

Matemática 6

Exponencial e Logaritmos

Pré-Vestibular

Teoria e Exercícios Propostos



Editora COC – Empreendimentos Culturais Ltda.
R. Deolinda, 70, esq. com a Av. Franc. Junqueira
Tel.: (16) 3603.9500 – CEP 14091-018
Jardim Macedo – Ribeirão Preto – SP



Capítulo 01. Função e Equação Exponenciais

1. Apresentação da Função Exponencial	7
2. Comparação de Potências de Mesma Base	8
3. Equação Exponencial	8
4. Propriedades das Potências	9
5. Inequação Exponencial	12

Capítulo 02. Logaritmos

1. Definição	14
2. Decorrências da Definição	15
3. Condições de Existência	16
4. Propriedades	18
5. Equação Logarítmica	20
6. Mudança de Base	22
7. Função Logarítmica	24
7.1. Preliminares	24
7.2. Apresentação da Função Logarítmica	24
8. Inequações Logarítmicas	25
9. Problemas com Logaritmos	29



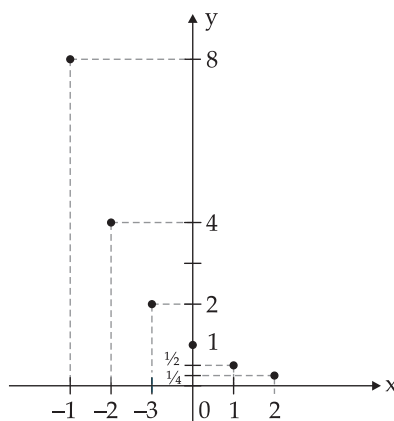
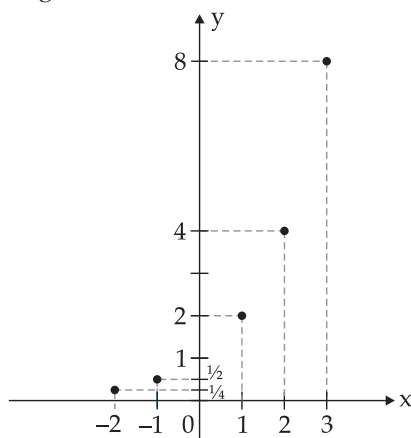
Capítulo 01. Função e Equação Exponenciais

Vamos observar as duas tabelas a seguir que apresentam pares ordenados cujos primeiros elementos são números inteiros quaisquer, e os segundos elementos são potências cujos expoentes são os primeiros elementos de cada par ordenado, ou seja, cada par ordenado pode ser genericamente apresentado por $(x; a^x)$, em que a é um número real maior que zero e diferente de um.

Tabela I	
x	2^x
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

Tabela II	
x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

Representando-se os pares ordenados $(x, 2^x)$ e $\left(x; \left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$ no plano cartesiano, teremos os seguintes gráficos:



Se pensarmos na possibilidade de, ao invés de utilizar apenas alguns valores inteiros de x , usarmos todo o conjunto dos números reais, poderemos pensar nesses pares ordenados formando uma função real. Essa função é a chamada **função exponencial** e ela será objeto de nosso estudo neste módulo.

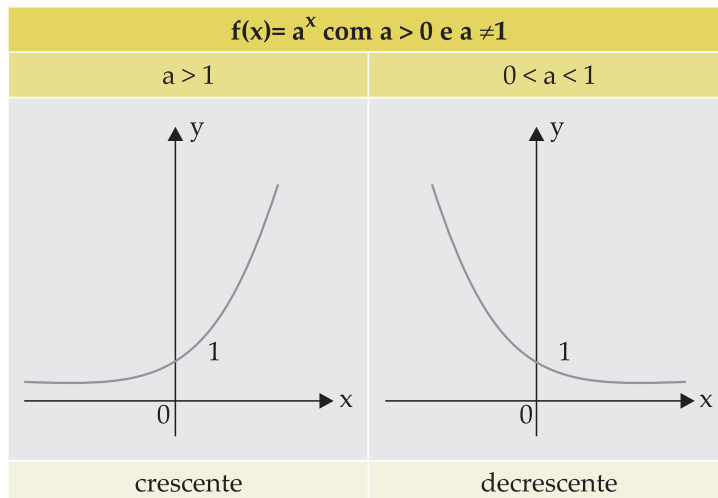
1. Apresentação da Função Exponencial

- **Sentença:** f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R} / f(x) = a^x$ com $a \in \mathbb{R}, a > 0$ e $a \neq 1$
- **Gráfico:** como pudemos observar nas tabelas e gráficos anteriormente estudados, a função exponencial pode se apresentar graficamente de duas maneiras diferentes. Essas formas de apresentação depende da base da potência:
 - Base da potência maior que 1 — função crescente.
 - Base da potência entre 0 e 1 — função decrescente.
- **Domínio:** $D = \mathbb{R}$
- **Contradomínio:** $CD = \mathbb{R}$
- **Conjunto-imagem:** $Im = \mathbb{R}_+^*$
- **Monotonicidade:** a função exponencial é **crescente** quando a base da potência é um número real maior que 1, e **decrescente** quando a base da potência apresenta um valor real entre 0 e 1.

Observação

A função exponencial é classificada como função injetora.

Vejam os resumos dessas ideias na figura a seguir.



2. Comparação de Potências de Mesma Base

Quando comparamos duas potências de bases diferentes, representando equação ou inequação exponencial, o recurso que nos permite chegar ao **conjunto-solução** é o **uso do logaritmo** (que ainda será estudado em outros módulos).

Porém, se estivermos comparando potências de bases iguais, o procedimento consiste em “transferir” a comparação entre as potências para uma comparação entre os expoentes destas potências.

Exemplos:

$2^{3x+4} > 3^{4x-7} \Rightarrow$ usaremos logaritmo, pois as bases das potências são diferentes.

$7^{4x+7} < 7^{2x-6} \Rightarrow$ compararemos $4x+7$ com $2x-6$, pois as bases das potências são iguais.

$5^{x^2-3} = 8^{2x+11} \Rightarrow$ usaremos logaritmo, pois as bases das potências são diferentes.

$4^{x^2-6} = 4^{5x} \Rightarrow$ compararemos x^2-6 com $5x$, pois as bases das potências são iguais.

3. Equação Exponencial

Equação exponencial é toda equação que apresenta a variável no expoente, podendo as bases serem iguais ou não.

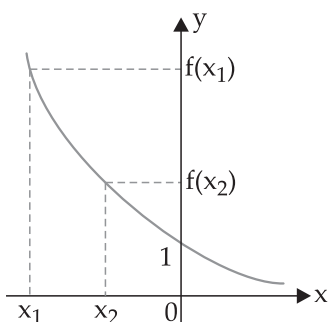
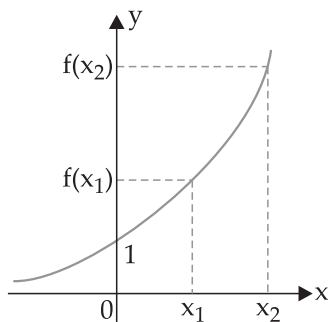
Exemplos:

$$2^x = 32 ; 7^{4x+7} = 7^{2x-6} ;$$

$$4^{x^2-6} = 4^{5x} ; 5^{x+3} = 2^{3x-1}$$

Na resolução da equação exponencial de bases iguais, usamos o fato de a **função exponencial ser injetora**: elementos distintos têm imagens distintas, ou, por outro lado, imagens iguais correspondem a elementos iguais, ou seja, **potências iguais têm expoentes iguais**.

Assim, a igualdade entre potências de bases iguais passa a ser uma igualdade entre os expoentes dessas potências.



$$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ou

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Portanto, para $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$, temos que:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

4. Propriedades das Potências

Estando a função exponencial diretamente ligada à potenciação, julgamos ser conveniente uma rápida recordação das propriedades das potências.

Consideremos $(a, b) \in \mathbb{R}^*$ e $\{m, n\} \in \mathbb{Z}$

$$P_1: a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$P_2: a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$P_3: a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$P_4: a^n : b^n = (a : b)^n$$

$$P_5: (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Exemplos:

1º) Resolver a equação: $2^{x+3} = 2^{2x-1}$

$$2^{x+3} = 2^{2x-1} \Rightarrow x+3 = 2x-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x = -4 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow$$

$$S = \{4\}$$

2º) Resolver a equação: $7^{x^2-3} = 7^{2x}$

$$7^{x^2-3} = 7^{2x} \Rightarrow x^2 - 3 = 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 3 \Rightarrow$$

$$S = \{-1, 3\}$$

3º) Resolver a equação: $2^{x+2} + 2^{x-1} = 18$

$$2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^{-1} = 18 \Rightarrow$$

$$2^x \cdot \left(4 + \frac{1}{2}\right) = 18 \Rightarrow 2^x \cdot \frac{9}{2} = 18 \Rightarrow$$

$$2^x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$2^x = 18 : \frac{9}{2} \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow k = 2$$

$$S = \{2\}$$

4º) Resolver a equação: $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$

— fazendo $3^x = y$, temos $y^2 - 10y + 9 = 0$,

que é uma equação do 2º grau, cuja resolução nos apresenta como soluções os valores $y = 1$ ou $y = 9$

— como $3^x = y$, temos: $3^x = 1 \Rightarrow x = 0$ ou

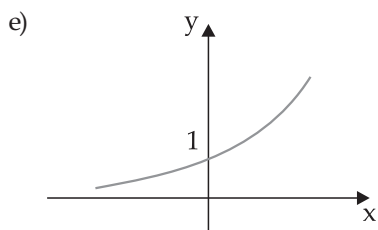
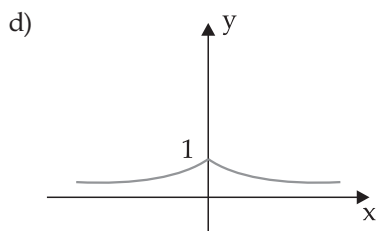
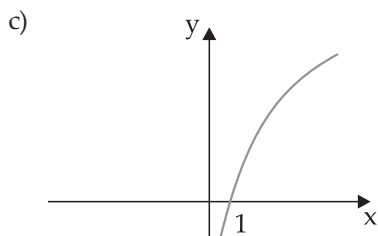
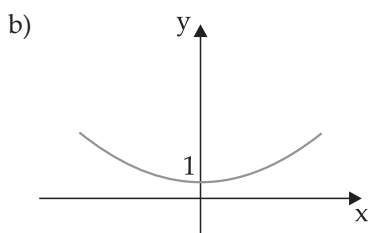
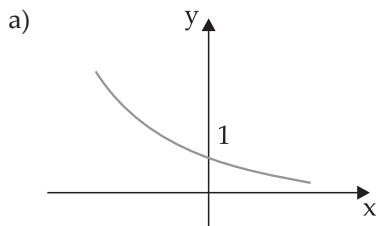
$$3^x = 9 \Rightarrow x = 2.$$

