, 0)$ e $Q(0, q)$, com $p \cdot q \neq 0$:



A equação de r será:



$$qx + py - pq = 0 \Rightarrow qx + py = pq$$

Dividindo os dois membros por pq , temos:

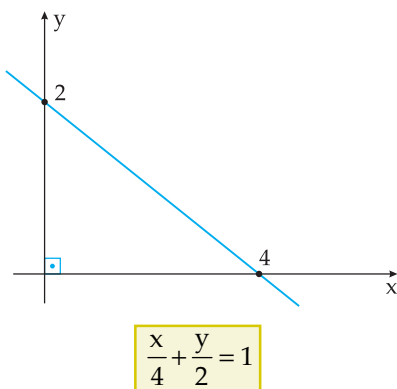
$$\frac{qx}{pq} + \frac{py}{pq} = \frac{pq}{pq} \Rightarrow \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Dizemos que esta equação é a **equação segmentária** da reta r .

Observação – Os denominadores de x e y , na equação segmentária, são, respectivamente, a abscissa do ponto onde r intercepta o eixo x e a ordenada do ponto onde r intercepta o eixo y .

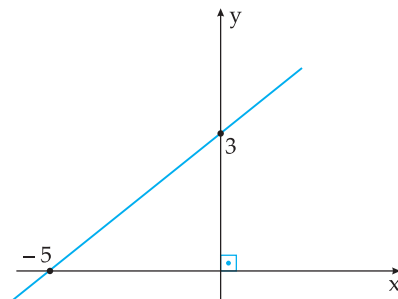
Exemplos

1º) A equação segmentária da reta r da figura é:



$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$$

2º) A equação segmentária da reta s da figura é:



$$\frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1$$

6. Equações Paramétricas da Reta

Consideremos uma reta r não paralela a algum dos eixos cartesianos, que passa pelos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

O coeficiente angular de r é:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

A equação fundamental de r é:

$$y - y_A = \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \right) (x - x_A)$$

$$\text{Ou então: } \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

Igualando os dois membros da equação a um número real t , temos:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = t \Rightarrow x = x_A + t(x_B - x_A)$$

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = t \Rightarrow y = y_A + t(y_B - y_A)$$

Então, para cada valor $t \in \mathbb{R}$, obtemos um ponto da reta.

Chamamos de **forma paramétrica** ou de **equações paramétricas da reta** as equações:

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases}$$

Um ponto da reta

t é chamado **parâmetro** das equações.

Exemplo

As equações paramétricas da reta que passa pelos pontos A (5, 2) e B (7, 1) podem ser:

$$x = x_A + t(x_B - x_A) = 5 + t(7 - 5) = 2t + 5$$

$$y = y_A + t(y_B - y_A) = 2 + t(1 - 2) = -t + 2$$

Isto é: $\begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = -t + 2 \end{cases}$

Observação – É fácil percebermos que, para cada par de pontos que tomarmos em r , teremos equações diferentes.

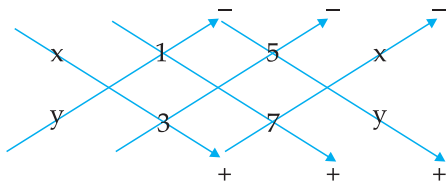
Exercícios Resolvidos

01. Dados os pontos A (1, 3) e B (5, 7), considere a reta r determinada por A e B. Obtenha o que se pede:

- o ponto C de r com abscissa 2.
- o ponto D de r com ordenada -1.
- o ponto E de r que está na bissetriz dos quadrantes ímpares.

Resolução

Equação de r :



$$3x + 7 + 5y - y - 15 - 7x = 0 \Rightarrow -4x + 4y - 8 = 0 \quad (\div -4)$$

Assim: $(r) \ x - y + 2 = 0$

a) $C(2, y_C) \in r$, então:

$$2 - y_C + 2 = 0 \Rightarrow y_C = 4 \quad \therefore C(2, 4)$$

b) $D(x_D, -1) \in r$, então:

$$x_D - (-1) + 2 = 0 \Rightarrow x_D = -3$$

$$\therefore D(-3, -1)$$

c) $E(x_E, x_E) \in r$, então:

$$x_E - x_E + 2 = 0 \Rightarrow \nexists E \in r$$

Resposta: a) C (2, 4)

b) D (-3, -1)

c) $\nexists E \in r$

02. Obtenha os pontos onde a reta de equação geral $(r) \ 3x + y - 6 = 0$ intercepta os eixos coordenados.

Resolução

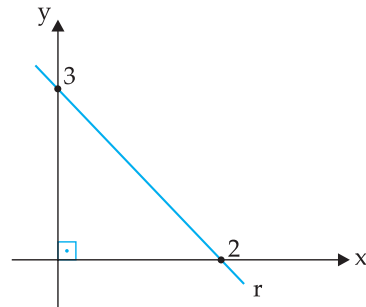
Seja $P(x_P, 0)$ e $Q(0, y_Q)$ os pontos procurados, temos:

$$3x_P + 0 - 6 = 0 \Rightarrow x_P = 2 \quad \therefore P(2, 0)$$

$$3 \cdot 0 + y_Q - 6 = 0 \Rightarrow y_Q = 6 \quad \therefore Q(0, 6)$$

Resposta: P (2, 0) e Q (0, 6)

03. Obtenha a equação reduzida da reta r da figura:



Resolução

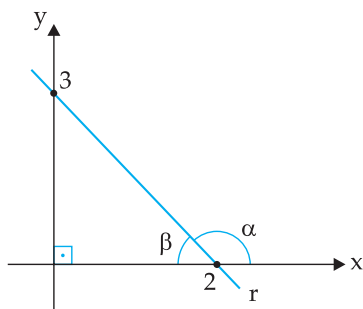
1º modo

Conhecemos dois pontos de r (2, 0) e (0, 3), então:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 0}{0 - 2} = -\frac{3}{2}$$

Como $q = 3$, a equação é: $y = -\frac{3}{2}x + 3$

2º modo



$$m = \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta$$

$$\text{Como } \operatorname{tg} \beta = \frac{3}{2}, m = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Assim: } y = -\frac{3}{2}x + 3$$

3º modo

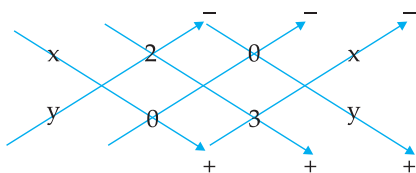
A equação segmentária de r é:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow 3x + 2y = 6 \Rightarrow 2y = -3x + 6$$

$$\text{Assim: } y = -\frac{3}{2}x + 3$$

4º modo

Temos dois pontos (2, 0) e (0, 3) de r, então:



$$6 - 2y - 3x = 0 \Rightarrow -3x + 6 = 2y$$

$$\therefore y = -\frac{3}{2}x + 3$$

$$\text{Assim: } y = -\frac{3}{2}x + 3$$

04. Obtenha a equação reduzida da reta que passa pelo ponto Q (0, -3) e é paralela à reta (r) $3x - y + 7 = 0$.

Resolução

$$(r) 3x - y + 7 = 0 \Rightarrow y = 3x + 7$$

$$\therefore m_r = 3$$

Como $t \parallel r$, $m_t = m_r = 3$.

Logo, a equação reduzida de t é: $y = 3x - 3$

Resposta: $y = 3x - 3$

05. Obtenha uma equação da reta t que passa pelo ponto P (1,2) e é perpendicular à reta (r) $x - 3y + 2 = 0$.

Resolução

$$(r) x - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \Rightarrow m_r = \frac{1}{3}$$

$$\text{Como } t \perp r, m_t = -\frac{1}{m_r} = -3$$

A equação fundamental de t é:

$$y - 2 = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 5$$

Resposta: $y = -3x + 5$

06. Determine a equação segmentária da reta cuja equação geral é $5x + 6y - 30 = 0$.

Resolução

1º modo

Vamos determinar os pontos onde a reta intercepta os eixos:

$$\bullet \text{ para } x = 0: 5 \cdot 0 + 6y - 30 = 0 \Rightarrow y = 5$$

$$\bullet \text{ para } y = 0: 5x + 6 \cdot 0 - 30 = 0 \Rightarrow x = 6$$

Assim, a reta intercepta os eixos nos pontos Q (0, 5) e P (6, 0).

$$\text{Logo, a equação segmentária é: } \frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 1$$

2º modo

$$5x + 6y - 30 = 0 \Rightarrow 5x + 6y = 30 \Rightarrow (\text{dividindo os dois membros por 30})$$

$$\Rightarrow \frac{5x}{30} + \frac{6y}{30} = \frac{30}{30}$$

$$\text{Assim, a equação é } \frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 1.$$

Resposta: $\frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 1$

07. Dada a reta r de equação $x + 2y - 4 = 0$, obter um par de equações paramétricas de r.

Resolução

Vamos obter dois pontos quaisquer de r:



- para $x = 2$: $2 + 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = 1$
- para $x = 0$: $0 + 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2$

Assim $A(2, 1)$ e $B(0, 2)$ pertencem a r , e a equação reduzida por:

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) = 2 + t(0 - 2) = 2 - 2t \\ y = y_A + t(y_B - y_A) = 1 + t(2 - 1) = 1 + t \end{cases}$$

Resposta: $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$

08. Obter a equação geral da reta com equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 3t + 2 \end{cases}$$

Resolução

$x = t - 1 \Rightarrow t = x + 1$. Substituindo na outra equação, temos: $y = 3(x + 1) + 2 \Rightarrow y = 3x + 5$.

Então, a equação geral é: $3x - y + 5 = 0$

Resposta: $3x - y + 5 = 0$

09. No plano Oxy, um ponto $P(x, y)$ em movimento tem a sua posição em cada instante dada pelas equações:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}_+$$

em que t é o tempo em segundos, e as distâncias, medidas em cm.

- Mostrar graficamente a trajetória do ponto.
- Qual a posição do ponto no início da contagem do tempo? ($t = 0$)
- Qual a posição do ponto quando $t = 1$?
- Depois de quanto tempo (a partir do início) se tem $y = 5$? Qual a posição do ponto nesse instante? A que distância se encontra da posição inicial?

