Matemática 7

Complexos, Polinômios e Equações Algébricas

Pré-Vestibular
Teoria e Exercícios Propostos

www.editora.coc.com.br
Editora COC – Empreendimentos Culturais Ltda.
Rua General Celso de Mello Rezende, 301
Tel.: (16) 3603.9700 – CEP 14095-270
Lagoinha – Ribeirão Preto – SP

índice.matemática 7

Capítulo 01. Números Complexos

Capítulo 02. Polinômios

Captulo 01. Números Complexos

1. A Unidade Imaginária

No século XVI o matemático italiano Girolamo Cardano, com o auxílio de seu compatriota Tartáglia, descobriu uma fórmula para resolver equações cúbicas do tipo $x^3 + px = q$.

A fórmula era:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

De posse dessa fórmula, Rafael Bombelli, matemático italiano e da mesma época de Tartáglia e Cardano, ao resolver a equação:

$$x^3 - 15x = 4$$

encontrou: $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ o que mostrava que x não deveria ser um número real, pois $\sqrt{-121} \notin R$.

No entanto, Bombelli percebeu que o número real x = 4 era raiz da equação, pois $4^3 - 15 \cdot 4 = 4$, e isso o intrigou bastante.

Continuando suas pesquisas, Bombelli descobriu que:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} \quad \text{e}$$

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$$

Portanto, o valor encontrado com o uso da fórmula passava a ser:

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

Um valor coerente com as expectativas.

A partir desse momento, começou-se a trabalhar com raízes quadradas de números negativos e, mais tarde, já no século XVIII, o matemático suíço Leonhard Euler passou a representar $\sqrt{-1}$ por **i**, convenção que utilizamos até os dias atuais.

Assim: $\sqrt{-1} = i$

que passamos a denominar **unidade imaginária.** Normalmente utilizamos a igualdade:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

2. Resolução de Algumas Equações

A partir da criação da unidade imaginária **i**, vamos resolver algumas equações cuja solução era impossível no conjunto universo dos número reais.

1ª) Resolver a equação: $x^2 + 9 = 0$

Resolução

Como essa é uma equação de segundo grau incompleta, não há necessidade de utilizarmos a fórmula de Bhaskara.

$x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow x^2 = 9 \cdot (-1)$

Como $i^2 = -1$, temos: $x^2 = 9i^2 \Rightarrow x = \pm 3i$

$$S = \{\pm 3i\}$$

2ª) Resolva a equação: $x^2 - 6x + 13 = 0$

Resolução

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -16 = 16i^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{16i^2}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4i}{2}$$

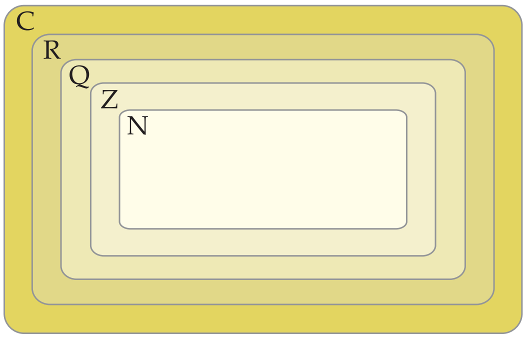
Assim: $x = 3 + 2i$ ou $x = 3 - 2i$

$$S = \{3 + 2i, 3 - 2i\}$$

3. O Conjunto dos Números Complexos

Com a criação da unidade imaginária **i**, surgiu um novo conjunto numérico C, o **conjunto dos números complexos**, que engloba o conjunto R dos números reais.

Assim, por meio de um diagrama Euler-Venn, temos:



O surgimento desse novo conjunto numérico foi de grande utilidade para a superação de alguns obstáculos na matemática e, por conseguinte, nas aplicações diretamente ligadas a ela.

Definições

Chamamos de número complexo na **forma algébrica**, todo número na forma **a + bi**, em que a e b são números reais e i é unidade imaginária ($i^2 = -1$).

Da mesma forma que, quando nos referimos a um número natural, usamos a letra **n** para representá-lo, a letra **z** será usada para representarmos um número complexo.

Assim, no número complexo z = a + bi, dizemos que **a** é a **parte real** de z, e **bi** é a **parte imaginária** de z, sendo b o coeficiente da parte imaginária de z.

Representamos: $a = \text{Re}(z)$

$b = \text{Im}(z)$

Em particular, temos:

1º) Se Im (z) = 0, dizemos que z é um **número real.**

Exemplos: $-5 = -5 + 0i$; $\sqrt{2} = \sqrt{2} + 0i$

2º) Se Re (z) = 0 e Im (z) ≠ 0, dizemos que z é um **imaginário puro.**

Exemplos: $2i = 0 + 2i$; $\sqrt{3}\,i = 0 + \sqrt{3}\,i$.

4. Igualdade de Números Complexos

Dois números complexos, na forma algébrica, são iguais quando suas partes reais e imaginárias forem respectivamente iguais. (As partes imaginárias são iguais, quando os coeficientes forem iguais).

Assim, sendo $\mathbf{z_1 = a_1 + b_1 i}$ e $\mathbf{z_2 = a_2 + b_2 i}$, com a_1, b_1, a_2 e b_2 reais, dizemos:

$$\boxed{z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \ \text{ e } \ b_1 = b_2}$$

Exemplo

Calcular a e b de modo que:

$(2a - b) + 3i = -2 + (-a + b)i$

Resolução

Devemos ter: $\begin{cases} 2a - b = -2 \\ 3 = -a + b \end{cases}$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2a - b = -2 \\ \underline{-a + b = 3} \\ \quad a = 1 \end{cases}$$

Substituindo a = 1 na equação –a + b = 3, temos:

$-1 + b = 3 \Rightarrow b = 4$

Assim: $a = 1$ e $b = 4$

5. Operações com Números Complexos

5.1. Adição

Dados os complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com a, b, c e d reais, a soma $z_1 + z_2$ será um complexo tal que:

$$\boxed{z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i}$$

Exemplo

Sendo $z_1 = -3 + 4i$ e $z_2 = 2 - i$, calcular $z_1 + z_2$

Resolução

$z_1 + z_2 = (-3 + 4i) + (2 - i) = (-3 + 2) + (4 - 1)i$

Assim: $z_1 + z_2 = -1 + 3i$

5.2. Subtração

Dados os complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com a, b, c e d reais, a diferença $z_1 - z_2$ será um complexo, tal que:

$$\boxed{z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i}$$

Exemplo

Sendo $z_1 = 5 + 3i$ e $z_2 = 3 + 2i$, calcular $z_1 - z_2$

Resolução

$z_1 - z_2 = (5 + 3i) - (3 + 2i) = (5 - 3) + (3 - 2)i$

Assim: $z_1 - z_2 = 2 + i$

5.3. Multiplicação

Dados os complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com a, b, c e d reais, o produto $z_1 \cdot z_2$ será um complexo, tal que:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i}$$