Assim:

$$S = \{0; 2\}$$

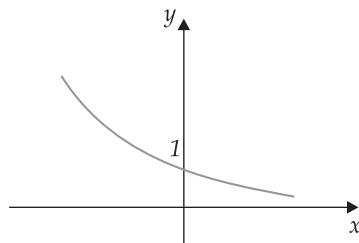
Exercícios Resolvidos

01. (FGV-SP) Assinale o gráfico correspondente à função $y=a^{-x}$ ($a>1$):



Resolução

$$y = a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \text{ Se } a > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{a} < 1$$



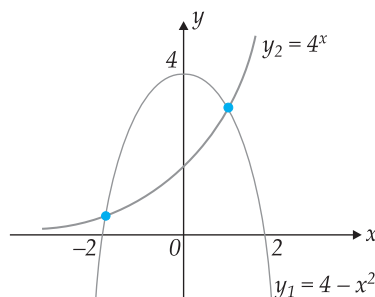
Resposta: A

02. O número de soluções, em $\mathbb{R}$, da equação $4^x = 4 - x^2$ é igual a :

- a) 1 d) 3
b) 2 e) 4
c) 0

Resolução:

Fazendo $4^x = y_1$ e $y_2 = 4 - x^2$, para resolver o problema basta esboçar o gráfico de y_1 e y_2 no mesmo plano cartesiano:



Resposta: B

03. (UFV-MG) Seja a equação $[2^{x-3}]^{x-2} = 1$.

A soma e o produto de suas soluções são respectivamente:

- a) 3 e 2
b) 9 e 8
c) -5 e -24
d) -2 e -8
e) 5 e 6

**Resolução**

$$2^{(x-3) \cdot (x-2)} = 2^0 \Rightarrow (x-3) \cdot (x-2) = 0$$

Raízes 3 e 2

Soma 5 e produto 6

Resposta: E

04. (UEL-PR) A solução da equação $2^{x-1} - 2^{x+2} = -56$ é um número

- a) primo
- b) múltiplo de 3
- c) divisível por 4
- d) múltiplo de 5
- e) divisível por 7

Resolução

$$2^x \cdot 2^{-1} - 2^x \cdot 2^2 = -56$$

$$2^x \cdot \left(\frac{1}{2} - 4\right) = -56$$

$$2^x \cdot \frac{-7}{2} = -56$$

$$2^x = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$S = \{4\}$$

Resposta: C

05. (UFSC) O valor de x que satisfaz a equação $\frac{1}{27} 9^x - \frac{8}{27} 3^x - \frac{1}{3} = 0$ é:

- a) 2
- b) 1
- c) 3
- d) 0
- e) -2

Resolução

$$\frac{1}{27} 3^{2x} - \frac{8}{27} 3^x - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow 3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$$

Fazendo $3^x = y$, obteremos:

$$y^2 - 8y - 9 = 0 \begin{cases} \rightarrow y' = 9 \\ \rightarrow y'' = -1 (\text{não convém}) \end{cases}$$

$$\therefore 3^x = 9 \Rightarrow x = 2 \quad S = \{2\}$$

Resposta: A

06. (Fuvest-SP) Resolva o sistema

$$\begin{cases} 8^x \cdot 4^y = \frac{1}{4} \\ 4^x \cdot 2^{-y} = 2 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} 8^x \cdot 4^y = \frac{1}{4} \\ 4^x \cdot 2^{-y} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{3x} \cdot 2^{2y} = 2^{-2} \\ 2^{2x} \cdot 2^{-y} = 2^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{3x+2y} = 2^{-2} \\ 2^{2x-y} = 2^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = -1$$

$$\therefore V = \{(0, -1)\}$$

07. (UEBA) Uma população de bactérias no instante t é definida pela função $f(t) = C \cdot 4^{kt}$, em que t é dado em minutos. Se a população depois de 1 minuto era de 64 bactérias e depois de 3 minutos, de 256, conclui-se que a população inicial era de

- a) 32 bactérias
- b) 16 bactérias
- c) 8 bactérias
- d) 2 bactérias
- e) 1 bactéria

Resolução

$$\begin{cases} f(1) = C \cdot 4^{k \cdot 1} = 64 \\ f(3) = C \cdot 4^{k \cdot 3} = 256 \end{cases} \Rightarrow \frac{C \cdot 4^{k \cdot 1}}{C \cdot 4^{k \cdot 3}} = \frac{64}{256}$$

$$\Rightarrow 4^{k-3k} = \frac{(4)^3}{(4)^4}$$

$$4^{-2k} = 4^{-1} \Rightarrow k = 0,5$$

$$\text{Assim } f(1) = C \cdot 4^{0,5 \cdot 1} = 64 \Rightarrow C \cdot 2^{2 \cdot 0,5 \cdot 1} = 64 \Rightarrow 2C = 64 \Rightarrow C = 32$$

$$\text{Portanto, } f(0) = 32 \cdot 4^{k \cdot 0} = 32$$

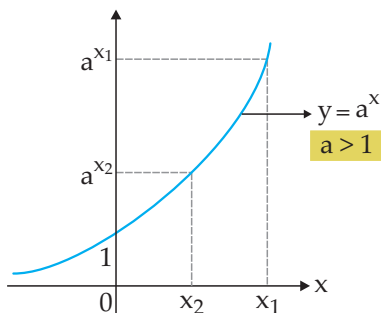
Resposta: A

5. Inequação Exponencial

Inequação exponencial é toda inequação que apresenta a variável no expoente, podendo as bases serem iguais ou não.

Na resolução das inequações exponenciais de **bases iguais**, valemo-nos do fato de ser a função exponencial monotônica, ou seja, é **sempre crescente** ou **sempre decrescente**, dependendo da base ser um número maior que 1 ou estar entre 0 e 1.

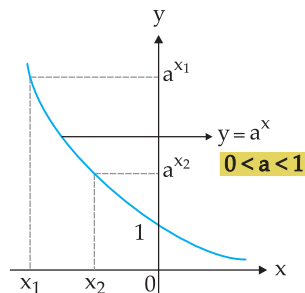
Assim, quando a base é um número real maior que 1 e, portanto, a função é crescente, e considerando-se que, quanto maior a potência, maior o seu expoente, então, o sentido da desigualdade entre as potências é o **mesmo sentido** da desigualdade entre os respectivos expoentes.



Portanto, para $a \in \mathbb{R}$ e $a > 1$, temos que:

$$\begin{aligned} a^{x_1} &> a^{x_2} \Rightarrow x_1 > x_2 \\ e \\ a^{x_1} &< a^{x_2} \Rightarrow x_1 < x_2 \end{aligned}$$

Por outro lado, quando a base é um número real entre 0 e 1 e, portanto, a função é decrescente, e considerando-se que, quanto maior a potência, menor o seu expoente, então, o sentido da desigualdade entre as potências deve ser **invertido** para a desigualdade entre os respectivos expoentes.



Portanto, para $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a < 1$, temos que:

$$\begin{aligned} a^{x_1} &> a^{x_2} \Rightarrow x_1 < x_2 \\ e \\ a^{x_1} &< a^{x_2} \Rightarrow x_1 > x_2 \end{aligned}$$

Exemplos

1º) Resolver a inequação: $3^{2x-5} > 3^{x+1}$

$$3^{2x-5} > 3^{x+1} \Rightarrow 2x - 5 > x + 1$$

$$\therefore x > 6$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x > 6\}$$

2º) Resolver a inequação: $9^{3x-2} < 9^{5x+6}$

$$9^{3x-2} < 9^{5x+6} \Rightarrow 3x - 2 < 5x + 6$$

$$\therefore x > -4$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x > -4\}$$

3º) Resolver a inequação: $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+7} > \left(\frac{1}{2}\right)^{7x-5}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+7} > \left(\frac{1}{2}\right)^{7x-5} \Rightarrow 4x + 7 < 7x - 5$$

$$\therefore -3x < -12 \Rightarrow x > 4$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x > 4\}$$

4º) Resolver a inequação: $\left(\frac{1}{4}\right)^{5x+2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{3x-1}$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{5x+2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{3x-1} \Rightarrow 5x + 2 < 3x - 1$$

$$2x < -3$$

$$x < -\frac{3}{2}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x < -\frac{3}{2}\}$$



Exercícios Resolvidos

01. Resolva as seguintes inequações exponenciais:

a) $2^x > 128$

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^x \geq \frac{125}{27}$

Resolução

a) $2^x > 128 \Leftrightarrow 2^x > 2^7$

Como a base é maior que 1, vem $x > 7$.

$S = \{x \in \mathbb{R} / x > 7\}$.

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^x \geq \frac{125}{27} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x \geq \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$

Como a base está compreendida entre 0 e 1, temos $x \leq -3$.

$S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -3\}$.

02. (ITA-SP) O domínio da função definida

por $y = \frac{1}{\sqrt{4^{x+2} - 4^{-x}}}$ é

a) $D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\}$

b) $D = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 1\}$

c) $D = \{x \in \mathbb{R} / x > -1\}$

d) $D = \emptyset$

e) n.d.a

Resolução

$4^{x+2} - 4^{-x} > 0$

$4^{x+2} > 4^{-x}$

$x + 2 > -x \Rightarrow 2x + 2 > 0$

$\Rightarrow x > -1$

$D = \{x \in \mathbb{R} / x > -1\}$

Resposta: C

03. (UEL-PR) Os números reais x são soluções da inequação $25^{1-x} < \frac{1}{5}$ se, e somente se:

a) $x > -\frac{3}{2}$

b) $x > \frac{3}{2}$

c) $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$

d) $x < \frac{3}{2}$

e) $x < -\frac{3}{2}$

Resolução

$25^{1-x} < \frac{1}{5} \Rightarrow (5^2)^{1-x} < (5)^{-1}$

$5^{2-2x} < 5^{-1}$ como a base é maior do que 1

$2 - 2x < -1 \Rightarrow -2x < -3 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$

Resposta: B

04. (PUC-MG) Se $f(x) = 4^{x+1}$ e $g(x) = 4^x$, a solução da inequação $f(x) > g(2-x)$ é:

a) $x > 0$

d) $x > 1,5$

b) $x > 0,5$

e) $x > 2$

c) $x > 1$

Resolução

$g(2-x) = 4^{2-x}$. Assim

$f(x) > g(2-x) \Rightarrow 4^{x+1} > 4^{2-x}$

Como a base é maior do que 1

$x + 1 > 2 - x \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

Resposta: B

05. (Mackenzie-SP) Em $\mathbb{R}$ o conjunto-solução da inequação $(3 + \sqrt{2})^x > -2$ é:

a) $\emptyset$

b) $\mathbb{R}_-$

c) $\mathbb{R}$

d) $\mathbb{R}_+$

e) Nenhuma das anteriores está correta.