Resolução

a) As equações dadas podem ser escritas assim:

$$\begin{cases} x = 0 + 3t \\ y = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}_+$$

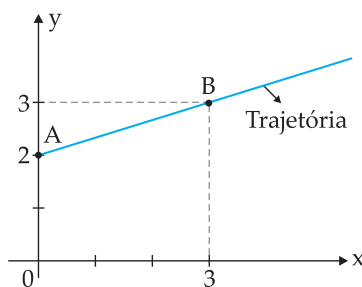
(t é o parâmetro)

A trajetória do ponto é retilínea, pois as equações apresentadas representam uma semi-reta ($t \geq 0$).

O ponto inicial ocorre para $t = 0$, em $A(0, 2)$.

Um outro ponto da trajetória é, por exemplo, $B(3, 3)$, que obtemos fazendo $t = 1$.

Graficamente, temos:



b) Quando $t = 0$, temos:

$x = 0 + 3 \cdot 0 = 0$ e $y = 2 + 0 = 2$; assim, no início o ponto está em $A(0, 2)$.

c) Quando $t = 1$, temos:

$x = 0 + 3 \cdot 1 = 3$ e $y = 2 + 1 = 3$, então, após um segundo o ponto está em $B(3, 3)$.

d) Quando $y = 5$, temos: $5 = 2 + t \Rightarrow t = 3$

Então $y = 5$, após três segundos do início, e $x = 0 + 3 \cdot 3 = 9$

Logo, a posição do ponto nesse instante é $C(9, 5)$.

$$d_{AC} = \sqrt{(9 - 0)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \text{ cm}$$

Então, a distância procurada é $3\sqrt{10}$ cm.

7. Posições Relativas de Duas Retas

Consideremos duas retas do plano cartesiano com equações:

$$(r) a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{e}$$

$$(s) a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Consideremos ainda que $a_1b_1a_2b_2 \neq 0$, isto é, as retas não são paralelas a algum dos eixos cartesianos.

Colocando as equações na forma reduzida, temos:

$$(r) a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$\therefore y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}$$

$$(s) a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$\therefore y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2}$$

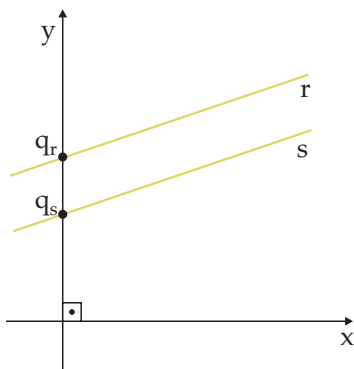
Então, os coeficientes angular e linear das retas são:

$$m_r = -\frac{a_1}{b_1}; m_s = -\frac{a_2}{b_2};$$

$$q_r = -\frac{c_1}{b_1} \quad \text{e} \quad q_s = -\frac{c_2}{b_2}$$

Vamos discutir, com os elementos obtidos, as posições possíveis de r e s no plano cartesiano.

7.1. Retas Paralelas Distintas



Devemos ter: $m_r = m_s$ e $q_r \neq q_s$

Assim,

$$\frac{-a_1}{b_1} = \frac{-a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

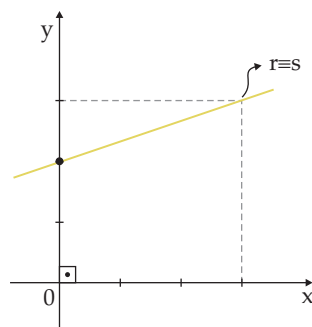
e

$$-\frac{c_1}{b_1} \neq -\frac{c_2}{b_2} \Rightarrow \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Reunindo as duas condições, temos:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

7.2. Retas Paralelas Coincidentes



Devemos ter: $m_r = m_s$ e $q_r = q_s$

Assim,

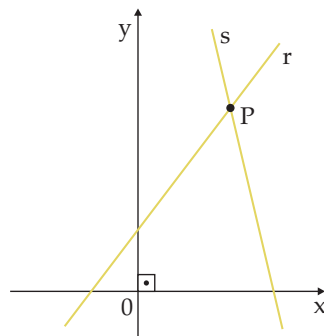
$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{e}$$

$$-\frac{c_1}{b_1} = -\frac{c_2}{b_2} \Rightarrow \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Reunindo as duas condições, temos:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

7.3. Retas Concorrentes





Devemos ter: $m_r \neq m_s$

Assim, $-\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

Observações

1ª) Se alguma das retas for paralela a algum dos eixos coordenados, o problema tornar-se-á imediato.

2ª) Se as retas forem concorrentes num ponto P, para obter esse ponto P basta resolver o sistema formado pelas equações de r e s.

Exemplo

Qual o ponto de intersecção das retas

(r) $2x + y - 5 = 0$ e

(s) $4x - y - 1 = 0$

$$(+)\begin{cases} 2x + \cancel{y} - 5 = 0 \\ 4x - \cancel{y} - 1 = 0 \\ \hline 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Substituindo na equação de r, temos:

$$2 \cdot 1 + y - 5 = 0 \Rightarrow y = 3$$

Assim, as retas r e s se interceptam no ponto (1, 3).

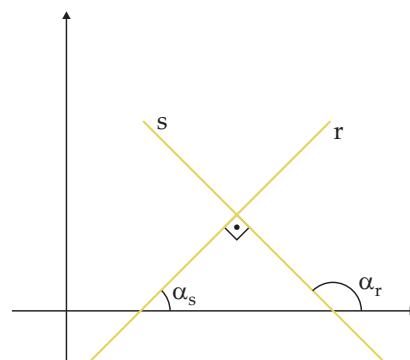
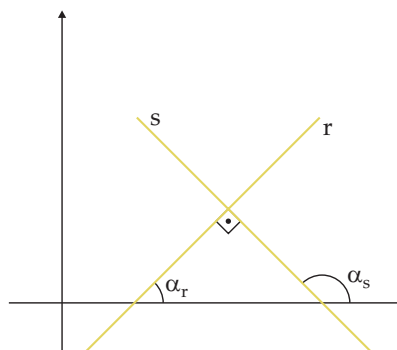
Dentre as retas concorrentes, as perpendiculares são as que mais são solicitadas nas avaliações e nos vestibulares, portanto vamos recordar a condição de perpendicularismo.

8. Condição de Perpendicularismo de Retas: Demonstração

Duas retas r e s não paralelas ao eixo y são perpendiculares entre si quando tiverem os coeficientes angulares com produto -1.

Demonstração

1ª parte: $r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$



$$r \perp s \Rightarrow \alpha_r - \alpha_s = 90^\circ \text{ ou}$$

$$\alpha_s - \alpha_r = 90^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_s = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_r}$$

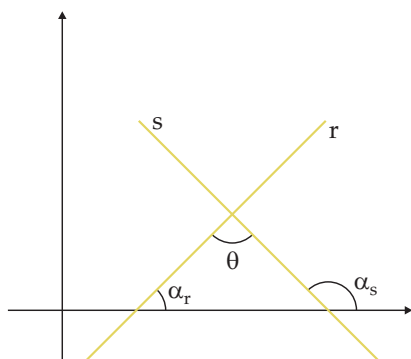
$$\text{Assim, } r \perp s \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m_r}$$

ou seja: $r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$

2ª parte: $m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow r \perp s$

$$a) \quad m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_r = -\frac{1}{m_s}$$

Como $m_r \neq m_s$, as retas r e s são concorrentes. Sendo θ a medida do ângulo formado por r e s e considerando $m_r > 0$ e $m_s < 0$, ou seja, $0^\circ < \alpha_r < 90^\circ$ e $90^\circ < \alpha_s < 180^\circ$



$\alpha_s = \alpha_r + \theta$, ou seja:

$$\alpha_s - \alpha_r = \theta \quad (I)$$

$$b) \ m_r = -\frac{1}{m_s} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_r = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_s}$$

Como $0^\circ < \alpha_r < 90^\circ$ e $90^\circ < \alpha_s < 180^\circ$,

$$\alpha_s - \alpha_r = 90^\circ \quad (II)$$

Comparando (I) e (II), temos que $\theta = 90^\circ$.

Assim, $m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow r \perp s$

Logo, a partir das demonstrações, concluímos:

$$r \perp s \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1$$

Importante: Se duas retas são perpendiculares, e nenhuma delas é paralela ao eixo y , o coeficiente angular de uma delas é o **oposto do inverso** do coeficiente angular da outra.

Exercícios Resolvidos

01. Dar a posição relativa das retas r e s em cada item abaixo:

- a) $(r) \ 4x + 2y - 7 = 0$ e $(s) \ 2x + y + 1 = 0$
 b) $(r) \ 3x - y + 2 = 0$ e $(s) \ -6x + 2y - 4 = 0$

- c) $(r) \ 3x - 2y + 1 = 0$ e $(s) \ x - 2y + 3 = 0$
 d) $(r) \ x - 2 = 0$ e $(s) \ 3x + 2y + 1 = 0$

Resolução

a) $\frac{4}{2} = \frac{2}{1} \neq \frac{-7}{1}$, então r e s são paralelas distintas.

b) $\frac{3}{-6} = \frac{-1}{2} = \frac{2}{-4}$, então r e s são paralelas coincidentes.

c) $\frac{3}{1} \neq \frac{-2}{-2}$, então r e s são concorrentes.

d) r é paralela ao eixo y e s não, então r e s são concorrentes.

Resposta

- a) Paralelas distintas
 b) Paralelas coincidentes
 c) Concorrentes
 d) Concorrentes

02. Discutir, em função de k , a posição relativa das retas:

$(r) \ kx - 2y + 3k = 0$

$(s) \ 3x + y + k + 2 = 0$

Resolução

$(r) \ -2y = -kx - 3k$

$$y = \frac{kx}{2} + \frac{3k}{2} \rightarrow m_r = \frac{k}{2}$$

$(s) \ y = -3x - k - 2 \rightarrow m_s = -3$

$$\frac{k}{2} = -3 \rightarrow k = -6 \quad \begin{cases} (r) \ y = -3x - 9 \\ (s) \ y = -3x + 4 \end{cases}$$

Resposta

Se $k \neq -6$, temos (r) e (s) concorrentes.

Se $k = -6$, temos $m_r = m_s$ e $q_r \neq q_s$, logo, r e s são paralelas distintas.