De fato, usando a propriedade distributiva, temos:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci - bdi^2$$

Como $i^2 = -1$, temos:

$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci - bd$

Agrupando a parte real e a parte imaginária, temos: $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Exemplo

Sendo $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 2 + 4i$, calcule $z_1 \cdot z_2$

Resolução

$z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i) \cdot (2 + 4i)$

$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4i + 2i \cdot 2 + 2i \cdot 4i$

$z_1 \cdot z_2 = 6 + 12i + 4i + 8i^2$

$z_1 \cdot z_2 = 6 + 12i + 4i - 8$

$z_1 \cdot z_2 = -2 + 16i$

Observação – As propriedades da adição, subtração e multiplicação válidas para os números reais continuam válidas para os números complexos.

5.4. Conjugado de um Número Complexo

Chamamos de conjugado do número complexo $z = a + bi$, com a e b reais, o número complexo $\overline{z} = a - bi$.

Exemplos

1º) $z_1 = 2 - 3i \Rightarrow \overline{z}_1 = 2 + 3i$

2º) $z_2 = -1 - 4i \Rightarrow \overline{z}_2 = -1 + 4i$

3º) $z_3 = -3i \Rightarrow \overline{z}_3 = 3i$

4º) $z_4 = 2 \Rightarrow \overline{z}_4 = 2$

Propriedade

O produto de um número complexo pelo seu conjugado é sempre um número real.

$$\boxed{z \cdot \overline{z} \in R}$$

Demonstração

Sendo $z = a + bi$ e $\overline{z} = a - bi$ $(a \in R$ e $b \in R)$ temos:

$z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi)$

$z \cdot \overline{z} = a^2 - \cancel{abi} + \cancel{abi} - b^2i^2$

$z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$

Como a e b são reais, $z \cdot \overline{z} \in R$.

5.5. Divisão

Dados dois números complexos z_1 e z_2, com $z_2 \neq 0$, efetuar a divisão de z_1 por z_2 é encontrar um terceiro número complexo z_3 tal que $z_1 = z_2 \cdot z_3$, ou seja:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_3$$

Exemplo

Efetuar a divisão de $z_1 = 2 - 3i$ por $z_2 = 1 + 2i$.

Resolução

Devemos encontrar um número complexo $z_3 = a + bi$ tal que $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$. Assim,

$$\frac{2-3i}{1+2i} = a + bi$$
$$2 - 3i = (a + bi)\cdot(1 + 2i)$$
$$2 - 3i = a + 2ai + bi + 2bi^2$$
$$2 - 3i = a + 2ai + bi - 2b$$
$$2 - 3i = (a - 2b) + (2a + b)i$$

$$\begin{cases} a - 2b = 2 \\ 2a + b = -3 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{x } 2 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} a - 2b = 2 \\ 4a + 2b = -6 \end{cases}$$
$$5a = -4 \Rightarrow a = \frac{-4}{5}$$

Substituindo em $a - 2b = 2$, temos:

$$\frac{-4}{5} - 2b = 2 \Rightarrow \frac{-4}{5} - 2 = 2b \Rightarrow b = \frac{-7}{5}$$

Assim:

$$a = \frac{-4}{5} \text{ e } b = \frac{-7}{5}$$

Então

$$\frac{2-3i}{1+2i} = \frac{-4}{5} - \frac{7}{5}i$$

Regra Prática

Dados os complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, a, b, c e d reais e $z_2 \neq 0$, para efetuarmos a divisão de z_1 por z_2, basta multiplicarmos o numerador e o denominador da fração $\dfrac{z_1}{z_2}$ pelo conjugado do denominador $(\overline{z}_2)$.

Assim, temos:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$
$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - cdi + dic - d^2i^2}$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2 + d^2}$$

Assim:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$$

Exemplo

Efetuar a divisão de $z_1 = 2 - 3i$ por $z_2 = 1 + 2i$

Resolução

$$\frac{2-3i}{1+2i} = \frac{(2-3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$
$$\frac{2-3i}{1+2i} = \frac{2 - 4i - 3i + 6i^2}{1 - 4i^2}$$

$$\frac{2-3i}{1+2i} = \frac{-4-7i}{1+4}$$

$$\frac{2-3i}{1+2i} = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$$

6. Potências de i

Calculemos algumas potências de i com expoente natural:

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$

$(-1) \cdot (-1)$

$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$

$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

Notamos que, a partir de i^4 as potências de i vão repetindo os quatro primeiros resultados; assim, de um modo mais geral, com $n \in N$, podemos afirmar que:

$i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1$

$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i^1 = 1 \cdot i = i$

$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$

$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

Esta conclusão sugere-nos o seguinte:

Propriedade

Se $m \in N$ e r é o resto da divisão de m por 4, então $i^m = i^r$.

Demonstração

$$\begin{array}{l|l} m & 4 \\ \hline r & q \end{array} \qquad m = 4q + r \text{ com } r \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Assim:

$i^m = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r$

$i^m = 1^q \cdot i^r \Rightarrow \boxed{i^m = i^r}$

Observação

Notamos que $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, então, com $m \in N$, a potência i^m é sempre igual a i^0 ou i^1 ou i^2 ou i^3, ou seja, 1, i, –1, –i, respectivamente.

Exemplos

1º) Calcular i^{359}

Resolução

$$\begin{array}{l|l} 359 & 4 \\ \hline 39 & 89 \\ 3 & \end{array} \qquad \Rightarrow i^{359} = i^3 = -i$$

2º) Calcular i^{130}

Resolução

$$\begin{array}{l|l} 130 & 4 \\ \hline 10 & 32 \\ 2 & \end{array} \qquad \Rightarrow i^{130} = i^2 = -1$$

Exercícios Resolvidos

01. Resolva a equação: $x^4 - 1 = 0$

Resolução

$x^4 - 1 = 0 \Rightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0$

$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = i^2 \Rightarrow x = \pm i$

ou

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$S = \{+i, +1, -1, -i\}$

02. Resolva a equação: $x^2 - 2x + 10 = 0$

Resolução

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -36$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-36} = \sqrt{36 \cdot (-1)} = 6 \cdot \sqrt{-1} = 6 \cdot i$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 1} = \dfrac{2 \pm 6i}{2}$