Resolução

A função exponencial $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$ tem como imagem $\mathbb{R}_+$, logo para qualquer x ,

$(3 + \sqrt{2})^x > 0$ e, portanto, $(3 + \sqrt{2})^x > -2$.

Resposta: C

Capítulo 02. Logaritmos

John Napier (ou Nepper) foi o primeiro a publicar um trabalho sobre logaritmos, em 1614. O seu trabalho consistia em transformar as operações de multiplicação, divisão e radiciação em adições e subtrações usando as propriedades das potências. Com esse trabalho, Napier conseguiu impressionar Henry Briggs, professor em Oxford, e juntos (em 1615) discutem a possibilidade de aperfeiçoarem o método. Decidem preparar novas tabelas que teriam os logaritmos com base 10. Esse trabalho foi concluído por Briggs, pois Napier veio a morrer em 1617. Daí para a frente percebe-se a utilidade dos logaritmos nos cálculos numéricos, razão pela qual estaremos, neste nosso próximo capítulo, estudando um pouco de **Logaritmo**.

1. Definição

Dados os números reais N , a e α com $N > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$, dizemos que α é o expoente que colocamos em a para obtermos o número N . α é chamado *logaritmo* de N na base a .

$$\log_a N = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = N$$

Em que a nomenclatura usada é a seguinte:

N – logaritmando ou antilogaritmo

a – base

α – logaritmo

Exemplos

1º) $\log_2 16 = 4$, pois $2^4 = 16$

2º) $\log_3 9 = 2$, pois $3^2 = 9$

3º) $\log_{\frac{1}{4}} 4 = -1$, pois $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4$

4º) $\log_7 1 = 0$, pois $7^0 = 1$

5º) $\log_3 (-9) \Rightarrow$ não existe expoente que se coloque no 3 para obtermos resultado igual a (-9) .

6º) $\log_{(-2)} 8 \Rightarrow$ não existe expoente que se coloque no (-2) para obtermos resultado igual a 8.

7º) $\log_1 12 \Rightarrow$ não existe expoente que se coloque no 1 para obtermos resultado igual a 12.

Exemplos Resolvidos

1º exemplo

Determinar o valor de $\log_{\frac{1}{4}} 32$

Fazendo $\log_{\frac{1}{4}} 32 = \beta$, podemos aplicar a

definição: $\left(\frac{1}{4}\right)^\beta = 32$.

Passamos a ter uma equação exponencial, com resolução conhecida:

$$(2^{-2})^\beta = 2^5 \Rightarrow 2^{-2\beta} = 2^5 \Rightarrow -2\beta = 5$$

$$\therefore \beta = -\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\text{Então: } \log_{\frac{1}{4}} 32 = -\frac{5}{2}$$

2º exemplo

Determinar o valor de $\log_3 \sqrt{27}$.

Fazendo $\log_3 \sqrt{27} = \beta$, podemos aplicar a definição de logaritmo: $3^\beta = \sqrt{27}$.

Agora é só resolver essa equação exponencial:

$$3^\beta = \sqrt{(3^3)} \Rightarrow 3^\beta = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \beta = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\log_3 \sqrt{27} = \frac{3}{2}$$



2. Decorrências da Definição

Alguns logaritmos, em função da grande quantidade de vezes que nós vamos encontrá-los, devem ser conhecidos “na ponta da língua”. São logaritmos cujos resultados decorrem de maneira imediata da definição.

Consideradas satisfeitas todas as condições de existência, temos:

1ª decorrência: $\log_a 1 = 0$

Evidente, pois qualquer que seja a base a elevada ao expoente 0 apresenta resultado igual a 1.

2ª decorrência: $\log_a a = 1$

Evidente, pois qualquer que seja a base a elevada ao expoente 1 apresenta resultado igual a a .

3ª decorrência: $\log_a a^\beta = \beta$

Evidente, pois β é o expoente que devemos colocar na base a para obtermos o resultado a^β .

4ª decorrência: $a^{\log_a N} = N$

Vejamos a demonstração dessa 4ª decorrência.

Seja $\log_a N = m$, assim $a^m = N$ (I)

Logo $a^{\log_a N} = a^m$ (II)

Da comparação de (I) e (II), temos que se:

$$a^{\log_a N} = a^m \text{ e } a^m = N,$$

$$\text{então } a^{\log_a N} = N.$$

Exemplo de Aplicação

Determinar o valor de $2^{1+\log_2 5}$.

Pelo uso das propriedades das potências, temos: $2^{1+\log_2 5} = 2^1 \cdot 2^{\log_2 5}$.

Usando as decorrências da definição de logaritmos, temos: $2^{1+\log_2 5} = 2 \cdot 5 = 10$.

Obs.– A base 10 aparecerá com muita frequência no estudo dos logaritmos, assim indicaremos $\log_{10} x$ simplesmente por $\log x$.

Exercícios Resolvidos

01. Calcular, usando a definição de logaritmo:

a) $\log_2 \left(\frac{1}{16} \right)$

b) $\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2} \right)$

c) $\log_{4\sqrt{2}} 0,125$

Resolução

a) $\log_2 \left(\frac{1}{16} \right) = \alpha \Rightarrow 2^\alpha = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4} \Rightarrow \alpha = -4$

b) $\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2} \right) = \alpha \Rightarrow \left(\frac{2}{3} \right)^\alpha = \frac{3}{2} = \left(\frac{2}{3} \right)^{-1} \Rightarrow \alpha = -1$

c) $\log_{4\sqrt{2}} 0,125 = \alpha \Rightarrow (4\sqrt{2})^\alpha = 0,125$

$$(2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}})^\alpha = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$$

$$(2^{2+\frac{1}{2}})^\alpha = \frac{1}{2^3}$$

$$(2^{\frac{5}{2}})^\alpha = 2^{-3} \Rightarrow \frac{5}{2}\alpha = -3 \Rightarrow \alpha = -\frac{6}{5}$$

02. (UFRN)

O valor da expressão $\log_2 64 - \log_3 27$ é igual a:

a) 3

b) 13

c) 17

d) 31

e) 37

Resolução

$$\log_2 64 = \alpha \Rightarrow 2^\alpha = 64 = 2^6 \Rightarrow \alpha = 6$$

$$\log_3 27 = \beta \Rightarrow 3^\beta = 27 = 3^3 \Rightarrow \beta = 3$$

$$\log_2 64 - \log_3 27 = 6 - 3 = 3$$

Resposta: A

03. (ITA-SP)

$\log_2 16 - \log_4 32$ é igual a:

a) $\frac{1}{2}$ d) 4

b) $\frac{3}{2}$ e) 1

c) $\frac{1}{2 \cdot \log_4 2}$

Resolução

$$\log_2 16 = \alpha \Rightarrow 2^\alpha = 16 = 2^4 \Rightarrow \alpha = 4$$

$$\log_4 32 = \beta \Rightarrow 4^\beta = 32 \Rightarrow 2^{2\beta} = 2^5 \Rightarrow \beta = \frac{5}{2}$$

$$\log_2 16 - \log_4 32 = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$

Resposta: B

04. (UCS-RS)

O valor de $\log_{\frac{1}{3}} (\log_5 125)$ é:

a) 1

b) -3

c) 3

d) -1

e) $\frac{5}{3}$

Resolução

$$\log_5 125 = \alpha \Rightarrow 5^\alpha = 125 = 5^3 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$\text{Então: } \log_{\frac{1}{3}} (\log_5 125) = \log_{\frac{1}{3}} 3$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 3 = \beta \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^\beta = 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Rightarrow \beta = -1$$

Resposta: D

05. (Uneb-BA)

O número real x , tal que $\log_x \frac{9}{4} = \frac{1}{2}$, é:

a) $\frac{81}{16}$

d) $\frac{3}{2}$

b) $-\frac{3}{2}$

e) $-\frac{81}{16}$

c) $\frac{1}{2}$

Resolução

$$\log_x \frac{9}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = \frac{9}{4} \Rightarrow \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2$$

$$x = \frac{81}{16}$$

Resposta: A

06. Calcular:

a) $3^{\log_3 5}$

b) $\log_2 2 + \log_1 3^{(2+\log_3 5)}$

Resolução

a) $3^{\log_3 5} = 5$

b) $\log_2 2 + \log_{10} 1 + 3^{(2+\log_3 5)} =$

$$1 + 0 + \underbrace{3^2}_{9} \cdot \underbrace{3^{\log_3 5}}_5 = 1 + 0 + 45 = 46$$

3. Condições de Existência

Como já observamos nos exemplos anteriores, um logaritmo só é definido quando o **logaritmando** é um **número positivo** e a **base** é um **número positivo** e **diferente de 1**.

Assim, temos que, para ser verdadeira a sentença $\log_a N = \alpha$, devemos ter:

$$N > 0, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

$\log_3(-9) \Rightarrow$ não existe expoente que se coloque no 3 para obtermos resultado igual a (-9)

$\log_{(-2)} 8 \Rightarrow$ não existe expoente que se coloque no (-2) para obtermos resultado igual a 8.

$\log_1 12 \Rightarrow$ não existe expoente que se coloque no 1 para obtermos resultado igual a 12.



Exemplos de Aplicação

1º exemplo:

Para que valores existe $\text{Log}_7(3x-5)$?