03. Dada a reta r de equação $4x + 2y + 5 = 0$ e o ponto $P = (2, -1)$, determine:

- a) o coeficiente angular de r ;
 b) a equação da reta s que é perpendicular a r e passa pelo ponto P .

**Resolução**

a) $4x + 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = -2x - \frac{5}{2}$. Logo, o coeficiente angular de r é $m_r = -2$.

b) Temos que r e s são perpendiculares. Assim, o coeficiente angular de s é $\frac{-1}{m_r} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$. Como a reta s passa pelo ponto $P(2; 1)$, uma equação dessa reta é:

$$y - (-1) = \frac{1}{2} \cdot (x - 2) \Leftrightarrow x - 2y - 4 = 0$$

Capítulo 03. Inequações do 1º Grau no Plano Cartesiano

Introdução

Chamamos de inequações do 1º grau as inequações do tipo:

$$ax + by + c > 0$$

onde: $\begin{cases} a, b \text{ e } c \text{ são constantes reais} \\ x \text{ e } y \text{ são variáveis reais} \end{cases}$

Vamos estudar como podemos representar, no plano cartesiano, os pontos $P(x, y)$ que satisfazem as condições expressas por essas desigualdades.

1. Casos Particulares

Analisaremos, inicialmente, exemplos para os casos particulares em que pelo menos uma das constantes reais a e b é nula.

I. $a = 0$ e $b \neq 0$

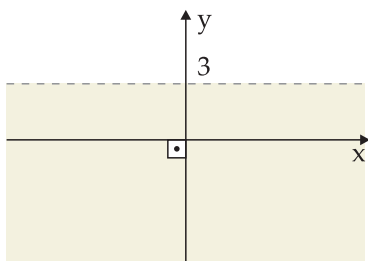
Exemplo

Representar, no plano, os pontos que satisfazem a condição $y - 3 < 0$.

Resolução

$$y - 3 < 0 \rightarrow y < 3$$

Os pontos $P(x, y)$ do plano cartesiano que satisfazem esta condição são aqueles situados “abaixo” da reta $y = 3$, um semiplano aberto.



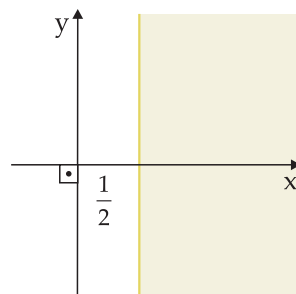
II. $a \neq 0$ e $b = 0$

Exemplo

Representar, no plano, os pontos que satisfazem a condição $2x - 1 \geq 0$.

$$2x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

Os pontos $P(x, y)$ do plano cartesiano que satisfazem esta condição são aqueles situados “à direita” da reta $x = \frac{1}{2}$, reunidos com os pontos dessa mesma reta, um semiplano fechado.

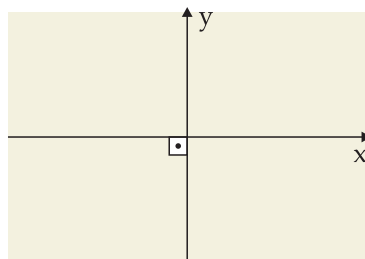


III. $a = 0$ e $b = 0$

Exemplos

1º) Representar no plano os pontos que satisfazem a condição $0x + 0y + 2 > 0$.

A condição é satisfeita por todos os pontos $P(x, y)$ do plano cartesiano.

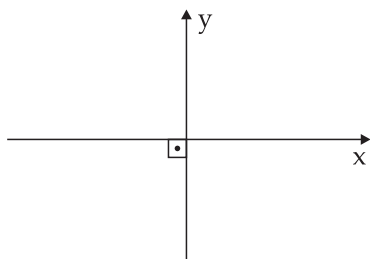




2º) Representar no plano os pontos que satisfazem a condição $0x + 0y - 2 > 0$.

Resolução

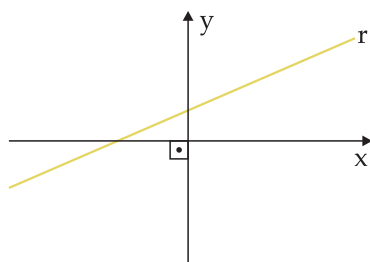
Nenhum ponto do plano cartesiano pode satisfazer esta condição, portanto ela representa um conjunto vazio.



2. Caso Geral

Analisaremos agora os casos em que as constantes reais a e b não são nulas.

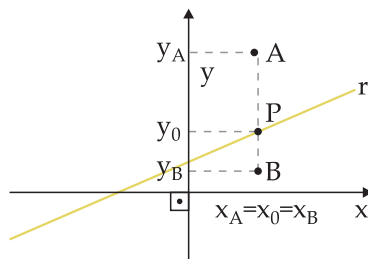
Consideremos então uma reta r do plano cartesiano de equação $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0$ e $b \neq 0$), representada, por exemplo, conforme a figura:



Consideremos também a equação reduzida de r : $y = mx + q$

Seja $P(x_0, y_0)$ um ponto de r , sabemos que $y_0 = mx_0 + q$.

Consideremos agora no plano cartesiano um ponto $A(x_A, y_A)$, situado "acima" de r , e um ponto $B(x_B, y_B)$, situado "abaixo" de r , de modo que $x_A = x_B = x_0$, onde x_0 é a abscissa de um ponto $P(x_0, y_0)$ da reta r .



Analizando o gráfico, podemos observar que:

$$\left. \begin{array}{l} y_0 = mx_0 + q \\ y_A > y_0 \\ x_A = x_0 \end{array} \right\} \rightarrow y_A > mx_A + q$$

$$\left. \begin{array}{l} y_0 = mx_0 + q \\ y_B < y_0 \\ x_B = x_0 \end{array} \right\} \rightarrow y_B < mx_B + q$$

Então podemos tirar as seguintes conclusões:

1º) Para todos os pontos $P(x, y)$ do plano situados "acima" de r vale a relação:

$$y > mx + q$$

2º) Para todos os pontos $P(x, y)$ do plano situados "abaixo" de r vale a relação:

$$y < mx + q$$

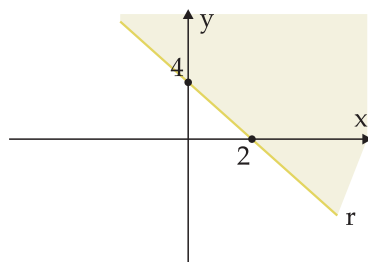
Exemplos

1º) Representar no plano cartesiano os pontos que satisfazem a condição $2x + y - 4 \geq 0$

Resolução

$$2x + y - 4 \geq 0 \rightarrow y \geq -2x + 4$$

Seja r a reta de equação $y = -2x + 4$ (ou $2x + y - 4 = 0$), os pontos que satisfazem a condição $y \geq -2x + 4$ (ou $2x + y - 4 \geq 0$) são os pontos do plano situados "acima" de r , reunidos com os pontos de r , um semiplano fechado.

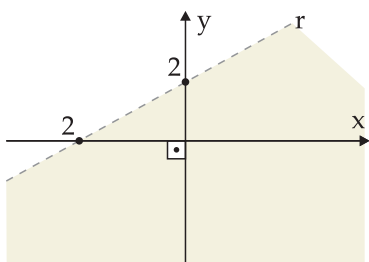


2º) Representar no plano cartesiano os pontos que satisfazem a condição $x - y + 2 > 0$.

Resolução

$$x - y + 2 > 0 \rightarrow -y > -x - 2 \rightarrow y < x + 2$$

Seja r a reta de equação $y = x + 2$ (ou $x - y + 2 = 0$), os pontos que satisfazem a condição $y < x + 2$ (ou $x - y + 2 > 0$) são os pontos do plano situados “abaixo” de r , um semiplano aberto.



Com as discussões feitas e observando os dois exemplos acima, podemos concluir que $ax + by + c = 0$ representa uma reta r do plano, $ax + by + c > 0$ representa um semiplano aberto do plano de origem r , e $ax + by + c < 0$ representa o outro semiplano aberto do plano de origem r .

Para descobriremos se o semiplano positivo ($ax + by + c > 0$) é o que está “acima” ou “abaixo” de r , devemos tomar um ponto do plano (fora de r) e substituir na expressão $ax + by + c$ e verificar se o valor obtido é positivo ou negativo.

Exemplo

Representar, no plano cartesiano, os pontos que satisfazem a condição $2x - y + 4 \geq 0$.

Resolução

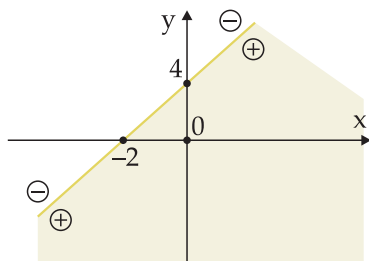
Desenhamos, inicialmente, no plano, a reta r de equação $2x - y + 4 = 0$.

Tomamos um ponto fora de r , por exemplo, a origem $O(0, 0)$, e substituímos na expressão $2x - y + 4$:

$$2 \cdot 0 - 0 + 4 = 4$$

Obtendo o valor 4, que é positivo, assim o semiplano que contém a origem é o positivo, e o outro é o negativo.

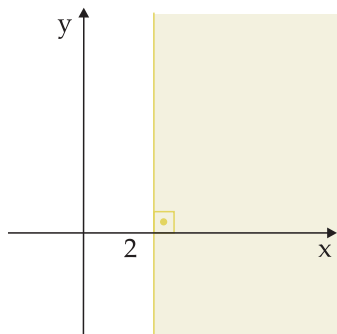
Como na condição fornecida nos interessa o semiplano positivo, temos:



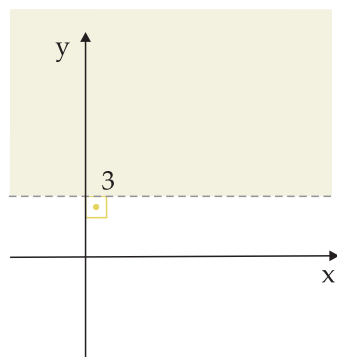
Exercícios Resolvidos

01. Representar, nos planos cartesianos abaixo, os pontos que satisfazem as condições:

a) $3x - 6 \geq 0$

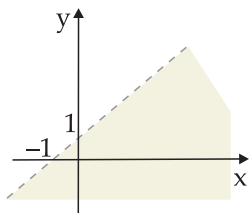


b) $2y - 6 > 0$





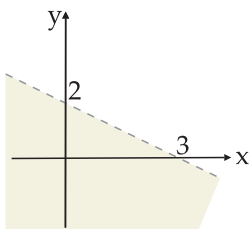
c) $-x + y - 1 < 0$



Resposta: Nos próprios gráficos das perguntas.