$x = 1 \pm 3i$

$S = \{1 - 3i, 1 + 3i\}$

03. Se $Z = 4 + 2i$ e $W = 3 - 5i$, então, calcular:

a) $Z + W$
b) $Z - W$
c) $Z \cdot W$

Resolução

$Z + W = (4 + 2i) + (3 - 5i) = 4 + 2i + 3 - 5i = 7 - 3i$

$Z - W = (4 + 2i) - (3 - 5i) = 4 + 2i - 3 + 5i = 1 + 7i$

$Z \cdot W = (4 + 2i)(3 - 5i) = 12 - 20i + 6i - 10i^2 =$

$12 - 14i + 10 = 22 - 14i$

04. (FCC-BA) O número complexo $1 - i$ é raiz da equação $x^2 + kx + t = 0$ $(k, t \in R)$ se, e somente se:

a) $k = t = -2$
b) $k = t = 2$
c) $k = -2$ e $t = 2$
d) $k = 2$ e $t = -2$
e) $k + t = 1$

Resolução

Se (1 – i) é raiz, temos:

$(1 - i)^2 + k(1 - i) + t = 0$

$1 - 2i - 1 + k - ki + t = 0$

$(k + t) + (-2 - k)i = 0 + 0i$

Logo: $\begin{cases} k + t = 0 \\ -2 - k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ k = -2 \end{cases}$

05. (UCMG) O número complexo z, tal que $5z + \bar{z} = 12 + 16i$, é igual a:

a) $-2 + 2i$
b) $2 - 3i$
c) $1 + 2i$
d) $2 + 4i$
e) $3 + i$

Resolução

Fazendo $z = a + bi$ *e* $\bar{z} = a - bi$, *temos:*

$$5z + \bar{z} = 12 + 16i$$
$$5(a + bi) + a - bi = 12 + 16i$$
$$5a + 5bi + a - bi = 12 + 16i$$

$$\begin{cases} 6a + 4bi = 12 + 16i \\ 6a = 12 \Rightarrow a = 2 \\ 4b = 16 \Rightarrow b = 4 \end{cases}$$

Logo: $z = 2 + 4i$

06. Determine o inverso do número complexo $z = 3 - 2i$.

Resolução

O inverso de z será z^{-1}, *tal que* $z \cdot z^{-1} = 1$, *ou seja,*

$$z^{-1} = \frac{1}{z}$$

Assim:

$$z^{-1} = \frac{1}{3 - 2i} = \frac{1 \cdot (3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)}$$

$$z^{-1} = \frac{3 + 2i}{9 - 4i^2} = \frac{3 + 2i}{9 + 4}$$

Assim, $z^{-1} = \dfrac{3}{13} + \dfrac{2}{13}i$

Resposta: $z^{-1} = \dfrac{3}{13} + \dfrac{2}{13}i$

07. Determinar $m \in R$ para que $z = \dfrac{2 + 3i}{2 + mi}$ seja um imaginário puro.

Resolução

$$z = \frac{2 + 3i}{2 + mi} = \frac{(2 + 3i)(2 - mi)}{(2 + mi)(2 - mi)}$$

$$z = \frac{2 + 3i}{2 + mi} = \frac{4 - 2mi + 6i - 3mi^2}{4 - m^2 i^2}$$

$$z = \frac{2 + 3i}{2 + mi} = \frac{(4 + 3m)}{4 + m^2} + \frac{(6 - 2m)}{4 + m^2} i$$

Para que z seja imaginário puro, devemos ter:

Re (z) = 0

Assim:

$$\frac{4 + 3m}{4 + m^2} = 0 \Rightarrow 4 + 3m = 0 \Rightarrow m = -\,{}^{4}\!/_{3}$$

Resposta: $m = \dfrac{4}{3}$

08. Calcular: $i^{14} - 3i^{-9} + 2i^{26}$

Resolução

$$14 \,\underline{|\,4\,}\quad 9 \,\underline{|\,4\,}\quad 26 \,\underline{|\,4\,}$$
$$2 \;\; 3 \qquad 1 \;\; 2 \qquad 2 \;\; 6$$

$$i^2 - 3i^1 + 2i^2 = -1 - 3i - 2 = -3 - 3i$$

09. Calcular i^{4n-2}

Resolução

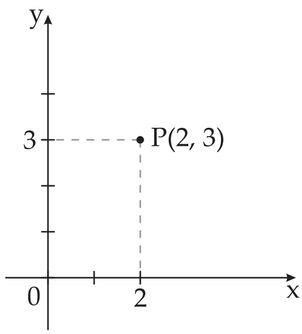
$$i^{4n-2} = \frac{i^{4n}}{i^2} = \frac{(i^4)^n}{-1} = \frac{1^n}{-1} = -1$$

Resposta: -1

7. O Plano de Gauss

Já sabemos que cada número real pode ser associado a um ponto de uma reta e que cada ponto da reta é imagem de um único número real. Para representarmos geometricamente os números complexos (entre os quais se encontram todos os números reais), utilizaremos um plano. Assim sendo, considere um plano no qual se fixou um sistema de coordenadas retangulares. Representaremos cada número complexo z = a + bi pelo ponto do plano de coordenadas (a, b).

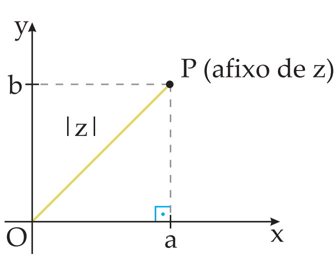
Dessa forma, o número complexo $z = 2 + 3i$, por exemplo, será representado pelo ponto P (2, 3).



Quem pela primeira vez fez essa interpretação geométrica foi Wessel, num artigo publicado em 1798, mas sua obra ficou quase desconhecida; por isso, este plano onde representamos os números complexos é conhecido, até hoje, como **plano de Gauss**, embora este tenha publicado a mesma idéia cerca de trinta anos depois. No plano de Gauss, os números reais são representados por pontos que pertencem ao eixo Ox e, por isso, esse eixo será chamado de **eixo real**, enquanto o eixo Oy será chamado de **eixo imaginário**. O ponto P(a, b), que representa o número complexo $z = a + bi$, será chamado de **afixo** ou **imagem** deste número complexo.

8. Módulo de um Número Complexo

Dado um número complexo $z = a + bi$, com a e b reais, chamamos de módulo de z e indicamos $|z|$ ou ρ à distância entre a origem O do plano de Gauss e o afixo de z.