Para que o logaritmo exista, devemos ter:

$$3x - 5 > 0 \Rightarrow x > \frac{5}{3}$$

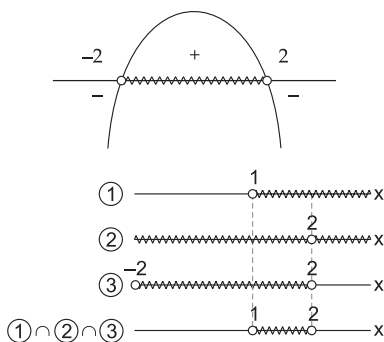
2º exemplo:

Determinar o domínio da função:

$$f(x) = \log_{(x-1)}(4-x^2)$$

Para determinarmos o domínio dessa função, devemos atender, simultaneamente, às seguintes condições:

$$\begin{cases} x-1 > 0 & (1) \\ x-1 \neq 1 & (2) \\ 4-x^2 > 0 & (3) \end{cases} \quad \begin{matrix} \textcircled{1} & x-1 > 0 & \textcircled{2} & x-1 \neq 1 & \textcircled{3} & -x^2+4 > 0 \\ & x > 1 & & x \neq 2 & & x^2-4 < 0 \\ & & & & & x = \pm 2 \end{matrix}$$



$$\therefore D = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 2\}$$

Exercícios Resolvidos

01. (PUC-RS) O conjunto solução da equação $\log_x(10+3x) = 2$, em $\mathbb{R}$, é:

- a) $\emptyset$ d) $\{-2, 5\}$
b) $\{-2\}$ e) $\{-5, 2\}$
c) $\{5\}$

Resolução

Condições de existência:

$$x > 0 \text{ e } x \neq 1$$

$$10 + 3x > 0 \Rightarrow 3x > -10 \Rightarrow x > -10/3$$

Utilizando a definição de logaritmo

$$10 + 3x = x^2 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \begin{cases} x = 5 \text{ ou} \\ x = -2 \text{ (n.c)} \end{cases}$$

$$S = \{5\}$$

Resposta: C

02. (FGV-RJ) O domínio da função

$$y = \log(-x^2 + 2x + 3) \text{ é:}$$

- a) $[-1, 3]$ d) $] -1, 3[$
b) $] -\infty, -1[\cup] 3, +\infty[$ e) $[-1, 3[$
c) $] -1, 3]$

Resolução

$$\begin{aligned} -x^2 + 2x + 3 > 0 \\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-2} \end{aligned} \quad \begin{matrix} \nearrow x' = 3 \\ \searrow x'' = -1 \end{matrix}$$



$$D = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 3\}$$

Resposta: D

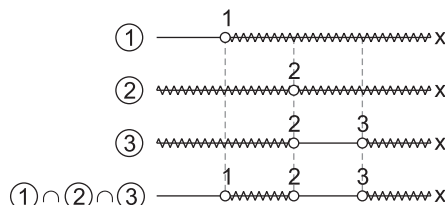
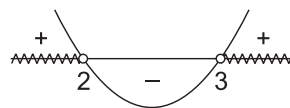
03. (UFSCar-SP) O domínio de definição da função $f(x) = \log_{x-1}(x^2 - 5x + 6)$ é:

- a) $x < 2$ ou $x > 3$ d) $x < 1$ ou $x > 3$
b) $2 < x < 3$ e) $1 < x < 3$
c) $1 < x < 2$ ou $x > 3$

Resolução

$$f(x) = \log_{x-1}(x^2 - 5x + 6)$$

$$\begin{cases} x-1 > 0 & (1) \\ x-1 \neq 1 & (2) \\ x^2-5x+6 > 0 & (3) \end{cases} \quad \begin{matrix} \textcircled{1} & x-1 > 0 & \textcircled{2} & x \neq 2 & \textcircled{3} & x^2-5x+6 > 0 \\ & x > 1 & & & & x^2-5x+6 = 0 \\ & & & & & x = 2 \text{ ou } x = 3 \end{matrix}$$



$$\therefore D = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 2 \text{ ou } x > 3\}$$

Resposta: C

4. Propriedades

A partir da definição, podemos desenvolver algumas utilizações frequentes dos logaritmos e transformá-las em propriedades que passaremos a estudar.

Considerando os números reais positivos a , N e M , com $a \neq 1$ e ainda os números naturais não-nulos n e m , temos:

$$P_1: \log_a(N \cdot M) = \log_a N + \log_a M.$$

Demonstração

Sejam:

$$\log_a(N \cdot M) = \alpha \Rightarrow a^\alpha = N \cdot M \quad (I)$$

$$\log_a N = \beta \Rightarrow a^\beta = N \quad (II)$$

$$\log_a M = \gamma \Rightarrow a^\gamma = M \quad (III)$$

Comparando as equações (I), (II) e (III), temos:

$$a^\alpha = N \cdot M \Rightarrow a^\alpha = a^\beta \cdot a^\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^\alpha = a^{\beta+\gamma} \Rightarrow \alpha = \beta + \gamma.$$

Portanto:

$$P_1: \log_a(N \cdot M) = \log_a N + \log_a M$$

O logaritmo do produto de dois ou mais fatores numa determinada base a é igual à soma dos logaritmos desses fatores na base a .

$$P_2: \log_a(N:M) = \log_a N - \log_a M.$$

Demonstração

Sejam:

$$\log_a(N:M) = \alpha \Rightarrow a^\alpha = N:M \quad (I)$$

$$\log_a N = \beta \Rightarrow a^\beta = N \quad (II)$$

$$\log_a M = \gamma \Rightarrow a^\gamma = M \quad (III)$$

Comparando as equações (I), (II) e (III), temos:

$$a^\alpha = N:M \Rightarrow a^\alpha = a^\beta : a^\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^\alpha = a^{\beta-\gamma} \Rightarrow \alpha = \beta - \gamma$$

Portanto:

$$P_2: \log_a(N:M) = \log_a N - \log_a M$$

O logaritmo do quociente de dois números numa determinada base a é igual à diferença entre os logaritmos do dividendo e do divisor, respectivamente, na base a .

Observação – Vamos observar uma aplicação particular da 2ª propriedade. Vamos calcular o logaritmo do inverso de um número real maior que zero:

$$\log_a\left(\frac{1}{N}\right) = \log_a 1 - \log_a N \quad (P_2)$$

Como logaritmo do número 1 em qualquer base é igual a zero, temos:

$$\log_a\left(\frac{1}{N}\right) = -\log_a N.$$

Assim, temos que o logaritmo do inverso de um número real positivo, numa determinada base a , é igual ao logaritmo do número na base a , porém com o sinal trocado. O logaritmo do inverso de um número real positivo é chamado de **cologaritmo**.

$$\text{colog}_a N = -\log_a N = \log_a\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$P_3: \log_a N^m = m \cdot \log_a N$$

Demonstração

Sejam:

$$\log_a N^m = \alpha \Rightarrow a^\alpha = N^m \quad (I)$$

$$\log_a N = \beta \Rightarrow a^\beta = N \quad (II)$$

Comparando as equações (I) e (II), temos:

$$a^\alpha = N^m \Rightarrow a^\alpha = (a^\beta)^m \Rightarrow a^\alpha = a^{m \cdot \beta} \Rightarrow$$

$$\alpha = m \cdot \beta$$

Portanto:

$$P_3: \log_a N^m = m \cdot \log_a N$$



O logaritmo de uma potência numa determinada base a é igual ao produto do expoente da potência pelo logaritmo da base da potência na base a .

$$P_4: \log_a(\sqrt[n]{M}) = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \log_a M$$

Demonstração

Podemos dizer que a propriedade nº 4 é uma decorrência da propriedade nº 3, visto que $\sqrt[n]{M}$ é o mesmo que $M^{1/n}$ e, assim, $\log_a(\sqrt[n]{M}) = \log_a M^{1/n}$

Portanto:

$$P_4: \log_a(\sqrt[n]{M}) = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \log_a M$$

O logaritmo da raiz n -ésima de um número numa determinada base a é igual ao produto do inverso do índice da raiz pelo logaritmo do número na base a .

$$P_5: \log_{a^n} M = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \log_a M$$

Demonstração

Sejam:

$$\log_{a^n} M = \alpha \Rightarrow (a^n)^\alpha = M \quad (I)$$

$$\log_a M = \beta \Rightarrow a^\beta = M \quad (II)$$

Comparando as equações (I) e (II), temos:

$$(a^n)^\alpha = a^\beta \Rightarrow a^{n\alpha} = a^\beta \Rightarrow n \cdot \alpha = \beta \Rightarrow$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \beta$$

Portanto:

$$P_5: \log_{(a^n)} M = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \log_a M$$

O logaritmo de um número na base a^n é igual ao produto do inverso de n pelo logaritmo do número na base a .

Exemplo de Aplicação

Se $\log_2 a = m$, $\log_2 b = n$ e $\log_2 c = p$, calcular o valor de:

$$\log_2 \left(\frac{a^3 \cdot \sqrt{b}}{c^4} \right)$$

Resolução

$$\begin{aligned} \log_2 \left(\frac{a^3 \cdot \sqrt{b}}{c^4} \right) &= \log_2 a^3 + \log_2 \sqrt{b} - \log_2 c^4 = \\ &= 3\log_2 a + \frac{1}{2}\log_2 b - 4\log_2 c = \end{aligned}$$

$$3m + \frac{1}{2}n + 4p = \frac{6m + n + 8p}{2}$$

Exercícios Resolvidos

01. (Vunesp) Sejam x e y números reais, com $x > y$. Se $\log_3(x - y) = m$ e $(x + y) = 9$, determine:

- o valor de $\log_3(x + y)$;
- $\log_3(x^2 - y^2)$, em função de m .