02. O semiplano destacado é o conjunto dos pontos (x, y) , tais que:

- a) $3x + y - 2 > 0$
- b) $3x + y + 2 < 0$
- c) $2x + 3y - 6 < 0$
- d) $2x + 3y - 6 > 0$
- e) $2x + 3y - 2 < 0$

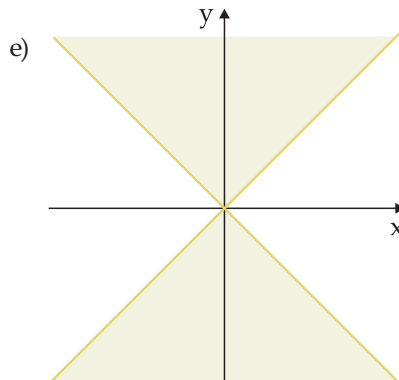
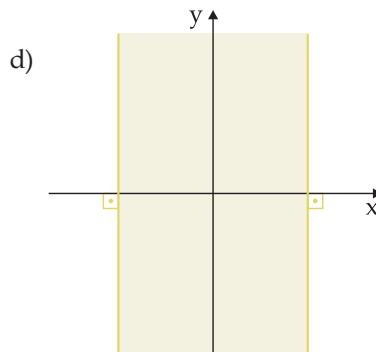
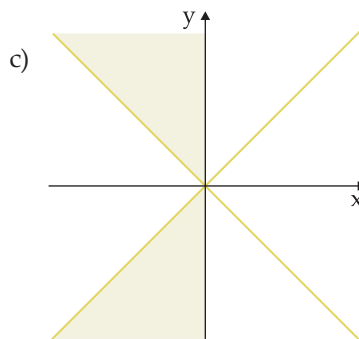
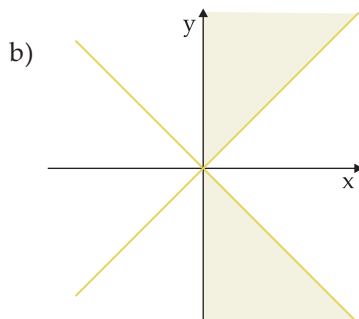
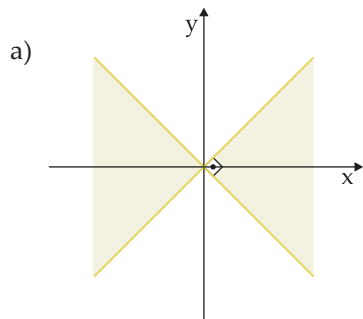


Resolução

Obter a equação da reta (r) $2x + 3y - 6 = 0$; a parte destacada representa $2x + 3y - 6 < 0$.

Resposta: C

03. (PUC-SP) O conjunto dos pontos (x, y) do plano cartesiano que satisfaz a inequação $(x + y) \cdot (x - y) \leq 0$ é a parte destacada de qual das seguintes figuras?



Resolução

A inequação dada pode ter produto zero. Sendo assim, tomaremos $x + y = 0$ ou $x - y = 0$.

Se o produto $(x + y) \cdot (x - y)$ é menor que zero, então os fatores têm “sinais trocados”, ou seja:

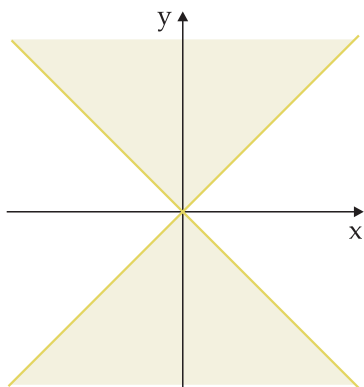
$$\text{Para } (x + y) > 0 \Rightarrow (x - y) < 0$$

$$\text{Para } (x + y) < 0 \Rightarrow (x - y) > 0$$

Teremos, então, dois sistemas de inequações:

(I) $\begin{cases} x + y > 0 \\ x - y < 0 \end{cases}$, (II) $\begin{cases} x + y < 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$, cuja solução é dada pela união de (I) e (II).

Representando graficamente:



Resposta: E

04. Represente os pontos (x, y) , tais que:

$$\frac{x - y - 2}{x + 2y - 2} \geq 0$$

Resolução

Em primeiro lugar, fazemos o estudo do sinal das expressões $N(x, y) = x - y - 2$ e $D(x, y) = x + 2y - 2$ do numerador e denominador da fração fornecida (figuras 1 e 2, respectivamente).

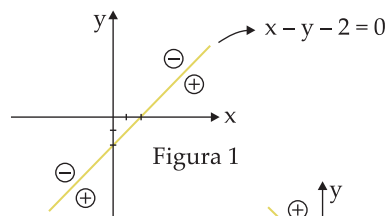


Figura 1

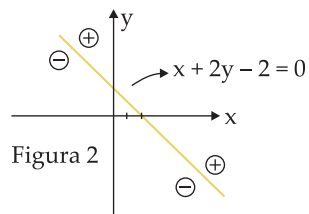
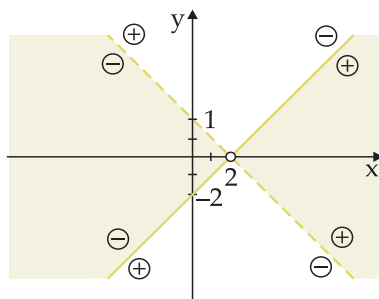


Figura 2

Para que $\frac{N}{D} > 0$, N e D devem ter o mesmo sinal, isto é, ou ambas são positivas ou ambas são negativas. Para que ocorra $\frac{N}{D} = 0$, devemos ter $N = 0$.

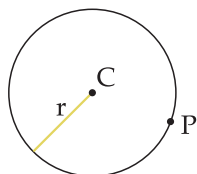
Outro fato que temos que ressaltar é que devemos ter $D \neq 0$. Assim a solução será:





Capítulo 04. Equações da Circunferência

Circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância a um ponto fixo (C) é uma constante positiva r .

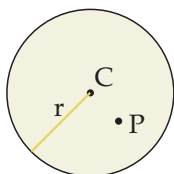


$$P \in \text{circunf.} \Rightarrow PC = r$$

C: centro da circunferência

r: raio da circunferência

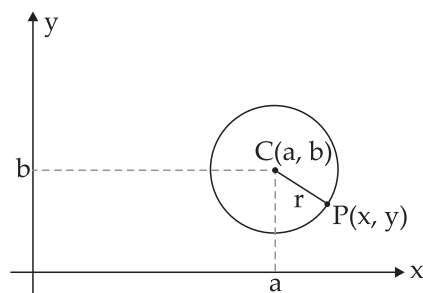
Círculo é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância a um ponto fixo (C) é menor ou igual a uma constante positiva r .



$$P \in \text{círculo} \Rightarrow PC \leq r$$

1. Equação Reduzida

Consideremos uma circunferência de centro C (a, b) e raio r .



Para obtermos a equação da circunferência, tomamos um ponto $P(x, y)$ genérico, pertencente à circunferência, e impomos a condição:

$$d_{PC} = \text{raio}$$

$$\text{Assim: } \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

A equação acima destacada é a equação reduzida da circunferência.

Observações

1ª) Consideremos a equação:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = k$$

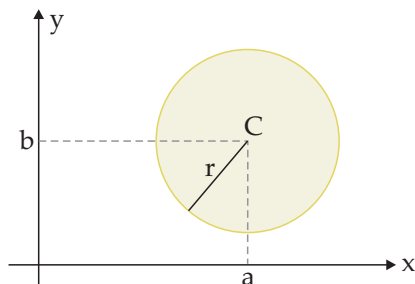
Então temos:

a) Se $k > 0$, a equação $(x-a)^2 + (y-b)^2 = k$ representa uma circunferência de centro (a, b) e raio $\sqrt{k}$.

b) Se $k = 0$, a equação $(x-a)^2 + (y-b)^2 = k$ representa o ponto $P(a, b)$, pois $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0 \rightarrow x = a$ e $y = b$

c) Se $k < 0$, a equação $(x-a)^2 + (y-b)^2 = k$ representa um conjunto vazio, pois a soma dos quadrados de dois números reais nunca pode resultar em um número negativo.

2ª) O gráfico da relação $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2$ é um círculo de centro C (a, b) e raio R, pois é uma relação que é satisfeita pelos pontos P tais que $d_{PC} \leq R$.



Exemplos

1ª) Dar a equação reduzida da circunferência de centro C e raio r:

- a) C (1, 3) e $r = \sqrt{3}$
- b) C (2, -3) e $r = 2$
- c) C (0, 2) e $r = 1$
- d) C (-1, 0) e $r = \frac{1}{2}$

Resolução

a) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{3})^2 \rightarrow$
 $\rightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 3$

b) $(x-2)^2 + (y-(-3))^2 = 2^2 \rightarrow$
 $\rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$

c) $(x-0)^2 + (y-2)^2 = 1^2 \rightarrow x^2 + (y-2)^2 = 1$

d) $(x-(-1))^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow$
 $\rightarrow (x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

2ª) Obter o centro C e o raio r das circunferências com equações:

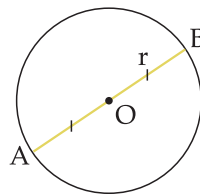
- a) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$
- b) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$
- c) $x^2 + (y-3)^2 = 2$
- d) $x^2 + y^2 = 7$

Resolução

- a) C (2, -1) e $r = 2$
- b) C (-1, -1) e $r = 1$
- c) C (0, 3) e $r = \sqrt{2}$
- d) C (0, 0) e $r = \sqrt{7}$

3ª) Achar a equação da circunferência que tem diâmetro com extremos A (-1, -3) e B (5, 7).