Sendo O (0, 0) e P (a, b)

$$d_{OP} = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Assim: $\boxed{|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}}$

Observação

A definição de módulo no conjunto dos números complexos é coerente com a definição dada em R, ou seja:

Se $z = x$ e $x \in R$, então $|z| = |x|$

De fato:

$x \in R$ e $z = x \Rightarrow$

$z = x + 0\,i \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + 0^2}$

Assim, $|z| = \sqrt{x^2}$, ou seja, $|z| = |x|$

Exemplos

1º) $z_1 = 3 + 2i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

2º) $z_2 = -1 + 3i \Rightarrow |z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

3º) $z_3 = 2i \Rightarrow |z_3| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$

4º) $z_4 = -3 \Rightarrow |z_4| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$

Propriedades

Sendo $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos quaisquer, então:

1ª) $|z_1| = |\bar{z}_1|$

Demonstração

$z_1 = a + bi \Rightarrow |z_1| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\bar{z}_1 = a - bi \Rightarrow |\bar{z}_1| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Assim: $|z_1| = |\bar{z}_1|$

$2^a)\ |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(bc+ad)i$$

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(ac-bd)^2+(bc+ad)^2}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{a^2c^2-2abcd+b^2d^2+b^2c^2+2abcd+a^2d^2}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{c^2(a^2+b^2)+d^2(a^2+b^2)}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}$$

Assim: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$3^a)\ \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = (z_2 \neq 0)$

Demonstração

$$z_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 = z_1 \Rightarrow$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2\right| = |z_1| \Rightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \cdot |z_2| = |z_1|$$

Assim: $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

Observação

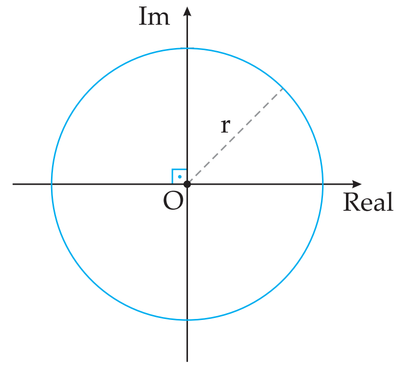
Existem outras propriedades que são válidas para os números complexos e que serão demonstradas no próximo módulo.

$4^a)\ |z_1^n| = |z_1|^n$

$5^a)\ |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Importante

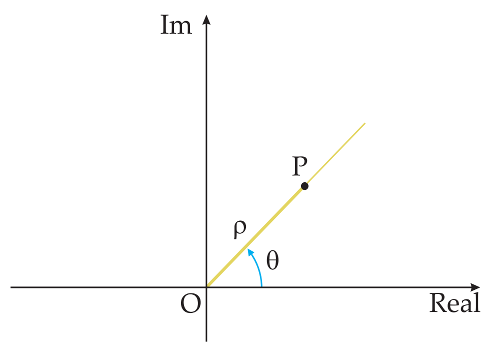
Todos os números complexos com módulo r têm os seus afixos em uma circunferência de centro na origem e raio r.



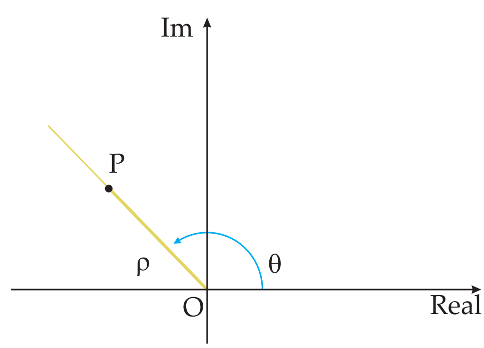
9. Argumento de um Número Complexo

Sendo $z = a + bi$ um número complexo não-nulo e P o afixo de z no plano de Gauss de origem O, chamamos **argumento** do número complexo z a medida θ do arco com centro em O tomado a partir do semi-eixo real positivo até a semi-reta $\vec{OP}$ no sentido anti-horário.

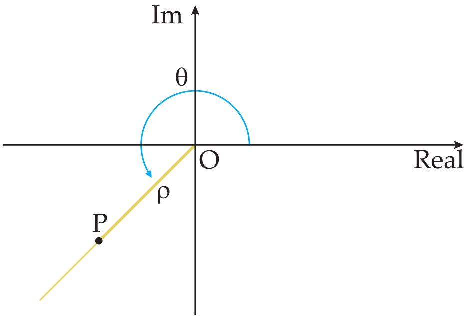
Assim:



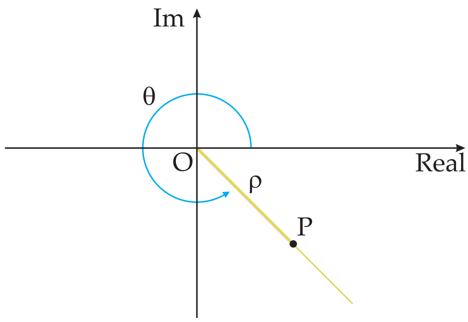
$0° < \theta < 90°$



$90° < \theta < 180°$



$180° < \theta < 270°$



$270° < \theta < 360°$

Da trigonometria concluímos que:

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho}$$

em que ρ é o módulo de z.
Em particular quando:

$$a \neq 0 \text{ e } b = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0°, \text{se } a > 0 \\ \theta = 180°, \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$a = 0 \text{ e } b \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 90°, \text{se } b > 0 \\ \theta = 270°, \text{se } b < 0 \end{cases}$$

Exemplos

1º) Calcular o argumento do número complexo $z = 2 - 2i$.

Resolução

$$\rho = |z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim: $\theta = 315°$

2º) Calcular o argumento de $z = -1 + \sqrt{3}i$.

Resolução

$$\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{-1}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Assim: $\theta = 120°$

3º) Calcular o argumento de $z = -4i$.

Resolução

$$\rho = |z| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$$

$$\cos\theta = \frac{0}{4} = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{-4}{4} = -1$$

Assim: $\theta = 270°$

4º) Calcular o argumento de $z = -2$.

Resolução

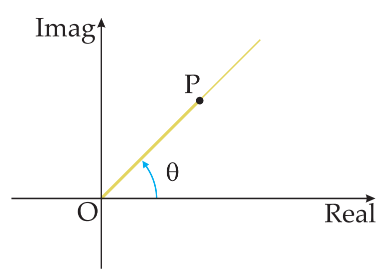
$$\rho = |z| = \sqrt{(-2)^2 - 0^2} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{0}{2} = 0$$

Assim: $\theta = 180°$

Importante

Todos os números complexos com argumento θ têm os seus afixos em uma semi-reta de origem O.



10. Forma Trigonométrica de um Número Complexo

Podemos determinar um número complexo de dois modos:

1º) Conhecendo a = Re (z) e bi = Im (z) e temos:

z = a + bi, que é a forma algébrica de z.