Resolução

$$a) \log_3(x + y) = \log_3 9 = 2.$$

$$\begin{aligned} b) \log_3(x^2 - y^2) &= \log_3[(x + y) \cdot (x - y)] = \\ &= \log_3(x + y) + \log_3(x - y) = m + 2. \end{aligned}$$

02. Se $\log 2 = x$ e $\log 3 = y$, então $\log 72$ é igual a:

- $2x + 3y$
- $3x + 2y$
- $3x - 2y$
- $2x - 3y$
- $x + y$

Resolução

$$\begin{aligned} \log 72 &= \log(2^3 \cdot 3^2) = \log 2^3 + \log 3^2 = \\ &= 3 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 = 3x + 2y \end{aligned}$$

Resposta: B

03. (Fuvest-SP) Se $x = \log_4 7$ e $y = \log_{16} 49$, então $x - y$ é igual a:

- a) $\log_4 7$
- b) $\log_{16} 7$
- c) 1
- d) 2
- e) 0

Resolução

$$\log_{16} 49 = \log_{4^2} 7^2 = \frac{2}{2} \cdot \log_4 7 = \log_4 7 = x$$

$$\therefore x - y = x - x = 0$$

Resposta: E

04. (UFF-RJ) Sendo $a = 11$, $\log b = 0,5$, $\log c = 6$ e $\log \left(\frac{ab^2}{\sqrt[3]{c}} \right) = x$, o valor de x é:

- a) 5
- b) 10
- c) 15
- d) 20
- e) 25

Resolução

$$\log \left(\frac{ab^2}{\sqrt[3]{c}} \right) = \log(a \cdot b^2) - \log \sqrt[3]{c} =$$

$$\log a + \log b^2 - \log c^{\frac{1}{3}} =$$

$$\log a + 2 \cdot \log b - \frac{1}{3} \log c =$$

$$= 11 + 2 \cdot 0,5 - \frac{1}{3} \cdot 6 = 10$$

Resposta: B

5. Equação Logarítmica

Equação logarítmica é toda a igualdade que apresenta incógnita no logaritmando, na base do logaritmo ou no próprio logaritmo.

Vamos desenvolver o nosso aprendizado através de exemplos resolvidos.

1º Modelo

Usando a definição.

1º exemplo

Resolver a equação: $\log_3(x - 5) = 2$

- **condição de existência:** $x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5$.
- pela definição: $x - 5 = 3^2 \Rightarrow x - 5 = 9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = 14$$

- **verificação:** como o valor obtido atende à condição de existência, 14 representa a solução da equação. Assim:

$$S = \{14\}$$

2º exemplo

Resolver a equação: $\log_x 16 = 2$

- **condições de existência:** $x > 0$ e $x \neq 1$
- pela definição: $x^2 = 16 \Rightarrow x = -4$ ou $x = 4$
- **verificação:** somente $x = 4$ atende às condições de existência. Assim:

$$S = \{4\}$$

2º Modelo

Igualdade de dois logaritmos de mesma base

Resolver a equação: $\log_7(x^2 - 4) = \log_7(3x)$

- **condições de existência:**

$$x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x < -2 \text{ ou } x > 2$$

$$3x > 0 \Rightarrow x > 0.$$

$$\therefore x > 2$$

- usando o fato de que a função logarítmica é injetora, temos que se $\log_7(x^2 - 4) = \log_7(3x)$, então $x^2 - 4 = 3x$. Resolvendo essa equação do 2º grau, temos: $x = -1$ ou $x = 4$.
- **verificação:** somente $x = 4$ atende às condições de existência. Assim:

$$S = \{4\}$$

3º Modelo

Usando mudança de variável.

Resolver a equação:

$$(\log x)^2 - \log x - 2 = 0$$



- **condição de existência:** $x > 0$.
fazendo $\log x = y$, temos: $y^2 - y - 2 = 0$.
Resolvendo-se essa equação do 2º grau, teremos $y = -1$ ou $y = 2$.

Como $\log x = y$, temos

$$\log x = -1 \Rightarrow x = 10^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{10} \text{ ou}$$

$$\log x = 2 \Rightarrow x = 10^2 \Rightarrow x = 100$$

- **verificação:** como os valores obtidos atendem as condições de existência, $\frac{1}{10}$ e 100 são as soluções dessa equação.
Assim:

$$S = \left\{ \frac{1}{10}; 100 \right\}$$

4º) Modelo

Utilizando as propriedades.

Resolver a equação:

$$\log_4 3 + \log_4 (x - 2) = \log_4 9$$

- **condição de existência:** $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$.
- usando a propriedade da soma de logaritmos de mesma base, temos:

$$\log_4 [3(x - 2)] = \log_4 9 \Rightarrow 3(x - 2) = 9 \Rightarrow$$

$$3x - 6 = 9 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$$

- **verificação:** como o valor obtido atende à condição de existência, 5 é a solução dessa equação. Assim:

$$S = \{5\}$$

Existe ainda um 5º modelo que será apresentado no próximo módulo.

Exercícios Resolvidos

01. (PUC-SP) Um estudante quer resolver a equação $2^x = 5$, utilizando uma calculadora que possui a tecla $\log x$. Para obter um valor aproximado de x , o estudante deverá usar a calculadora para obter os seguintes números:

- $\log 2$, $\log 5$ e $\log 5 - \log 2$
- $\log 2$, $\log 5$ e $\log 5 : \log 2$
- $\log 2$, $\log 5$ e $\log 25$
- $5/2$ e $\log 5/2$
- $\sqrt{5}$ e $\log \sqrt{5}$

Resolução

Aplicando logaritmo com base 10 nos dois membros temos:

$$\log 2^x = \log 5$$

$$x \cdot \log 2 = \log 5 \Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 2}$$

Resposta: B

02. (FGV-SP) A equação logarítmica

$$\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) = 3 \text{ admite:}$$

- uma única raiz irracional.
- duas raízes opostas.
- duas raízes cujo produto é -4 .
- uma única raiz e negativa.
- uma única raiz e maior do que 2.

Resolução

Condição de existência:

$$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1; x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1.$$

Assim $x > -1$

$$\log_2(x + 1) \cdot (x - 1) = 3$$

$$\log_2(x^2 - 1) = 3 \Rightarrow x^2 - 1 = 2^3 \Rightarrow x^2 - 1 = 8$$

$$x^2 = 9 \begin{cases} x = 3 \\ \text{ou} \\ x = -3 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

$$x = 3$$

Resposta: E

03. (Cesgranrio-RJ) Se $\log x$ representa o logaritmo decimal do número positivo x , a soma das raízes de $\log^2 x - \log x^2 = 0$ é:

- -1
- 1
- 20
- 100
- 101

Resolução

Condição de existência: $x > 0$

$$\log^2 x - \log x^2 = 0 \Rightarrow \log^2 x - 2 \log x = 0$$

Fazendo $\log x = y$, obteremos:

$$y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y(y - 2) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } y = 2$$

$$\log x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\log x = 2 \Rightarrow x = 100$$

$\therefore$ a soma das raízes será 101. $S = \{101\}$

Resposta: E

6. Mudança de Base

Freqüentemente nos deparamos com situações em que conhecemos o logaritmo de um número numa determinada base e precisamos utilizar o logaritmo desse número numa outra base.

Propriedade

Sejam a e b dois números reais positivos e diferentes de 1 e N um número real positivo, temos:

$$\log_a N = \frac{(\log_b N)}{(\log_b a)}$$

O logaritmo de um número numa determinada base a é igual ao logaritmo desse número numa outra base b , dividido pelo logaritmo da **base antiga** na **nova base**.

Outra forma de se escrever a equação acima é:

$$\log_b a \cdot \log_a N = \log_b N$$

Consequência

Consideremos dois números a e N , reais, positivos e diferentes de 1.

$$\log_a N = \frac{(\log_N N)}{(\log_N a)}$$

Como logaritmo que tem logaritmando igual à base é sempre igual a 1, temos:

$$\log_a N = \frac{1}{\log_N a}$$

Observação

Em muitas das aplicações dos logaritmos são utilizados como base os números 10 e e .

Os logaritmos de base 10, são os chamados **logaritmos decimais**. Esse sistema de logaritmos teve grande importância na simplificação de cálculos, principalmente na Astronomia, sendo o matemático inglês Henry Briggs (1561-1639) um dos primeiros a reconhecer a importância da descoberta dos logaritmos e o primeiro a utilizar o número 10 como a melhor base para as **tábuas** de

logaritmos. Os logaritmos decimais são também chamados de **logaritmos de Briggs**. Para maior facilidade de representação, convencionamos, nos logaritmos decimais, **não** ser necessária a colocação da base 10. Assim, para efeito de notação, $\log_{10} N$ pode ser representado por $\log N$.

Os logaritmos de base e são muito empregados em Física, Biologia, Química, Economia, e são denominados **logaritmos neperianos**, em homenagem ao inglês John Napier (ou Nepper) (1550-1617), o primeiro estudioso dos logaritmos. A representação do logaritmo neperiano de um certo número real positivo x é: $\ln x$. Os logaritmos neperianos são também chamados de **logaritmos naturais**.

Nota

O número e , que é a base do sistema neperiano de logaritmos, é um número irracional de valor 2,7182818284590 ... , é chamado de número de Euler, pois pode ser obtido a partir da seqüência de Euler, cujo termo geral pode ser visto a seguir:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Quanto maior for o valor atribuído a n , mais próximo de e será o resultado. No limite, quando n estiver **tendendo** ao infinito, o valor do termo a_n estará **tendendo** a e ($e = 2,7182818284590...$).

Exemplo de Aplicação

Determinar $m = \log_7 2$ em função de $n = \log_{14} 2$.

Resolução

$$m = \log_7 2 = \frac{\log_{14} 2}{\log_{14} 7} = \frac{\log_{14} 2}{\log_{14} \left(\frac{14}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\log_{14} 2}{\log_{14} 14 - \log_{14} 2} = \frac{n}{1 - n}$$

$$m = \frac{n}{1 - n}$$

Podemos agora apresentar o nosso último modelo de equação logarítmica.



5º) Modelo

Aplicando a mudança de base, resolver a equação: $\log_4 x + \log_8 x - \log_2 x = -1$

- Condição de existência: $x > 0$
- Usando mudança de base, vamos escrever esses logaritmos na base 2:

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \frac{\log_2 x}{\log_2 8} - \log_2 x = -1$$

Como: $\log_2 4 = 2$ e $\log_2 8 = 3$, temos:

$$\frac{\log_2 x}{2} + \frac{\log_2 x}{3} - \log_2 x = -1$$

Multiplicando-se, membro a membro, a equação por 6, que é o mmc (2, 3), temos:

$$3\log_2 x + 2\log_2 x - 6\log_2 x = -6 \Rightarrow -\log_2 x = -6 \Rightarrow \log_2 x = 6 \Rightarrow x = 2^6 \Rightarrow x = 64$$

- **Verificação:** como o valor obtido atende a condição de existência, 64 é a solução dessa equação.