Resolução



O é o ponto médio de $\overline{AB}$

$$x_O = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2$$

$$y_O = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3+7}{2} = 2$$

Assim: O = (2, 2)

$$r = d_{OA} = \sqrt{(2+1)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{34}$$

Então a equação da circunferência é:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 34$$

2. Equação Geral

Consideremos a equação reduzida de uma circunferência de centro C(a, b) e raio r:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Desenvolvendo os quadrados e isolando os termos da equação no primeiro membro, temos:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Fazendo $-2a = d$, $-2b = e$ e $a^2 + b^2 - r^2 = f$, encontramos:

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$$

que denominamos equação geral da circunferência.

Notemos que:

$$-2a = d \rightarrow 2a = -d \rightarrow a = \frac{-d}{2}$$

$$-2b = e \rightarrow 2b = -e \rightarrow b = \frac{-e}{2}$$

$$a^2 + b^2 - r^2 = f \rightarrow r^2 = a^2 + b^2 - f$$

$$\therefore r = \sqrt{a^2 + b^2 - f}$$



Então, as coordenadas (a, b) do centro e o raio r da circunferência são obtidos com as fórmulas:

$$a = \frac{-d}{2}, b = \frac{-e}{2} \text{ e } r = \sqrt{a^2 + b^2 - f}$$

Exemplos

- 1º) Obter uma equação geral da circunferência de centro $C(2, -3)$ e raio $= \sqrt{3}$.

Resolução

A equação reduzida é:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = (\sqrt{3})^2$$

Então:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 3$$

ou seja:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 10 = 0$$

que é uma equação na forma geral.

- 2º) Obter o centro e o raio da circunferência de equação geral:

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y - 2 = 0$$

Resolução

Seja $C(a, b)$ o centro e r a medida do raio, temos:

$$a = \frac{-d}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$b = \frac{-e}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - f} = \sqrt{4^2 + (-3)^2 - (-2)} = \sqrt{16 + 9 + 2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Assim, o centro é $C = (4, -3)$ e o raio é $r = 3\sqrt{3}$.

Observações

- 1ª) Se $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ é a equação de uma circunferência, então $kx^2 + ky^2 + kdx + kdy + kf = 0$, $k \neq 0$, é uma outra equação da mesma circunferência. Para determinarmos o centro e o raio partindo dessa última equação, devemos pri-

meiramente dividi-la por k , para depois aplicarmos as fórmulas.

Exemplo

Obter o centro e o raio da circunferência com equação:

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y - 3 = 0$$

Resolução

Primeiramente, devemos dividir a equação por 2.

Assim:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - \frac{3}{2} = 0$$

Então, centro $C = (a, b)$ e raio r é:

$$a = \frac{-d}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$b = \frac{-e}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - f} = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)} = \sqrt{4 + 9 + \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{29}{2}}$$

$$\text{Então: } C = (2, -3) \text{ e } r = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

- 2ª) Dada a equação $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$, em que d , e e f são números reais conhecidos, a equação na forma reduzida é:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - f, \text{ onde}$$

$$a = \frac{-d}{2}, b = \frac{-e}{2}.$$

Então concluímos:

- Se $a^2 + b^2 - f > 0$, a equação representa uma circunferência de centro (a, b) e raio r .
- Se $a^2 + b^2 - f = 0$, a equação representa um único ponto (apenas (a, b) satisfaz a equação).
- Se $a^2 + b^2 - f < 0$, a equação representa um conjunto vazio.

Exemplo

Dada a equação $x^2 + y^2 + 2x + 8y + k = 0$, obter k para que ela represente:

- uma circunferência;
- um único ponto;
- um conjunto vazio.

Resolução

$$a = \frac{-d}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$b = \frac{-e}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$a^2 + b^2 - f = (-1)^2 + (-4)^2 - k = 17 - k$$

Assim:

- $17 - k > 0 \Rightarrow -k > -17 \Rightarrow k < 17$
- $17 - k = 0 \Rightarrow k = 17$
- $17 - k < 0 \Rightarrow -k < -17 \Rightarrow k > 17$

3ª) Toda circunferência do plano cartesiano apresenta equação na forma geral $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$, então a equação $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ (equação geral do 2º grau) para poder representar uma circunferência deve ter:

$$A = B \neq 0 \text{ e } C = 0$$

No entanto, se a equação:

$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ tiver $A = B \neq 0$ e $C = 0$, isso não significa que ela representa uma circunferência, pois poderá representar um único ponto ou mesmo um conjunto vazio.

Exemplo

Qual das equações abaixo representa uma circunferência?

- $2x^2 + y^2 - 3x + 4y - 1 = 0$
- $x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 6y - 1 = 0$
- $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 5 = 0$
- $x^2 - y^2 - 4x - 2y - 1 = 0$
- nda.

Resolução

As equações das **alternativas a e d** não representam uma circunferência, pois os coeficientes de x^2 e y^2 são diferentes ($A \neq B$).

A equação da **alternativa b** também não representa uma circunferência, pois o coeficiente de xy não é nulo ($C \neq 0$).

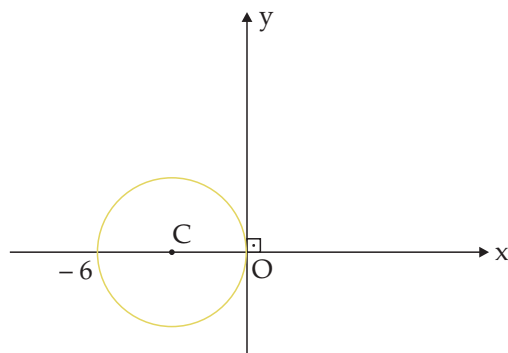
A equação da **alternativa c**, embora pareça representar uma circunferência, não representa, pois, se representasse, o centro da mesma seria $C = (1, 1)$ e $a^2 + b^2 - f = 1^2 + 1^2 - 5 = -3 < 0$.

Assim, a resposta é **alternativa e**.

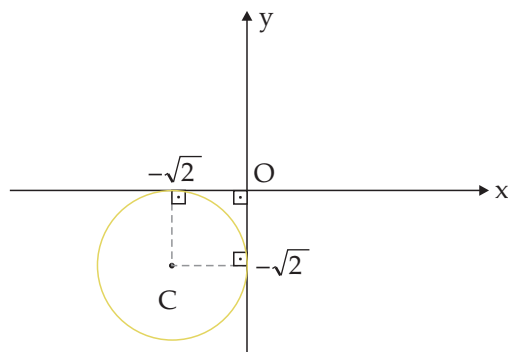
Exercícios Resolvidos

01. Achar a equação das circunferências:

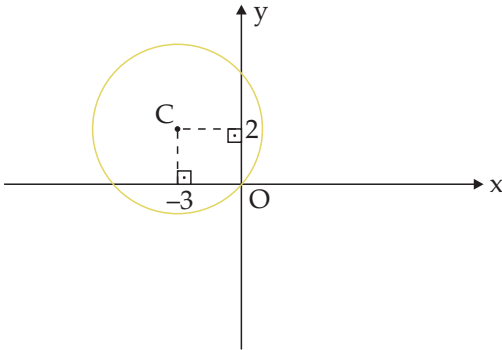
a)



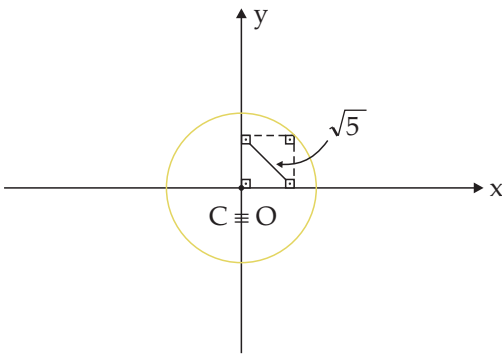
b)



c)



d)



Resolução

a) Centro = $C(-3, 0)$ e raio = 3

Assim: $(x + 3)^2 + y^2 = 9$

b) Centro = $C(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e raio = $\sqrt{2}$

Assim: $(x + \sqrt{2})^2 + (y + \sqrt{2})^2 = 2$

c) Centro = $C(-3, 2)$ e raio = d_{OC}

Então:

$$\text{raio} = \sqrt{(0+3)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{13}$$

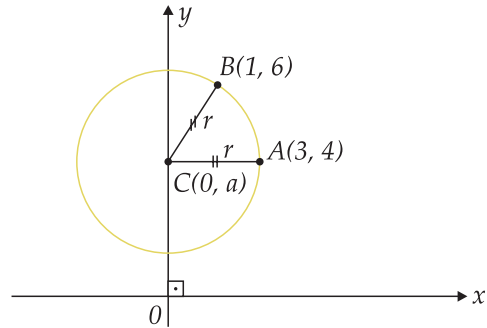
Assim: $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$

d) Centro = $C(0, 0)$ e raio = $\sqrt{5}$

Assim: $x^2 + y^2 = 5$

02. Achar a equação reduzida da circunferência com centro no eixo y e que passa pelos pontos A (3, 4) e B (1, 6).

Resolução



Como o centro C pertence ao eixo y, podemos escrever suas coordenadas assim: $C = (0, a)$.

Como A(3, 4) e B(1, 6) são pontos da circunferência, temos:

$$d_{AC} = d_{BC}$$

$$\sqrt{(3-0)^2 + (4-a)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (6-a)^2}$$

Elevando ao quadrado os dois membros, temos:

$$9 + 16 - 8a + a^2 = 1 + 36 - 12a + a^2 \rightarrow a = 3$$

O centro é o ponto $C = (0, 3)$, e o raio r é:

$$r = d_{AC} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{10}$$

Então, a equação reduzida da circunferência é:

$$(x - 0)^2 + (y - 3)^2 = (\sqrt{10})^2$$

ou seja: $x^2 + (y - 3)^2 = 10$

03. O raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Resolução

$$A = B \neq 0$$

$$a = \frac{-D}{2a} = \frac{-(-4)}{2} = 2$$

$$b = \frac{-E}{2A} = \frac{-(6)}{2} = -3$$

$$r^2 = a^2 + b^2 - F \Rightarrow r^2 = 4 + 9 + 12 = 25$$

$$r = 5$$

Resposta: E

04. Sob que condições a equação:

$$2x^2 + my^2 + 2kxy + 2x + 2y + p = 0$$

representa uma circunferência?

Resolução

Os coeficientes de x^2 e y^2 devem ser iguais, então:

$$m = 2$$

O termo em xy deve ter coeficiente nulo, então $k = 0$.