2º) Conhecendo $\rho = |z|$ e o θ = argumento de z, temos:

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho \cdot \cos\theta \quad \text{e}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho \cdot \text{sen}\,\theta$$

Assim:

$$z = a + bi = \rho \cdot \cos\theta + \rho \cdot \text{sen}\,\theta\, i$$

Então:

$$\boxed{z = \rho\left(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta\right)}$$

que é a **forma trigonométrica** de z.

Exemplos

1º) Colocar o número complexo z = 1 + i na forma trigonométrica.

Resolução

$$z = 1 + i \Rightarrow |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Então: $\theta = 45°$

Logo: $z = \sqrt{2}\ (\cos 45° + i\ \text{sen}\ 45°)$

2º) Escreva na forma trigonométrica z = – 2i.

Resolução

$$z = -2i \Rightarrow |z| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{0}{2} = 0 \quad \text{e} \quad \text{sen}\,\theta = \frac{-2}{2} = -1$$

Assim: $\theta = 270°$

Logo: $z = 2\left(\cos 270° + i\,\text{sen}\ 270°\right)$

3º) Escreva na forma trigonométrica z = – 4.

Resolução

$$z = -4 \Rightarrow |z| = 4$$

$$\cos\theta = \frac{-4}{4} = -1 \quad \text{e} \quad \text{sen}\,\theta = \frac{0}{4} = 0$$

Assim: $\theta = 180°$

Logo: $z = 4\left(\cos 180° + i\,\text{sen}\,180°\right)$

Exercícios Resolvidos

01. Sendo $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 1 - 2i$, verificar a veracidade das sentenças abaixo.

a) $|z_1| = |\overline{z}_1|$

b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

c) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

d) $|z_1^2| = |z_1|^2$

e) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

Resolução

a) $|z_1| = |2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$|\overline{z}_1| = |2 - 3i| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$\therefore |z_1| = |\overline{z}_1|$

b) $|z_1 \cdot z_2| = |(2+3i)(1-2i)|$

$|z_1 \cdot z_2| = |2-4i+3i-6i^2|$

$|z_1 \cdot z_2| = |8-i| = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$

$|z_1| \cdot |z_2| = |2+3i| \cdot |1-2i|$

$|z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{4+9} \cdot \sqrt{1+4} = \sqrt{13} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{65}$

$\therefore |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

c) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \left|\dfrac{2+3i}{1-2i}\right|$

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \left|\dfrac{(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}\right|$

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \left|\dfrac{-4}{5} + \dfrac{7i}{5}\right| = \sqrt{\dfrac{16}{25} + \dfrac{49}{25}} = \dfrac{\sqrt{65}}{5}$

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|2+3i|}{|1-2i|} = \dfrac{\sqrt{4+9}}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{65}}{5}$

$\therefore \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

d) $|z_1^2| = |(2+3i)^2|$

$|z_1^2| = |4+12i+9i^2|$

$|z_1^2| = |-5+12i| = \sqrt{25+144} = 13$

$|z_1|^2 = (|2+3i|)^2 = \left(\sqrt{4+9}\right)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$

$\therefore |z_1^2| = |z_1|^2$

e) $|z_1 + z_2| = |2+3i+1-2i|$

$|z_1 + z_2| = |3+i| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$|z_1| + |z_2| = |2+3i| + |1-2i|$

$|z_1| + |z_2| = \sqrt{4+9} + \sqrt{1+4}$

$|z_1| + |z_2| = \sqrt{13} + \sqrt{5}$

$\sqrt{10} < \sqrt{13} + \sqrt{5} \Rightarrow |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

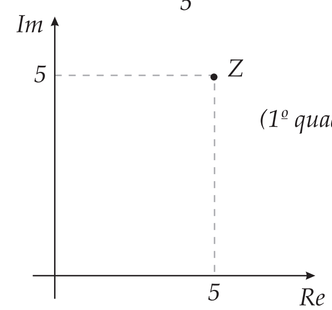
02. Obter o argumento dos complexos:

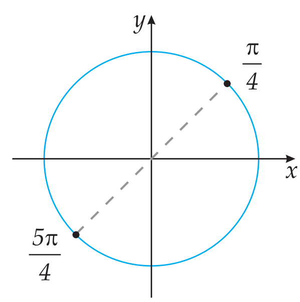
a) $z = 5 + 5i$

b) $z = \sqrt{3} - i$

Resolução

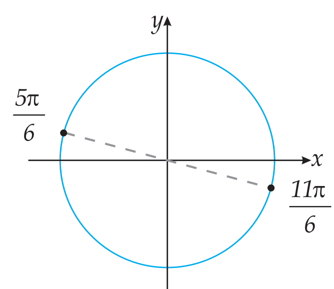
a) $\text{tg}\,\theta = \dfrac{5}{5} = 1$

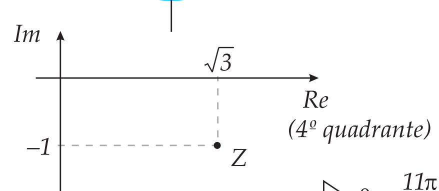




$\Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$

b) $tg\ \theta = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$





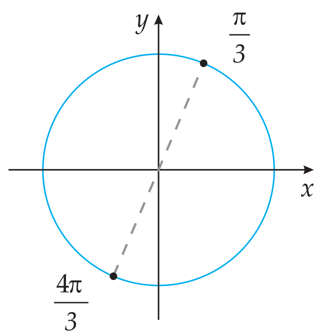
$\Rightarrow \theta = \dfrac{11\pi}{6}$

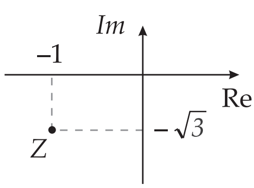
03. Escrever o número $z = -1 - \sqrt{3}i$ na forma trignométrica.