Assim: $S = \{64\}$

Exercício de Aplicação

Resolva a equação: $\log_2 x + \frac{1}{\log_x 2} = 2$

Resolução

$$C.E = \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_x 2} = 2 \Rightarrow$$

$$\log_2 x + \log_2 x = 2 \Rightarrow 2\log_2 x = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2^1 \Rightarrow x = 2$$

$$S = \{2\}$$

Exercícios Resolvidos

01. (FCMSC-SP) São dados: $\log_{15} 3 = a$ e $\log_{15} 2 = b$. O valor de $\log_{10} 2$ é:

a) $\frac{a}{1-a+b}$

b) $\frac{b}{1-a+b}$

c) $\frac{b}{1+a-b}$

d) $\frac{a}{1+a-b}$

e) $\frac{b}{a-b-1}$

Resolução

$$\log_{10} 2 = \frac{\log_{15} 2}{\log_{15} 10} = \frac{\log_{15} 2}{\log_{15} (5 \cdot 2)} \Rightarrow$$

$$\log_{10} 2 = \frac{\log_{15} 2}{\log_{15} 5 + \log_{15} 2} = \frac{\log_{15} 2}{\log_{15} \frac{15}{3} + \log_{15} 2} \Rightarrow$$

$$\log_{10} 2 = \frac{\log_{15} 2}{\log_{15} 15 - \log_{15} 3 + \log_{15} 2} \Rightarrow$$

$$\log_{10} 2 = \frac{b}{1-a+b}$$

Resposta: B

02. (FGV-SP) O produto $(\log_9 2) \cdot (\log_2 5) \cdot (\log_5 3)$ é igual a:

a) 0 d) 30

b) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{10}$

c) 10

Resolução

$$x = \log_9 2 \cdot \log_2 5 \cdot \log_5 3 \Rightarrow x = \log_9 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Resposta: B

03. A expressão $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 10 + \frac{1}{\log_5 4}$

é equivalente a:

a) $\log_2 50$ d) $\log_2 2\sqrt{2}$

b) $\log_2 10\sqrt{5}$ e) $\log_2 \sqrt{2}$

c) $\log_2 5\sqrt{10}$

Resolução

$$\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 10 = \log_2 10 \text{ e}$$

$$\frac{1}{\log_5 4} = \log_4 5 = \log_{2^2} 5 = \frac{1}{2} \log_2 5$$

Portanto

$$\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 10 + \frac{1}{\log_5 4} =$$

$$\log_2 10 + \frac{1}{2} \log_2 5 \Rightarrow$$

$$\log_2 10 + \log_2 \sqrt{5} = \log_2 10\sqrt{5}$$

Resposta: B

7. Função Logarítmica

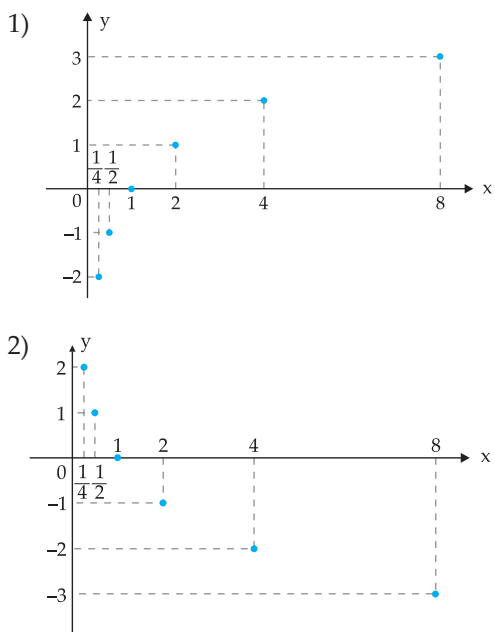
7.1. Preliminares

Vamos observar as duas tabelas a seguir que apresentam pares ordenados cujos primeiros elementos são números reais positivos e os segundos elementos são logaritmos cujos logaritmandos são os primeiros elementos de cada par ordenado, ou seja, cada par ordenado pode ser genericamente apresentado por $(x; \log_a x)$, em que a é um número real maior que zero e diferente de um.

Tabela 1	
x	$\log_2 x$
1/4	-2
1/2	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

Tabela 2	
x	$\log_{1/2} x$
1/4	2
1/2	1
1	0
2	-1
4	-2
8	-3

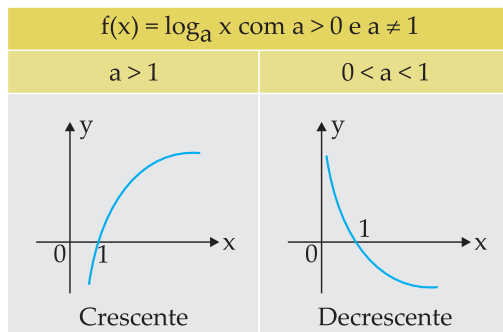
Representando-se os pares $(x; \log_2 x)$ e $(x; \log_{1/2} x)$ no plano cartesiano, teremos os seguintes gráficos:



Se pensarmos na possibilidade de, ao invés de utilizar apenas alguns valores reais de x , usarmos todo o conjunto dos números reais, poderíamos pensar nesses pares ordenados formando uma função real. Essa função é a chamada **função logarítmica** e ela será objeto de nosso estudo neste item.

7.2. Apresentação da Função Logarítmica

- **Sentença:** f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ / $f(x) = \log_a x$, com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

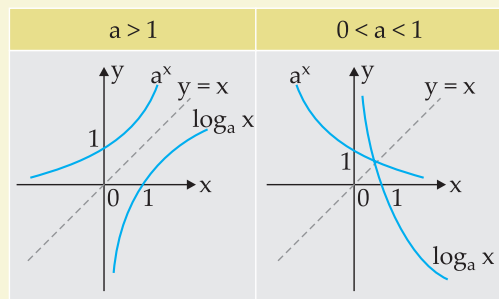




- **Domínio:** $D = \mathbb{R}_+^*$
- **Contradomínio:** $\mathbb{R}$
- **Conjunto Imagem:** $\mathbb{R}$
- **Monotonicidade** – A função logarítmica é **crescente** quando a base do logaritmo é um número real maior que 1 e **decrescente** quando a base do logaritmo apresenta um valor real entre 0 e 1.

Observação 1

Podemos notar que o gráfico da função logarítmica é simétrico ao gráfico da função exponencial, em relação à reta de equação $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares ou ainda função identidade). Isso nos leva à conclusão de que a função logarítmica é a função inversa da função exponencial, para domínio e contradomínio convenientemente definidos.



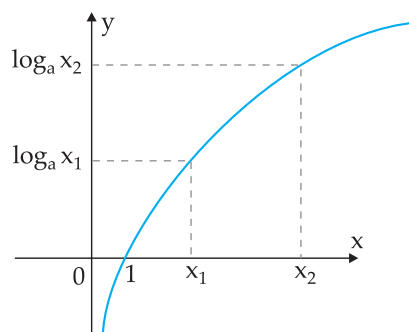
Observação 2

A função logarítmica é classificada como função injetora.

8. Inequações Logarítmicas

No estudo das inequações logarítmicas, é muito importante o fato de ser essa função monotônica, ou seja, sempre crescente (base real maior que 1) ou sempre decrescente (base real entre 0 e 1).

Assim, quando a base é um número real maior que 1 e, portanto, a função é crescente, temos que, quanto maior o logaritmo, maior o logaritmando e, então, o sentido da desigualdade entre os logaritmos é o mesmo sentido da desigualdade entre os respectivos logaritmandos.



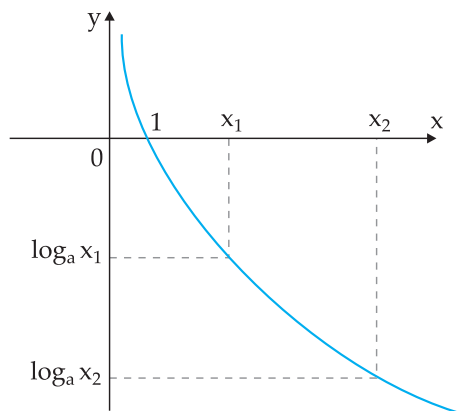
Portanto, para $a \in \mathbb{R}$ e $a > 1$, temos que:

$$\log_a(x_1) > \log_a(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2$$

e

$$\log_a(x_1) < \log_a(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$$

Por outro lado, quando a base é um número real entre 0 e 1 e, portanto, a função é decrescente, temos que, quanto maior o logaritmo, menor o logaritmando e, então, o sentido da desigualdade entre os logaritmos deve ser invertido para a desigualdade entre os respectivos logaritmandos.



Portanto, para $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a < 1$, temos que:

$$\begin{aligned} \log_a(x_1) < \log_a(x_2) &\Rightarrow x_1 > x_2 \\ \text{e} \\ \log_a(x_1) > \log_a(x_2) &\Rightarrow x_1 < x_2 \end{aligned}$$

Vamos, na sequência, resolver algumas inequações logarítmicas que nos vão servir de modelo para a resolução dos exercícios propostos.

1º Modelo

Comparando dois logaritmos de mesma base.

Exemplo

Resolver a inequação: $\log(2x-4) < \log(x+7)$

- Condições de existência:

$$2x-4 > 0 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2$$

$$x+7 > 0 \Rightarrow x > -7$$

$$\therefore x > 2$$

- Comparando os logaritmos:

$$\log(2x-4) < \log(x+7) \Rightarrow$$

$$2x-4 < x+7$$

$$\therefore x < 11$$

(devemos observar que o sentido da desigualdade foi conservado, pois a base, que é 10, é maior que 1).

- Verificação** – As soluções reais menores que 11 devem se submeter às exigências das condições de existência. Assim:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 11\}$$

2º Modelo

Comparando um logaritmo com um número real.

Resolver a inequação: $\log_2(x-3) < 2$

- Condição de existência: $x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$
- Escrevendo o número real 2 na forma de logaritmo, vamos observar a sequência de transformações:

$$2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot \log_2 2 = \log_2 2^2 = \log_2 4$$

$$\text{e, então, } \log_2(x-3) < 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2(x-3) < \log_2 4$$

$\therefore x-3 < 4$ (devemos observar que o sentido da desigualdade foi conservado, pois a base, que é 2, é maior que 1). Finalmente: $x < 7$.

- Verificação** – As soluções reais menores que 7 devem se submeter às exigências das condições de existência. Assim:

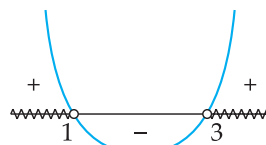
$$S = \{x \in \mathbb{R} / 3 < x < 7\}$$

3º Modelo

Utilizando mudança de variável, resolva

a inequação: $(\log_3 x)^2 - 4 \cdot \log_3 x + 3 > 0$

- Condição de existência: $x > 0$
- Fazendo $\log_3 x = y$, temos: $y^2 - 4y + 3 > 0$. Resolvendo-se essa inequação do 2º grau,



temos: $y < 1$ ou $y > 3$.