Nessas condições, temos:

$$2x^2 + 2y^2 + 2x + 2y + p = 0$$

Dividindo por 2 a equação, temos:

$$x^2 + y^2 + x + y + \frac{p}{2} = 0$$

Assim:

$$a = \frac{-d}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$b = \frac{-e}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$r^2 = a^2 + b^2 - f = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \frac{p}{2} > 0$$

$$\frac{2-2p}{4} > 0 \rightarrow p < 1$$

Assim, a equação representa uma circunferência se $m = 2$, $k = 0$ e $p < 1$.

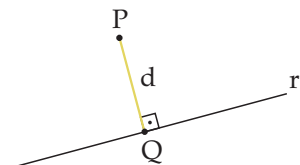


Capítulo 05. Distância de Ponto a Reta

1. Introdução

Consideremos, por exemplo, o ponto $P(1, 5)$ e a reta $(r) x + y - 2 = 0$.

A distância do ponto P à reta r é igual à distância de P à sua projeção ortogonal na reta r .



Para obtermos essa distância, devemos:

1º) obter a equação da reta $t \perp r$ passando por P :

$$\left. \begin{array}{l} m_r = -1 \\ t \perp r \end{array} \right\} \Rightarrow m_t = +1$$

$$y - 5 = 1(x - 1) \Rightarrow (t) x - y + 4 = 0$$

2º) obter o ponto Q , projeção de P em r :

$$\begin{array}{r} (+) \left\{ \begin{array}{l} x + y - 2 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{array} \right. \\ \hline 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{array}$$

Substituindo na equação de r , temos:

$$-1 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 3$$

Assim $Q(-1, 3)$

3º) obter a distância PQ :

$$d_{PQ} = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

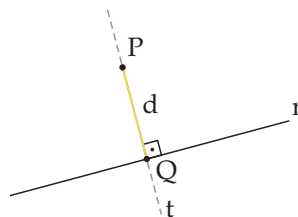
Assim, a distância do ponto $P(1, 5)$ à reta

$$(r) x + y - 2 = 0 \text{ é } 2\sqrt{2}.$$

Por ter grande aplicação na Geometria Analítica, vamos deduzir uma fórmula para calcular a distância de um ponto a uma reta.

2. Fórmula de Cálculo

Dado um ponto $P(x_p, y_p)$ e a reta $(r) ax + by + c = 0$, vamos obter uma fórmula para calcular a distância d entre P e r .



1º) Equação da reta $t \perp r$ passando por P .

$$\left. \begin{array}{l} m_r = -\frac{a}{b} \\ t \perp r \end{array} \right\} \Rightarrow m_t = \frac{b}{a}$$

$$\text{Assim: } (t) y - y_p = \frac{b}{a}(x - x_p)$$

$$\text{Então: } (t) -bx + ay + (bx_p - ay_p) = 0$$

2º) Projeção ortogonal de P em r .

Achamos a projeção de P em r , resolvendo o sistema determinado pelas equações de t e r .

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + by = -c \quad (r) \\ -bx + ay = -bx_p + ay_p \quad (t) \end{array} \right.$$

Multiplicando a equação de (r) por b e a equação de (t) por a , e fazendo a adição membro a membro, obtemos:

$$x_Q = \frac{b^2 x_p - aby_p - ac}{a^2 + b^2}$$

$$y_Q = \frac{-abx_p + a^2 y_p - bc}{a^2 + b^2}$$

3º) Distância entre os pontos P e Q.

$$d = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{a^2 x_P + a b y_P + a c}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{a b x_P + b^2 y_P + b c}{a^2 + b^2}\right)^2}$$

$$d = \sqrt{\frac{a^2 (a x_P + b y_P + c)^2 + b^2 (a x_P + b y_P + c)^2}{(a^2 + b^2)^2}}$$

$$d = \sqrt{\frac{(a x_P + b y_P + c)^2}{a^2 + b^2}}$$

Assim: $d = \frac{|a x_P + b y_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Observação – A distância de P é igual ao módulo do valor numérico obtido, substituindo as coordenadas de P no 1º membro da equação geral de r, dividido por $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemplos

1º) Calcular a distância do ponto P (1, 5) à reta (r) $x + y - 2 = 0$.

Resolução

$$d = \frac{|a x_P + b y_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 + 5 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

$$d = \frac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow d = 2\sqrt{2}$$

Observação: A unidade de medida não é citada; consideramos a mesma das coordenadas fornecidas, isto é, a unidade do sistema cartesiano.

2º) Calcular a distância da origem O (0, 0) à reta (r) $y = 2x - 1$.

Resolução

Inicialmente, colocamos a equação de r na forma geral:

$$y = 2x - 1 \Rightarrow -2x + y + 1 = 0$$

e aplicamos a fórmula da distância:

$$d = \frac{|a x_P + b y_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-2 \cdot 0 + 0 + 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}}$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

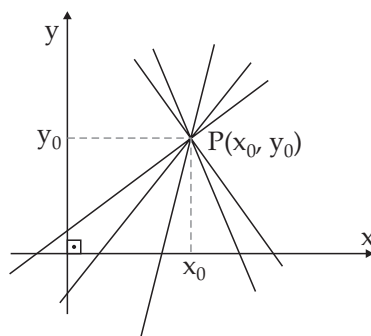
3. Obtenção de Equações de Retas

3.1. Dado um Ponto da Reta

Se conhecemos um ponto P (x_0, y_0) de uma reta, para determinarmos a sua equação devemos obter o seu coeficiente angular m, e a equação será:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Dizemos que essa equação, com m variável, representa o feixe de retas concorrentes em P (x_0, y_0), não paralelas ao eixo y. A reta paralela ao eixo y e que passa por P tem equação $x = x_0$.

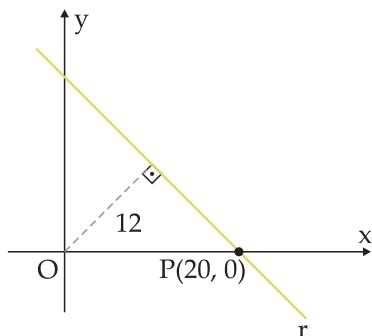


Exemplos

1º) Achar a equação da reta r que passa pelo ponto P (20, 0) e dista 12 unidades da origem O do sistema cartesiano.



Resolução



A equação de r será:

$$y - 0 = m(x - 20)$$

ou seja

$$(r) \quad mx - y - 20m = 0$$

$$\text{dist. } (O, r) = 12$$

$$\frac{|m \cdot 0 - 0 - 20m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 12$$

$$|20m| = 12\sqrt{m^2 + 1}$$

$$400m^2 = 144(m^2 + 1)$$

$$256m^2 = 144$$

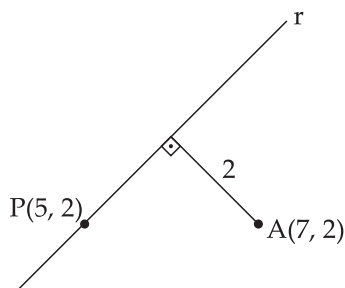
$$m = \pm \frac{12}{16} \Rightarrow m = \pm \frac{3}{4}$$

O problema tem duas soluções:

$$(r_1) \quad y = \frac{3}{4}(x - 20) \text{ e } (r_2) \quad y = -\frac{3}{4}(x - 20)$$

2º) Achar a equação da reta r que passa pelo ponto P (5, 2) e dista 2 unidades do ponto A (7, 2).

Resolução



A equação de r será:

$$y - 2 = m(x - 5) \Rightarrow$$

$$(r) \quad mx - y - 5m + 2 = 0$$

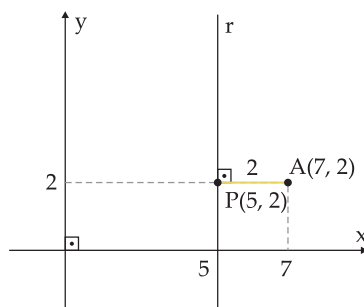
$$\text{dist. } (A, r) = 2$$

$$\frac{|m \cdot 7 - 2 - 5m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2$$

$$|2m| = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

$$4m^2 = 4(m^2 + 1) \Rightarrow 0 = 4$$

Notamos que não existe m que satisfaça as condições do problema, pois a reta r é vertical. Isso seria facilmente percebido se fizéssemos o gráfico em coordenadas cartesianas.



Logo, a equação da reta r é: $x = 5$

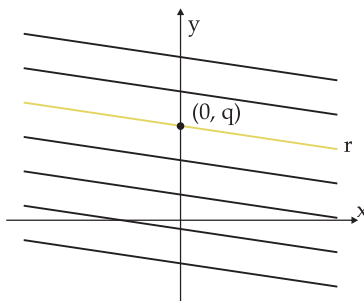
3.2. Conhecendo a Direção da Reta

1. Dado o coeficiente angular m da reta

Se conhecemos o coeficiente angular m da reta, devemos descobrir o coeficiente linear q, e a equação será:

$$y = mx + q$$

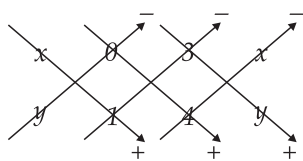
Dizemos que essa equação, com q variável, representa o **feixe de retas paralelas** de coeficiente angular m.





Resolução

Obtemos a equação da reta $\overleftrightarrow{BC}$



$$x + 0 + 3y - 0 - 3 - 4x = 0$$

$$\text{Assim } (\overleftrightarrow{BC}) - 3x + 3y - 3 = 0$$

$$\text{ou } (\overleftrightarrow{BC}) x - y + 1 = 0$$

Calculamos agora a distância do vértice A à reta $\overleftrightarrow{BC}$:

$$h = d_{A, \overleftrightarrow{BC}} = \frac{|1 - 5 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Então: } h = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

03. Achar o ponto P do eixo y, equidistante das retas (r) $3x + y - 1 = 0$ e (s) $x + 3y + 5 = 0$.

Resolução

$$P \in \text{eixo } y \Rightarrow P = (0, y_p)$$

$$\text{dist. } (P, r) = \text{dist. } (P, s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|3 \cdot 0 + y_p - 1|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|0 + 3y_p + 5|}{\sqrt{1^2 + 3^2}}$$

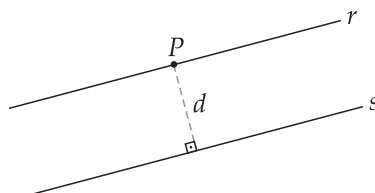
$$\text{Então: } \frac{|y_p - 1|}{\sqrt{10}} = \frac{|3y_p + 5|}{\sqrt{10}}$$

$$|y_p - 1| = |3y_p + 5| \Rightarrow \begin{cases} y_p - 1 = 3y_p + 5 \Rightarrow y_p = -3 \\ \text{ou} \\ y_p - 1 = -3y_p - 5 \Rightarrow y_p = -1 \end{cases}$$

Assim, as coordenadas de P são: $(0, -3)$ ou $(0, -1)$

04. Calcular a distância entre as retas paralelas de equações (r) $3x + 4y - 12 = 0$ e (s) $3x + 4y + 6 = 0$

Resolução



Devemos, inicialmente, encontrar um ponto qualquer de uma das retas, r por exemplo.