Resolução

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\text{tg } \theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$





(3º quadrante)

$$\Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}$$

Logo, $Z = \rho(\cos\ \theta + i \operatorname{sen}\ \theta)$

$$Z = 2\left(\cos\ \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\ \frac{4\pi}{3}\right)$$

11. Operações na Forma Trigonométrica

11.1. Adição

Sejam os números complexos z_1 e z_2 na forma trigonométrica:

$z_1 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$

$z_2 = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$

Vamos efetuar a adição de z_1 e z_2:

$z_1 + z_2 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) + \rho_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$

$z_1 + z_2 = (\rho_1 \cdot \cos \theta_1 + \rho_2 \cdot \cos \theta_2) + i\,(\rho_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_1 + \rho_2 \cdot \operatorname{sen} \theta_2)$

O módulo de $z_1 + z_2$ será:

$$\boxed{|z_1 + z_2| = \sqrt{(\rho_1 \cdot \cos\theta_1 + \rho_2 \cdot \cos\theta_2)^2 + (\rho_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_1 + \rho_2 \cdot \operatorname{sen}\theta_2)^2}}$$

Simplificando, encontramos:

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{(\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

Este último resultado mostra-nos que o módulo de soma é o maior possível quando cos $(\theta_1 - \theta_2)$ for máximo, o que se dará para cos $(\theta_1 - \theta_2) = 1$, e neste caso teremos:

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1 \cdot \rho_2}$$

ou seja:

$$|z_1 + z_2| = \rho_1 + \rho_2$$

Assim, podemos afirmar que?

$$\boxed{|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|}$$

11.2. Representação Geométrica da Adição

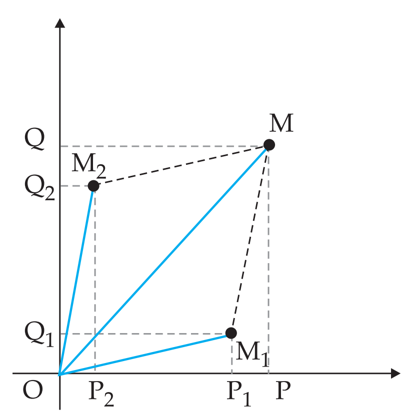
Consideremos dois números complexos z_1 e z_2, na forma algébrica:

$z_1 = a_1 + b_1\, i$

$z_2 = a_2 + b_2\, i$

Vamos construir as imagens respectivas de z_1 e z_2 que representamos por M_1 e M_2.

Com os pontos O, M_1, M_2 e M vamos construir o paralelogramo OM_1MM_2, cuja diagonal é $\overline{OM}$.



A partir da figura, podemos concluir que:

$$\left.\begin{array}{l} OP = OP_1 + P_1P \\ P_1P = OP_2 \end{array}\right\} \Rightarrow OP = OP_1 + OP_2$$

Como $OP_1 = a_1$ e $OP_2 = a_2$, temos que:

$$OP = a_1 + a_2$$

Analogamente, provamos que:

$$OQ = OQ_1 + OQ_2 = b_1 + b_2$$

Dessa forma, concluímos que o ponto M é o afixo do número complexo $(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,i$ que é a soma $z_1 + z_2$.

Assim, concluímos que:

A soma de dois números complexos é representada geometricamente pela diagonal do paralelogramo construído sobre os vetores correspondentes aos dois complexos dados.

Escrevemos que:

$$\vec{OM} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2}$$

11.3. Multiplicação

Consideremos os números complexos não-nulos:

$z_1 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$

$z_2 = \rho_2 (\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$

A multiplicação de z_1 por z_2 ficará:

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + i \cos\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 + i \cos\theta_2 \cdot \operatorname{sen}\theta_1 + i^2 \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2)$

Agrupando convenientemente, temos:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \left[\underbrace{(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2)}_{\cos(\theta_1+\theta_2)} + i \cdot \underbrace{(\operatorname{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_2 \cdot \cos\theta_1)}_{\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)}\right]$$

Assim:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2\,[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]}$$

Podemos observar que:

1º) o módulo de $z_1 \cdot z_2$ é igual ao produto dos módulos de z_1 e z_2;

2º) o argumento de $z_1 \cdot z_2$ é igual à soma dos argumentos de z_1 e z_2.

Exemplo

Calcular o produto dos números complexos

$z = 2\,(\cos 50° + i \operatorname{sen} 50°)$ e

$w = 3\,(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)$.

Resolução

$z \cdot w = 2 \cdot 3 \cdot [\cos(50° + 20°) + i \operatorname{sen}(50° + 20°)]$

Assim: $z \cdot w = 6 \cdot (\cos 70° + i \operatorname{sen} 70°)$

Importante – Se tivermos n fatores, será fácil verificarmos que:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot ... \cdot \rho_n\,[\cos(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n)]}$$

Exemplo

Calcular o produto dos números complexos:

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_3 = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$

Resolução

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Assim: $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 30\,[\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi]$

11.4. Divisão

Consideremos os números complexos não-nulos:

$z_1 = \rho_1\,(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$

$z_2 = \rho_2\,(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$

A divisão de z_1 por z_2 ficará:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\theta_1 + i\ \text{sen}\ \theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2 + i\ \text{sen}\ \theta_2)} \cdot \frac{\rho_2(\cos\theta_2 - i\ \text{sen}\ \theta_2)}{\rho_2(\cos\theta_2 - i\ \text{sen}\ \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1\ \rho_2(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - i\ \text{sen}\ \theta_2 \cdot \cos\theta_1 + i\ \text{sen}\ \theta_1 \cdot \cos\theta_2 - i^2\ \text{sen}\ \theta_1 \cdot \text{sen}\ \theta_2)}{\rho_2^2(\cos^2\theta_2 - i^2\ \text{sen}^2\ \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1\ \rho_2\left[\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + sen\,\theta_1 \cdot sen\,\theta_2 + i(sen\,\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - sen\,\theta_2 \cdot \cos\theta_1)\right]}{\rho_2^2(\cos^2\theta_2 + sen^2\,\theta_2)}$$

Logo:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\ \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)\right]}$$

Podemos observar que:

1º) o módulo de $\frac{z_1}{z_2}$ é igual ao quociente dos módulos de z_1 e z_2;

2º) o argumento de $\frac{z_1}{z_2}$ é igual à diferença dos argumentos de z_1 e z_2.

Exemplo

Calcular o quociente dos números complexos

$z = 6\ (\cos 70° + i\ \text{sen}\ 70°)$ e

$w = 2\ (\cos 20°\ i\ \text{sen}\ 20°)$.

Resolução

$$\frac{z}{w} = \frac{6}{2}\left[\cos\,(70°–20°) + i \cdot \text{sen}\,(70°–20°)\right]$$

Assim: $\frac{z}{w} = 3(\cos 50° + i\ \text{sen}\ 50°)$

11.5. Potenciação

Sendo $z = \rho\ (\cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta)$ e **n** um número natural não-nulo, temos:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{\text{n fatores}}$$

$z^n = \rho \cdot \rho \cdot \ldots \cdot \rho\ [\cos\,(\theta + \theta + \ldots + \theta) +$
$i\ \text{sen}\ (\theta + \theta + \ldots + \theta)]$

Assim:

$z^n = \rho^n\ [\cos(n \cdot \theta) + i\ \text{sen}\ (n \cdot \theta)]$

fórmula de Moivre

Podemos observar que:

1º) o módulo de z^n é igual ao módulo de z elevado ao expoente n;

2º) o argumento de z^n é igual ao argumento de z multiplicado por n.

Exemplos

1º) Dado $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, calcular z^6.