Como $\log_3 x = y$, temos:

$$\log_3 x < 1 \Rightarrow \log_3 x < \log_3 3 \Rightarrow x < 3$$

ou

$$\log_3 x > 3 \Rightarrow \log_3 x > \log_3 27 \Rightarrow x > 27$$

- Verificação** – Confrontando as soluções obtidas com a condição de existência, temos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 3 \text{ ou } x > 27\}$$

4º Modelo

Variável na base

Exemplo

Resolver a inequação: $\log_{(x-1)} 7 < \log_{(x-1)} 5$

- Condições de existência: $x-1 > 0$ e $x-1 \neq 1$
 $\therefore x > 1$ e $x \neq 2$



- **Resolução** – É certo que $7 > 5$, porém $\log_{(x-1)} 7 < \log_{(x-1)} 5$. Logo, existe uma inversão no sentido da desigualdade entre os logaritmandos e os logaritmos. Então, a base $x - 1$ é um número compreendido no intervalo real de 0 a 1. Assim,

$$0 < x - 1 < 1 \Rightarrow 1 < x < 2$$

- **Verificação** – Considerando que os valores obtidos atendem às condições de existência, temos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 2\}$$

5º Modelo

Utilizando as propriedades, resolver a inequação: $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} (x - 2) > -3$

- Condição de existência: $x > 0$ e $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

Como -3 pode ser escrito como $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$, temos:

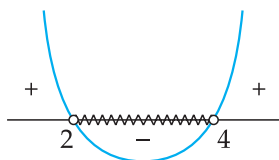
$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} (x - 2) > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} (x - 2) > \log_{\frac{1}{2}} 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} [x(x - 2)] > \log_{\frac{1}{2}} 8 \Rightarrow x(x - 2) < 8$$

(Devemos observar que o sentido da desigualdade entre os logaritmandos foi invertido, pois a base é um número real entre 0 e 1.)

Com $x(x - 2) < 8$, temos a inequação do 2º grau $x^2 - 2x - 8 < 0$, cuja resolução nos fornece os valores reais, tais que $-2 < x < 4$.



- **Solução** – A intersecção entre os intervalos reais $-2 < x < 4$ e $x > 2$ vai, finalmente, fornecer-nos o conjunto solução dessa equação. Assim,

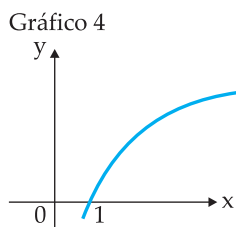
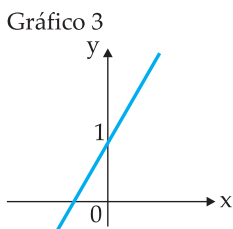
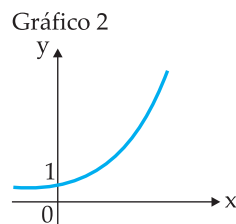
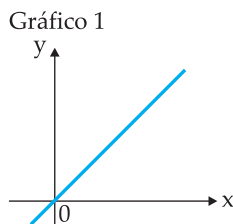
$$S = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 4\}$$

Exercícios Resolvidos

01. (UFPE) Considere as seguintes funções e os gráficos abaixo:

$$f_1(x) = 10^x, \quad f_2(x) = \log_{10} x, \quad f_3(x) = f_1[f_2(x)],$$

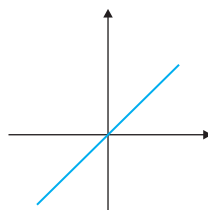
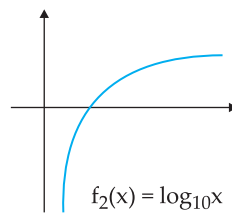
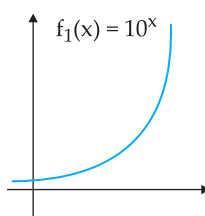
$$f_4(x) = 2f_3 + 1$$



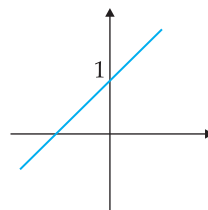
Assinale a alternativa que completa corretamente a frase “Os gráficos de f_1 , f_2 , f_3 e f_4 são, respectivamente,

- | | |
|-----------------|-----------------|
| a) 1, 2, 3 e 4” | d) 4, 2, 1 e 3” |
| b) 2, 4, 1 e 3” | e) 4, 2, 3 e 1” |
| c) 2, 4, 3 e 1” | |

Resolução



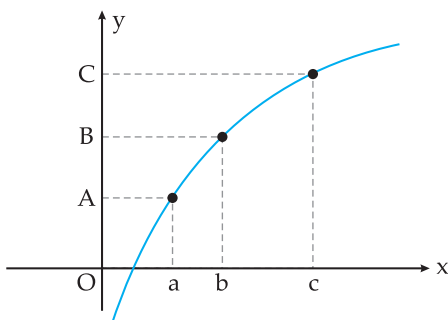
$$f_3(x) = f_1[f_2(x)] = x$$



$$f_4(x) = 2x + 1$$

Resposta: B

02. (Vunesp) A figura representa o gráfico da função $y = \log_{10} x$.



Sabe-se que $AO = BC$. Então, pode-se afirmar que:

- a) $\log_a b = c$
- b) $a + b = c$
- c) $a^c = b$
- d) $a \cdot b = c$
- e) $10^a + 10^b = 10^c$

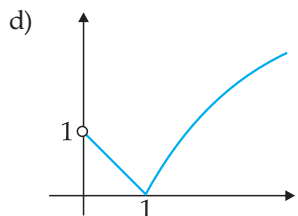
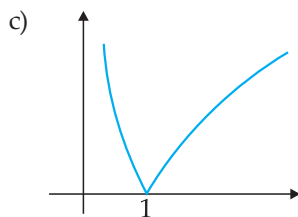
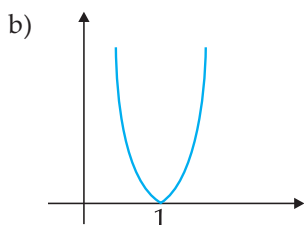
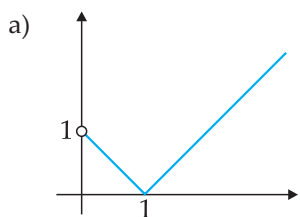
Resolução

$$OA = BC \Rightarrow y_A - y_O = y_C - y_B \Rightarrow \Rightarrow \log a - 0 = \log c - \log b$$

$$\log a = \log \frac{c}{b} \Rightarrow a = \frac{c}{b} \Rightarrow a \cdot b = c$$

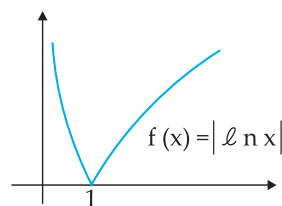
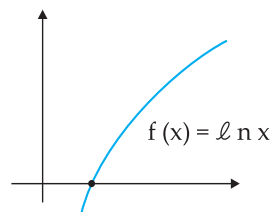
Resposta: D

03. (Unifor-CE) O gráfico de $f(x) = |\log x|$, $x > 0$ está melhor representado no item:



Resolução

$\log_e x = \log_e x$, em que $e = 2,718...$



Resposta: C

04. (UFMT) O conjunto solução da inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 x} < \left(\frac{1}{2}\right)^3$ é:

- a) $\mathbb{R}$
- b) $\{x \in \mathbb{R} / x < 8\}$
- c) $\{x \in \mathbb{R} / x < 3\}$
- d) $\{x \in \mathbb{R} / x > 3\}$
- e) $\{x \in \mathbb{R} / x > 8\}$



Resolução

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 x} < \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\log_2 x > 3 \Rightarrow \log_2 x > \log_2 8 \Rightarrow x > 8$$

Condição de existência: $x > 0$

$$\begin{array}{l} x > 8 \\ \rightarrow e \\ x > 0 \end{array} \rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / x > 8\}$$

05. Seja $f(x) = -\log_{1/2}(x^2 - 1)$. Determine os valores reais de x para os quais:

a) $f(x)$ existe

b) $f(x) < 3$

Resolução

$$a) f(x) \text{ existe} \Leftrightarrow -\log_{1/2}(x^2 - 1) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x > 1$$

$$b) f(x) < 3 \Leftrightarrow -\log_{1/2}(x^2 - 1) < 3 \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 1) < 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 1) < \log_2 2^3 \Leftrightarrow 0 < x^2 - 1 < 2^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 < x^2 < 9 \quad \left| \begin{array}{l} -3 < x < -1 \\ \text{ou} \\ 1 < x < 3 \end{array} \right.$$

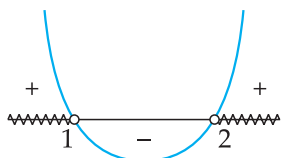
06. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação:

$$\log^2 x - 3 \log x + 2 > 0$$

Resolução

Condição de existência: $x > 0$

Fazendo $\log x = m$, temos: $m^2 - 3m + 2 > 0$



Assim, $m < 1$ ou $m > 2$, ou seja:

$$\left\{ \begin{array}{l} \log x < 1 \Rightarrow \log x < \log 10 \Rightarrow x < 10 \\ \log x > 2 \Rightarrow \log x > \log 100 \Rightarrow x > 100 \end{array} \right.$$

Portanto, $V = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 10 \text{ ou } x > 100\}$

9. Problemas com Logaritmos

Com o surgimento, desenvolvimento e popularização das calculadoras, a importância dos logaritmos como ferramenta de cálculo diminuiu.

Todavia, as aplicações dos logaritmos em praticamente todas as ciências são ainda muito vastas.

Selecionamos problemas de vestibulares para mostrar algumas dessas aplicações.

Exercícios Resolvidos

01. (Vunesp) Os biólogos dizem que há uma alometria entre duas variáveis, x e y , quando é possível determinar duas constantes, c e n , de maneira que $y = c \cdot x^n$. Nos casos de alometria, pode ser conveniente determinar c e n por meio de dados experimentais. Consideremos uma experiência hipotética na qual se obtiveram os dados da tabela a seguir.

Supondo que haja uma relação de alometria entre x e y e considerando $\log 2 = 0,301$, determine o valor de n .