Fazendo $x = 0$, por exemplo, na equação de r, temos:

$$3 \cdot 0 + 4y - 12 = 0 \Rightarrow y = 3$$

$$\text{Assim, } P(0, 3) \in r$$

A distância d entre as retas r e s será a distância de P à reta s.

Assim:

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{18}{\sqrt{25}}$$

$$\text{Então: } d = \frac{18}{5}$$

05. A equação da reta paralela a (s) $x + y - 7 = 0$ e tangente à circunferência de centro na origem e raio 5 pode ser:

- a) $x + y + 4 = 0$ d) $x + y - 5 = 0$
- b) $x + y + 3 = 0$ e) $x + y + 10\sqrt{2} = 0$
- c) $x + y - 5\sqrt{2} = 0$

Resolução

Podemos escrever a equação de uma reta paralela a (s) na forma (t) $x + y + k = 0$ e, sendo esta reta tangente à circunferência, então a sua distância até o centro (origem) é igual ao raio (5).

$$R = d_{Ct} \Rightarrow 5 = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + k|}{\sqrt{1 + 1}} \Rightarrow k = \pm 5\sqrt{2}$$

Sendo assim, a equação procurada pode ser:

$$x + y - 5\sqrt{2} = 0 \text{ ou } x + y + 5\sqrt{2} = 0.$$

Resposta: C

06. (Fuvest-SP) Obtenha a equação das retas que passam pela origem e tangenciam a circunferência de centro no ponto $(5, 0)$ e raio 3.

Resolução

Se a reta passa pela origem, $(t)y - 0 = m(x - 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (t)y = mx$ ou $(t)mx - y = 0$. Como (t) é tangente à circunferência de centro $C(5, 0)$ e raio 3, temos que a $d_{Ct} = 3$

$$d_{Ct} = \left| \frac{m \cdot 5 + 1 \cdot 0 + 0}{m^2 + 1} \right| = 3 \Rightarrow m = \pm \frac{3}{4}, \text{ portanto,}$$

$$\text{temos que } (t)y = \frac{3}{4}x \text{ ou } (t')y = -\frac{3}{4}x$$

$$\text{Resposta: } y = \frac{3}{4}x \text{ ou } y = -\frac{3}{4}x$$

Obs. – Você também pode resolver este exercício utilizando $m = \operatorname{tg} \alpha$, com o auxílio do gráfico.



Capítulo 06. Circunferência: Posições Relativas

1. Posições Relativas entre Ponto e Circunferência

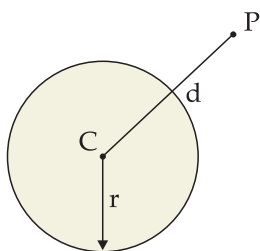
Consideremos uma circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r . A equação desta circunferência é:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$$

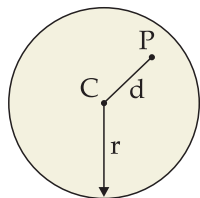
Seja $P(x_0, y_0)$ um ponto do plano cartesiano, a distância de P ao centro C da circunferência é:

$$d = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2}$$

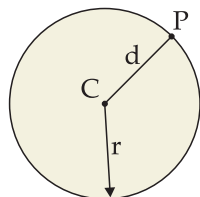
Chamamos de potência de P em relação à circunferência o número $d^2 - r^2$, que é positivo, negativo ou nulo, conforme P seja externo, interno ou pertencente à circunferência.



$$d > r \Rightarrow d^2 - r^2 > 0$$



$$d < r \Rightarrow d^2 - r^2 < 0$$



$$d = r \Rightarrow d^2 - r^2 = 0$$

Dessa forma, a potência de P em relação à circunferência é:

$$\text{Pot. de } P = d^2 - r^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2$$

Esse valor é o que obtemos quando substituímos as coordenadas de $P(x_0, y_0)$ na equação geral da circunferência. Assim, concluímos que:

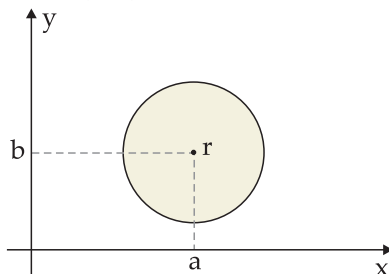
$$P_{\text{externo}}: (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 > 0$$

$$P_{\text{interno}}: (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 < 0$$

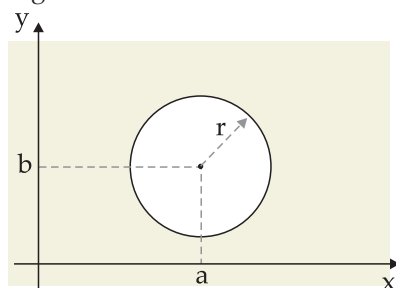
$$P_{\text{pertencente}}: (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 = 0$$

Observações

- 1ª) O lugar geométrico representado por $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 \leq 0$ é o círculo de centro $C(a, b)$ e raio r .



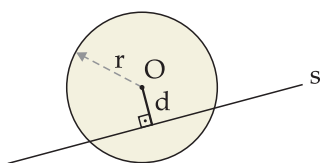
- 2ª) O lugar geométrico representado por $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 \geq 0$ é a região destacada na figura.



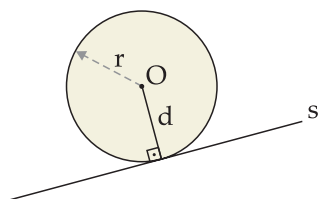
2. Posições Relativas entre Reta e Circunferência

Consideremos uma reta s de equação $ax + by + c = 0$ e uma circunferência λ de equação $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$. Para identificarmos a posição de s e λ , podemos usar dois raciocínios diferentes.

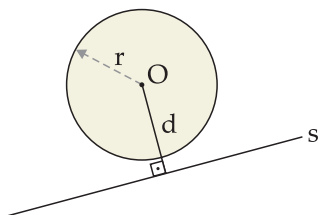
1º Modo: comparamos a distância d , do centro da circunferência até a reta s , com o raio da mesma:



$$d < r \Leftrightarrow s \text{ secante a } \lambda$$



$$d = r \Leftrightarrow s \text{ tangente a } \lambda$$



$$d > r \Leftrightarrow s \text{ externa a } \lambda$$

2º Modo: resolvemos o sistema formado pelas equações de s e λ , recaiando sempre em uma equação do 2º grau. A posição de s e λ é determinada pelo valor do Δ (discriminante) desta equação.

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow s \text{ secante a } \lambda$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow s \text{ tangente a } \lambda$$

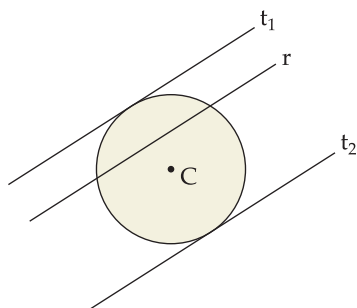
$$\Delta < 0 \Leftrightarrow s \text{ externa a } \lambda$$

3. Problemas sobre Retas e Circunferências

Vamos resolver neste item alguns dos problemas fundamentais sobre reta e circunferência.

1º Problema: achar as equações das retas paralelas a (r) $3x + 4y - 7 = 0$ e tangentes à circunferência (λ) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Resolução



Seja $t \parallel r$, a equação de t pode ser escrita:

$$(t) \quad 3x + 4y + k = 0$$

Como t é tangente à circunferência, a distância de t ao centro $C = (1, 2)$ é igual ao raio 2.

Assim,

$$\frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2 \rightarrow |k + 11| = 10$$

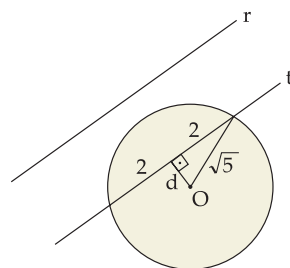
$$k + 11 = \pm 10 \rightarrow k = -1 \text{ ou } k = -21$$

Resposta

$$(t_1) \quad 3x + 4y - 1 = 0 \text{ e } (t_2) \quad 3x + 4y - 21 = 0$$

2º Problema: determine as equações das retas paralelas a (r) $x + 2y + 13 = 0$ e que determinam na circunferência (λ) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ uma corda de comprimento 4.

Resolução





$$d^2 + 2^2 = (\sqrt{5})^2 \rightarrow d^2 = 1$$

Assim, $d = 1$

A reta $t \parallel r$ tem equação:

$$(t) x + 2y + k = 0$$

A distância do centro $O(1, 2)$ à reta t deve ser $d = 1$.

Então,

$$\frac{|1 + 2 \cdot 2 + k|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 1 \rightarrow |k + 5| = \sqrt{5}$$

$$\text{Assim, } k = -5 - \sqrt{5} \text{ ou } k = -5 + \sqrt{5}$$

Resposta

$$(t_1) x + 2y - 5 - \sqrt{5} = 0 \text{ e } (t_2) x + 2y - 5 + \sqrt{5} = 0$$

3º Problema: determine a equação da reta que passa por $A(5, 3)$ e é tangente à circunferência de equação

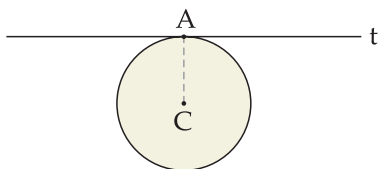
$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$$

Resolução

Vamos descobrir, inicialmente, a posição de A em relação à circunferência:

$$5^2 + 3^2 - 6 \cdot 5 - 4 \cdot 3 + 8 = 0$$

Assim, A pertence à circunferência, e o problema tem solução única.