Resolução

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2} \\ \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}\,\text{rad}$$

Assim:

$$z = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\ \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z^6 = 1^6\cdot\left(\cos\ 6\cdot\frac{\pi}{3} + i\ \text{sen}\ 6\cdot\frac{\pi}{3}\right)$$

$z^6 = 1 \cdot (\cos 2\pi + i\ \text{sen}\ 2\pi)$

$z^6 = 1 \cdot (1 + i \cdot 0)$

$z^6 = 1$

Exercícios Resolvidos

01. Dados os números complexos:

$z = 8\ (\cos 75° + i\ \text{sen}\ 75°)$ e $w = 2\ (\cos 15° + i\ \text{sen}\ 15°)$, pode-se dizer que:

a) $zw = 16$

b) $\dfrac{z}{w} = 2 + 2\sqrt{3}i$

c) $\dfrac{z}{w} = 4\ (\text{sen}\ 60° + i\cos 60°)$

d) $zw = -16i$

e) nra

Resolução

$$\frac{z}{w} = \frac{8}{2}\left[(\cos\left(75^o - 15^o\right) + i\ sen(75^o - 15^o)\right] =$$

$= 4\ (\cos 60° + i\ sen\ 60°) =$

$$= 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$$

$$= 2\left(1 + \sqrt{3}i\right) =$$

$$= 2 + 2\sqrt{3}i$$

Resposta: *B*

02. Dado $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\ \text{sen}\ \dfrac{\pi}{3}\right)$, calcular $\dfrac{1}{z^6}$.

Resolução

Sabendo que $z^n = p^n \cdot (\cos n\cdot\theta + i\ sen\ n\cdot\theta)$

$$z^{-6} = 2^{-6}\left[\cos\left(-6\cdot\frac{\pi}{3}\right) + i\ sen\left(-6\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$z^{-6} = \frac{1}{2^6}\cdot\left[\cos(-2\pi) + i\ sen(-2\pi)\right]$$

$$z^{-6} = \frac{1}{2^6}\cdot\left(\cos 0 + i\ sen\ 0\right)$$

$$z^{-6} = \frac{1}{64}\cdot(1 + i\cdot 0)$$

$$\boxed{z^{-6} = \frac{1}{64}}$$

03. Determinar o menor valor de $n \in N^*$, tal que $\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i\right)^n$ seja real.

Resolução

Sendo $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

$$\rho = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ sen\,\theta = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$$

Assim:

$$z = 2\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\ sen\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$z^n = 2^n\cdot\left[\cos\left(n\cdot\frac{7\pi}{4}\right) + i\ sen\left(n\cdot\frac{7\pi}{4}\right)\right]$$

Para que z^n *seja real, devemos ter:*

$Im\ (z^n) = 0$

Assim: $sen\left(n \cdot \frac{7\pi}{4}\right) = 0$

Então: $n \cdot \frac{7\pi}{4} = k\,\pi, k \in z$

Se n é natural, devemos ter que n seja múltiplo de 4. Então o menor valor de n é :

$\boxed{n = 4}$

04. Sendo z = cos θ + i sen θ, obtenha as fórmulas de sen (2 θ) e cos (2 θ) utilizando a fórmula de Moivre.

Resolução

Sabemos que:

$(cos\ \theta + i\ sen\ \theta)^n = (cos(n\ \theta) + isen(n\ \theta)$

Fazendo n = 2, temos:

$(cos\ \theta + i\ sen\ \theta)^2 = (cos\ 2\ \theta + i\ sen\ 2\ \theta)$

$(cos\ \theta + i\ sen\ \theta)^2 =$

$= cos^2\ \theta + 2\ cos\ \theta \cdot i\ sen\ \theta + i^2 \cdot sen^2\ \theta$

$(cos\ \theta + i\ sen\ \theta\ )^2 =$

$= (cos^2\ \theta - sen^2\ \theta) + i \cdot 2 \cdot sen\ \theta \cdot cos\ \theta$

Então:

$(cos\ 2\ \theta + i\ sen\ 2\ \theta) =$

$= (cos^2\ \theta - sen^2\ \theta) + i \cdot 2 \cdot sen\ \theta \cdot cos\ \theta$

Igualando as partes reais e imaginárias, obtemos:

$\boxed{cos\ 2\ \theta = cos^2\ \theta - sen^2\ \theta}$

e

$\boxed{sen\ (2\ \theta) = 2sen\ \theta \cdot cos\ \theta}$

Capítulo 02. Polinômios

1. Função Polinomial

Dados um número natural *n* e os números complexos a_n, a_{n-1}, ... a_2, a_1 e a_0, denominamos **função polinomial** ou **polinômio na** variável $x \in C$ a função:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$$

Os números a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1 e a_0 são chamados **coeficientes** do polinômio e as parcelas a_nx^n, $a_{n-1}x^{n-1}, \ldots, a_2x^2$, a_1x^1 e a_0 são os **termos** do polinômio.

Dizemos ainda que a_0 é o **termo independente** do polinômio.(também chamados monômios)

Exemplos

1º) $P(x) = 5x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}x - 1$

2º) $M(x) = -x^5 + x^2 + 1$

3º) $T(x) = x^4 + 2ix^2 - 3x + 2$

2. Valor Numérico de um Polinômio

Dado um polinômio:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$$

e o número complexo α, dizemos que o **valor numérico** de *P* para $x = \alpha$ é o número que obtemos quando substituímos a variável x do polinômio pelo número α; indicamos por $P(\alpha)$ (lemos: P de α)

$$P(\alpha) = a_n(\alpha)^n + a_{n-1}(\alpha)^{n-1} + \ldots + a_2(\alpha)^2 + a_1(\alpha) + a_0$$

Quando $P(x) = 0$ dizemos que α é uma **raiz** ou **zero** do polinômio.

Exemplos

1º) Obter o valor numérico do polinômio:

$P(x) = 3x^3 + 2x^2 + x - 3$ para $x = -2$

Resolução

$P(-2) = 3(-2)^3 + 2(-2)^2 + (-2) - 3 =$

$= -24 + 8 - 2 - 3$

Assim, $P(-2) = -21$

2º) Verificar quais números do conjunto {–2, –1, 0, 1, 2, 3} são raízes de:

$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Resolução

$P(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 5(-2) + 6$

$P(-2) = -8 - 8 + 10 + 6$

$P(-2) = 0 \Rightarrow -2$ é raiz de $P(x)$

$P(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - 5(-1) + 6$

$P(-1) = -1 - 2 + 5 + 6$

$P(-1) = 8 \Rightarrow -1$ não é raiz de $P(x)$

$P(0) = (0)^3 - 2 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 6$

$P(0) = 0 - 0 - 0 + 6$

$P(0) = 6 \Rightarrow 0$ não é raiz de $P(x)$

$P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 2 - 5 + 6$

$P(1) = 0 \Rightarrow 1$ é raiz de $P(x)$

$P(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 6$

$P(2) = 8 - 8 - 10 + 6$

$P(2) = -4 \Rightarrow 2$ não é raiz de $P(x)$

$P(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6$

$P(3) = 27 - 18 - 15 + 6$

$P(3) = 0 \Rightarrow 3$ é raiz de $P(x)$

3º) Determine m para que 1 + i seja raiz de P(x) = x^2 + mx + 2.