X	Y
2	16
20	40

Resolução

$$y = c \cdot x^n$$

$$16 = c \cdot 2^n$$

$$\log 16 = \log c \cdot 2^n$$

$$\log 2^4 = \log c + \log 2^n$$

$$4 \cdot \log 2 = \log c + n \cdot \log 2 \quad (I)$$

$$40 = c \cdot (20)^n$$

$$\log 40 = \log [c \cdot (20)^n]$$

$$\log 4 \cdot 10 = \log c + \log (20)^n$$

$$\log 4 + \log 10 = \log c + n \cdot \log 20$$

$$\log 2^2 + 1 = \log c + n \cdot \log (2 \cdot 10)$$

$$2 \cdot \log 2 + 1 = \log c + n \cdot (\log 2 + \log 10)$$

$$2 \cdot \log 2 + 1 = \log c + n \cdot \log 2 + n \text{ (II)}$$

Fazendo (I) – (II), temos:

$$2 \cdot \log 2 - 1 = -n$$

$$n = 1 - 2 \cdot \log 2 = 0,398$$

Resposta: $n = 0,398$

02. O anúncio de certo produto aparece diariamente num certo horário na televisão. Após t dias do início da exposição, o número de pessoas (y) que ficam conhecendo o produto é dado por $y = 3 - 3 \cdot (0,95)^t$, onde y é dado em milhões de pessoas.

Para que valores de t teremos pelo menos 1,2 milhão de pessoas conhecendo o produto?

Resolução

$$y \geq 1,2 \Rightarrow 3 - 3 \cdot (0,95)^t \geq 1,2 \Rightarrow -3 \cdot (0,95)^t \geq -1,8$$

$$(0,95)^t \leq 0,6$$

$$\log_{0,95} (0,95)^t \geq \log_{0,95} 0,6 \text{ (base entre 0 e 1)}$$

$$t \geq \log_{0,95} 0,6$$

Resposta: $t \geq \log_{0,95} 0,6$

03. (UnB-DF) Estima-se que 1 350 m² de terra sejam necessários para fornecer alimento para uma pessoa. Admite-se, também, que há 30 × 1 350 bilhões de m² de terra arável no mundo e que, portanto, uma população máxima de 30 bilhões de pessoas pode ser sustentada, se não forem exploradas outras fontes de alimento. A população mundial, no início de 1987, foi estimada em 5 bilhões de habitantes. Considerando que a população continua a crescer, a uma taxa de 2% ao ano, e usando as aproximações $\ln 1,02 = 0,02$; $\ln 2 = 0,70$ e $\ln 3 = 1,10$, determine em quantos anos, a partir de 1987, a Terra teria a máxima população que poderia ser sustentada.

Resolução

Se a taxa de crescimento é de 2% ao ano, depois de um ano a população, em bilhões de habitantes, será $5 \cdot 1,02$. Depois de x anos será $5 \cdot (1,02)^x$.

Logo, para as condições do problema:

$$30 = 5 \cdot (1,02)^x \Rightarrow 6 = (1,02)^x$$

$$\ln 6 = \ln (1,02)^x$$

$$\ln (2 \cdot 3) = x \cdot \ln (1,02)$$

$$\ln 2 + \ln 3 = x \cdot 0,02$$

$$0,70 + 1,10 = x \cdot 0,02 \Rightarrow 1,80 = x \cdot 0,02$$

$$x = 90$$

Resposta: 90 anos

04. (UFC-CE) Suponha que o nível sonoro β e a intensidade I de um som estejam relacionados pela equação logarítmica $\beta = 120 + 10 \log_{10} I$, em que β é medido em decibéis e I , em watts por metro quadrado. Sejam I_1 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 80 decibéis de um cruzamento de duas avenidas movimentadas e I_2 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 60 decibéis do interior de um automóvel com ar-condicionado. A razão I_1/I_2 é igual a:

a) $1/10$

d) 100

b) 1

e) 1 000

c) 10

Resolução

$$80 = 120 + 10 \cdot \log_{10} I_1 \Rightarrow -40 = 10 \cdot \log_{10} I_1$$

$$\log_{10} I_1 = -4 \Rightarrow I_1 = 10^{-4}$$

$$60 = 120 + 10 \cdot \log_{10} I_2 \Rightarrow -60 = 10 \cdot \log_{10} I_2$$

$$\log_{10} I_2 = -6 \Rightarrow I_2 = 10^{-6}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{10^{-4}}{10^{-6}} = 10^2 = 100$$

Resposta: D

05. (PUC-SP) A energia nuclear, derivada de isótopos radiativos, pode ser usada em veículos espaciais para fornecer potência. Fontes de energia nuclear perdem potência gradualmente, no decorrer do tempo. Isso pode ser descrito pela função exponencial

$$P = P_0 \cdot e^{-\frac{t}{250}}$$



na qual P é a potência instantânea, em watts, de radioisótopos de um veículo espacial; P_0 é a potência inicial do veículo; t é o intervalo de tempo, em dias, a partir de $t_0 = 0$; e é a base do sistema de logaritmos neperianos. Nessas condições, quantos dias são necessários, aproximadamente, para que a potência de um veículo espacial se reduza à quarta parte da potência inicial? (Dado: $\ln 2 = 0,693$)

- a) 336 d) 342
b) 338 e) 346
c) 340

Resolução

$$\text{Para } P = \frac{1}{4} P_0$$

$$\frac{1}{4} P_0 = P_0 \cdot e^{-t/250} \Rightarrow \frac{1}{4} = e^{-t/250} \Rightarrow$$

$$\ln 2^{-2} = \ln e^{-t/250}$$

$$-2 \cdot \ln 2 = -\frac{t}{250} \Rightarrow 2 \cdot 0,693 \cdot 250 = t$$

$$t = 346,1 \cong 346$$

Resposta: E

06. (UFF-RJ) No dia 6 de junho de 2000, um terremoto atingiu a cidade de Ancara, na Turquia, com registro de 5,9 graus na escala Richter e outro terremoto atingiu o oeste do Japão, com registro de 5,8 graus na escala Richter.

Considere que m_1 e m_2 medem a energia liberada sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre por terremotos com registros, na escala Richter, r_1 e r_2 , respectivamente.

Sabe-se que estes valores estão relacionados pela fórmula:

$$r_1 - r_2 = \log_{10} (m_1/m_2)$$

Considerando-se que r_1 seja o registro do terremoto da Turquia e r_2 o registro do terremoto do Japão, pode-se afirmar que (m_1/m_2) é igual a:

- a) 10^{-1} d) $10/0,1$
b) $10 \sqrt{(10)}$ e) $1/0,1$
c) $(0,1)^{10}$

Resolução

$$r_1 - r_2 = \log_{10} (m_1/m_2) \Rightarrow$$

$$5,9 - 5,8 = \log_{10} (m_1/m_2) \Rightarrow$$

$$\log_{10} (m_1/m_2) = 0,1 \Rightarrow m_1/m_2 = 10^{0,1} = 10^{\frac{1}{10}}$$

$$m_1/m_2 = 10 \sqrt{(10)}$$

Resposta: B

07. (UFMG) O pH de uma solução aquosa é definido pela expressão $\text{pH} = -\log [H^+]$, em que $[H^+]$ indica a concentração, em mol/L, de íons de hidrogênio na solução e log, o logaritmo na base 10.

Ao analisar uma determinada solução, um pesquisador verificou que, nela, a concentração de íons de hidrogênio era $[H^+] = 5,4 \cdot 10^{-8}$ mol/L. Para calcular o pH dessa solução, ele usou os valores aproximados de 0,30, para $\log 2$, e de 0,48, para $\log 3$.

Então, o valor que o pesquisador obteve para o pH dessa solução foi:

- a) 7,26 c) 7,58
b) 7,32 d) 7,74

Resolução

$$\text{pH} = -\log [H^+] = -\log 5,4 \cdot 10^{-8}$$

$$\text{pH} = -(\log 5,4 + \log 10^{-8})$$

$$\text{pH} = -(\log 54/10 + (-8))$$

$$\text{pH} = -(\log 54 - \log 10 - 8)$$

$$\text{pH} = -(\log (3^3 \cdot 2) - 1 - 8) = -(\log 3^3 + \log 2 - 9)$$

$$\text{pH} = -(3 \cdot 0,48 + 0,30 - 9)$$

$$\text{pH} = 7,26$$

Resposta: A

08. (UnB-DF) A escala de um aparelho para medir ruídos é definida da seguinte forma: $R = 12 + \log_{10}(I)$, em que R é a medida do ruído, em bels, e I é a intensidade sonora, em W/m^2 . No Brasil, a unidade utilizada é o decibel (1/10 do bel). Por exemplo, o ruído dos motores de um avião a jato é de 160 decibéis,

enquanto o ruído do tráfego em uma esquina movimentada de uma grande cidade é de 80 decibéis, sendo este o limite a partir do qual o ruído passa a ser nocivo ao ouvido humano. Com base nessas informações, julgue os itens que se seguem.

- (1) A intensidade sonora de um ruído de zero decibel é de 10^{-12} W/m^2 .
- (2) A intensidade sonora dos motores de um avião a jato é o dobro da intensidade sonora do tráfego em uma esquina movimentada de uma grande cidade.
- (3) Uma intensidade sonora maior que 10^{-4} W/m^2 produz um ruído que é nocivo ao ouvido humano.

Resolução

$$(1) 0 = 12 + \log_{10}(I) \Rightarrow \log_{10}(I) = -12 \Rightarrow \\ \Rightarrow I = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \text{ (Verdadeira)}$$

(2) Para o motor de um avião a jato, temos:

$$16 = 12 + \log_{10}(I_j) \Rightarrow \log_{10}(I_j) = 4 \Rightarrow I_j = 10^4$$

Para o tráfego em uma esquina movimentada, temos:

$$8 = 12 + \log_{10}(I_e) \Rightarrow \log_{10}(I_e) = -4 \Rightarrow I_e = 10^{-4}$$

$$\text{Logo } I_j = 10^4 \neq 2 \cdot I_e = 2 \cdot 10^{-4} \text{ (Falsa)}$$

(3) Se 80 decibéis é o limite a partir do qual o ruído é nocivo ao ouvido humano, então:

$$8 = 12 + \log_{10}(I_L) \Rightarrow I_L = 10^{-4} \text{ W/m}^2 \text{ (Verdadeira)}$$

Resposta

- (1) V (2) F (3) V7