A reta t procurada passa por $A(5, 3)$ e é perpendicular a $\overline{AC}$, onde $C = (3, 2)$ é o centro da circunferência.

$$\left. \begin{aligned} m_{AC} &= \frac{3-2}{5-3} = \frac{1}{2} \\ t \perp AC \end{aligned} \right\} \rightarrow m_t = -2$$

A equação de t é $(t) y - 3 = -2(x - 5)$ ou seja $2x + y - 13 = 0$.

Resposta: $2x + y - 13 = 0$.

4º Problema: determine a equação da reta que passa por $A(2, 3)$ e é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$.

Resolução

Vamos, inicialmente, descobrir a posição de A em relação à circunferência:

$$2^2 + 3^2 - 6 \cdot 2 - 4 \cdot 3 + 8 = -3 < 0$$

Assim, A é interno à circunferência, e o problema não tem solução.

Resposta: não existe reta que passa por A e é tangente à circunferência dada.

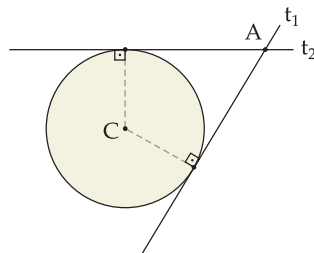
5º Problema: determine a equação da reta que passa por $A(4, -3)$ e é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 = 0$.

Resolução

Vamos, inicialmente, descobrir a posição de A em relação à circunferência:

$$4^2 + (-3)^2 + 6 \cdot 4 - 2(-3) + 9 = 64 > 0$$

Assim, A é externo à circunferência, e o problema tem duas soluções.



Como t passa por $A(4, -3)$, a sua equação é:

$$(t) y + 3 = m(x - 4)$$

$$\text{ou seja, } (t) mx - y - 4m - 3 = 0$$

A distância do centro $C = (-3, 1)$ à reta t é igual ao raio $= 1$, então,

$$\frac{|m(-3) - 1 - 4m - 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1$$

$$|-7m - 4| = \sqrt{m^2 + 1}$$

$$49m^2 + 56m + 16 = m^2 + 1$$

$$48m^2 + 56m + 15 = 0$$

$$\text{Assim, } m = \frac{-5}{12} \text{ ou } m = \frac{-3}{4}$$

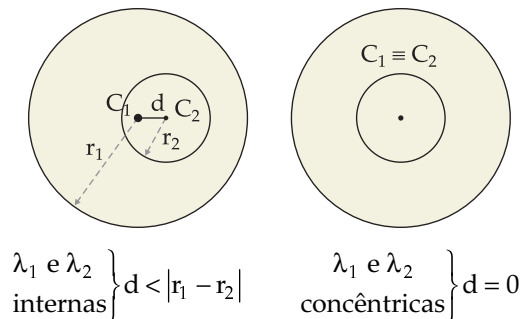
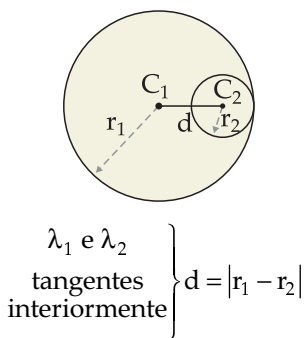
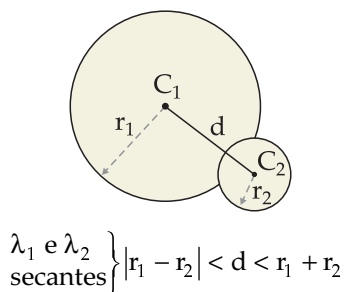
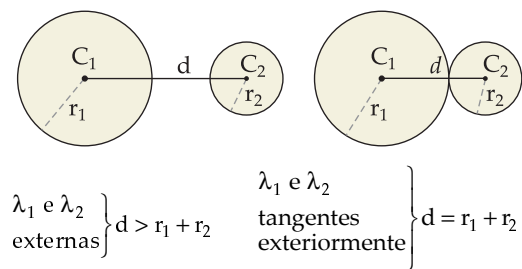
Resposta

$$(t_1) y + 3 = \frac{-5}{12}(x - 4) \text{ e } (t_2) y + 3 = \frac{-3}{4}(x - 4)$$

4. Posições Relativas entre Duas Circunferências

Consideremos duas circunferências λ_1 e λ_2 , de centros C_1 e C_2 e raios r_1 e r_2 , respectivamente.

Seja d a distância entre os centros C_1 e C_2 , temos:



Exercícios Resolvidos

01. Dada a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$, determine a posição de cada um dos pontos abaixo em relação a ela:

- A (3, 4)
- B (2, 6)
- D (0, 3)

Resolução

$$a) 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 - 4 \cdot 4 - 3 = 9 + 16 - 6 - 16 - 3 = 0$$

Assim, A pertence à circunferência.

$$b) 2^2 + 6^2 - 2 \cdot 2 - 4 \cdot 6 - 3 = 4 + 36 - 4 - 24 - 3 = 7 > 0$$

Assim, B é externo à circunferência.

$$c) 0^2 + 3^2 - 2 \cdot 0 - 4 \cdot 3 - 3 = 0 + 9 - 0 - 12 - 3 = -6 < 0$$

Assim, D é interno à circunferência.

02. Qual a posição relativa da circunferência $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 13 = 0$ e a reta $8x - 6y - 3 = 0$?

Resolução

1º Modo:

O centro C e o raio r da circunferência são: $C(5, 2)$ e $r = 4$.

A distância d do centro à reta é:

$$d = \frac{|8 \cdot 5 - 6 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

Comparando d e r, temos $d < r$

Portanto, a reta e a circunferência são secantes.

2º Modo:

Vamos analisar o sistema determinado pelas equações da reta e da circunferência:

$$\begin{cases} 8x - 6y - 3 = 0 \text{ (I)} \\ x^2 + y^2 - 10x - 4y + 13 = 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

Isolando $x = \frac{6y + 3}{8}$ na equação (I) e substituindo em (II), temos:

$$\left(\frac{6y + 3}{8}\right)^2 + y^2 - 10\left(\frac{6y + 3}{8}\right) - 4y + 13 = 0$$



Simplificando, obtemos:

$$100y^2 - 700y + 601 = 0$$

Calculando o discriminante Δ , temos:

$$\Delta = (-700)^2 - 4 \cdot 100 \cdot 601 = 249.600$$

Como $\Delta > 0$, a reta e a circunferência são secantes.

03. Estabeleça a posição relativa entre λ_1 e λ_2 em cada caso abaixo:

a) $(\lambda_1) x^2 + y^2 = 1$ e $(\lambda_2) (x - 3)^2 + y^2 = 4$

b) $(\lambda_1) (x - 1)^2 + y^2 = 4$ e

$$(\lambda_2) x^2 + (y - 1)^2 = 9$$

c) $(\lambda_1) (x - 10)^2 + (y - 1)^2 = 1$ e

$$(\lambda_2) (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 100$$

Resolução

a) $C_1(0, 0)$ e $r_1 = 1$; $C_2(3, 0)$ e $r_2 = 2$

$$d = \sqrt{(0-3)^2 + (0-0)^2} = 3$$

$$d = r_1 + r_2 \rightarrow \lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \text{ tangentes exteriormente}$$

b) $C_1(1, 0)$ e $r_1 = 2$; $C_2(0, 1)$ e $r_2 = 3$

$$d = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2 \rightarrow \lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \text{ secantes.}$$

c) $C_1(10, 1)$ e $r_1 = 1$; $C_2(1, 1)$ e $r_2 = 10$

$$d = \sqrt{(10-1)^2 + (1-1)^2} = 9$$

$$d = |r_1 - r_2| \rightarrow \lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \text{ tangentes interiormente.}$$

Observação

Para obtermos os pontos de intersecção de duas circunferências, basta resolvermos o sistema determinado por suas equações. Assim consideremos, por exemplo, as circunferências de equações:

$$(\lambda_1) x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$$

$$(\lambda_2) x^2 + y^2 - x - 4y + 3 = 0$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0 \\ -x^2 - y^2 + x + 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$3x + 6y = 0 \rightarrow x + 2y = 0 \text{ (I)}$$

Isolando x na equação (I) e substituindo na equação de λ_1 , temos:

$$x + 2y \rightarrow x = -2y$$

$$(-2y)^2 + y^2 + 2(-2y) + 2y - 3 = 0$$

$$5y^2 - 2y - 3 = 0 \rightarrow y = 1 \text{ ou } y = \frac{-3}{5}$$

Substituindo em (I), temos:

$$x = -2y = -2 \cdot (1) = -2$$

ou

$$x = -2y = \frac{-2 \cdot (-3)}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\text{Assim, } P_1(-2, 1) \text{ e } P_2\left(\frac{6}{5}, \frac{-3}{5}\right)$$

É importante notar que a equação (I) é a equação da reta que passa pelos pontos P_1 e P_2 de intersecção λ_1 e λ_2 .

04. Dadas duas circunferências não concêntricas, $(\lambda_1) (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2$ e $(\lambda_2) (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2$, denominamos eixo radical de λ_1 e λ_2 ao conjunto dos pontos do plano cartesiano que são equípotentes relativamente a λ_1 e λ_2 . Mostre que o eixo radial é uma reta.

Resolução

Se $P(x, y)$ é equípotente em relação a λ_1 e λ_2 , então,

$$\begin{aligned} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - r_1^2 &= \\ &= (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - r_2^2 \\ x^2 - 2x_1x + x_1^2 + y^2 - 2y_1y + y_1^2 - r_1^2 &= \\ = x^2 - 2x_2x + x_2^2 + y^2 - 2y_2y + y_2^2 - r_2^2 &= \\ (2x_2 - 2x_1)x + (2y_2 - 2y_1)y + & \\ + (x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 - x_2^2 - y_2^2 + r_2^2) &= 0 \end{aligned}$$

Fazendo:

$$a = 2x_2 - 2x_1$$

$$b = 2y_2 - 2y_1$$

$$c = x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 - x_2^2 - y_2^2 + r_2^2$$

temos:

$$\boxed{ax + by + c = 0} \text{ que é a equação de uma reta.}$$