Resolução

$$P(1+i) = (1+i)^2 + m(1+i) + 2$$
$$P(1+i) = 1 + 2i + i^2 + m + mi + 2$$
$$P(1+i) = 1 + 2i - 1 + m + mi + 2$$
$$P(1+i) = (m+2) + (m+2)i$$

Para que P(1 + i) = 0, devemos ter m + 2 = 0 $\Rightarrow$ m = –2

4º) Dado o polinômio P(x) = x^2 + 2x + 5, obter M(x) = P (x + 1).

Resolução

M(x) = P(x + 1) = $(x + 1)^2$ + 2(x + 1) + 5

M(x) = x^2 + 2x + 1 + 2x + 2 + 5

M(x) = x^2 + 4x + 8

Observações importantes:

> 1ª) Um polinômio P é chamado de **nulo** ou **identicamente nulo** quando para qualquer $\alpha \in C$ tivermos P (x) = 0. Isso só acontece quando todos os coeficientes de P (x) forem iguais a zero.

Exemplo

P (x) = $0x^2$ + 0x + 0 é identicamente nulo.

> 2ª) O número zero só é raiz de um polinômio P (x) quando o termo independente de P (x) for nulo.

Exemplo

1º) 0 é raiz de P(x) = $x^3 - 3x^2 + x$

2º) 0 não é raiz de P (x) = $x^3 + 2x - 1$

> 3ª) O valor numérico de um polinômio P(x) para x = 1 é igual à soma dos seus coeficientes.

Exemplos

1º) A soma dos coeficientes de

P (x) = $6x^4 - 3x^2 + 3x - 4$ é:

soma = P (1) = 6 – 3 + 3 – 4 = 2

2º) A soma dos coeficientes de

P (x) = $(x^2 + 2x - 1)^3$ é:

soma = P (1) = $(1^2 + 2 \cdot 1 - 1)^3 = 2^3 = 8$

3. Grau de um Polinômio

Dado um polinômio P(x) não-nulo, chamamos grau de P, e indicamos por G_P, o maior dos expoentes de x que tem coeficiente não-nulo.

Quando o polinômio é nulo, o seu grau não é definido.

Exemplos

1º) Indicar o grau de cada um dos polinômios abaixo:

a) $P(x) = 3x^5 - 2x^3 + 7 \Rightarrow G_P = 5$

b) $P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + x^3 \Rightarrow G_P = 3$

c) $P(x) = x^2 - x^5 + 2 \Rightarrow G_P = 5$

d) $P(x) = 3 \Rightarrow G_P = 0$

e) $P(x) = 0 \Rightarrow \nexists G_P$

2º) Estudar as condições para que o polinômio P(x) = (a – 3) x^2 + (b – 1) x + (c – 2) tenha grau igual a zero.

Resolução

Devemos ter:

$$a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$$
$$b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$$
$$c - 2 \neq 0 \Rightarrow c \neq 2$$

3º) Discutir, para a ∈ C, o grau de

$$P(x) = (a^2 - 1)x^3 + (a+1)x^2 + (a-1)x + 2$$

Resolução

Se $a^2 - 1 \neq 0$, ou seja, $a \neq 1$ e $a \neq -1$, então, G_P = 3.

Se a = 1, temos:

P(x) = $0x^3 + 2x^2 + 0x + 2$, então, G_P = 2

Se a = – 1, temos:

P(x) = $0x^3 + 0x^2 - 2x + 2$, então, G_P = 1

Exercícios Resolvidos

01. Determinar m, n e p de modo que:

$P(x) = px^4 + (n - p - 1)x^2 + (2m - n - p)x$ seja um polinômio nulo.

Resolução

$P(x) = px^4 + (n - p - 1)x^2 + (2m - n - p)x = 0, \forall x$

$p = 0, n - p - 1 = 0$ e $2m - n - p = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = 0, n = 1$ e $m = \frac{1}{2}$

02. (PUC-SP) O número de raízes reais do polinômio $p(x) = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$ é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Resolução

$P(x) = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$

Raízes de $P(x) \Rightarrow P(x) = 0 \therefore$

$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ complexas

$$\left.\begin{array}{l} \text{ou } x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \text{ou } x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{array}\right\}$$

Raízes reais = 2

Resposta: C

03. Se $P(x) = 2x^3 + ax + b$, $P(2) = 12$ e $P(-2) = 8$, então, P(1) é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Resolução

$P(2) = 2 \cdot 2^3 + a \cdot 2 + b = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a + b = -4$ ....(1)

$P(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + a \cdot (-2) + b = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2a + b = 24$ ....(2)

De (1) e (2) temos $a = -7$ e $b = 10$. Assim,

$P(x) = 2x^3 - 7x + 10.$

Portanto, $P(1) = 2 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1 + 10 = 5$

Resposta: E

04. (Mackenzie-SP) O polinômio $P(x) = (m - 4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m + 4)x + 4$ é de grau 2 se, e somente se:

a) m = 4 ou m = – 4
b) m ≠ 4
c) m ≠ – 4
d) m ≠ 4 e m ≠ – 4
e) para nenhum valor de m

Resolução

$$\text{Condições: } \begin{cases} m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4 \\ \quad\quad \text{e} \\ m^2 - 16 \neq 0 \Rightarrow m \neq \pm 4 \end{cases}$$

Resposta: E

05. (UFRGS-RS) Se P(x) é um polinômio de grau 5, então, o grau de $[P(x)]^3 + [P(x)]^2 + 2P(x)$ é:

a) 3
b) 8
c) 15
d) 20
e) 30

Resolução

$gr(P) = 5$

$gr[P(x)]^3 = 5 \cdot 3 = 15$

$gr[P(x)]^2 = 5 \cdot 2 = 10$

$gr[2P(x)] = 5$

Temos então três polinômios de graus diferentes. Logo, para $gr\{[P(x)]^3 + [P(x)]^2 + 2P(x)\}$ *o grau será o do polinômio de maior grau , ou seja, 15.*

Resposta: C

4. Polinômios Idênticos

4.1. Definição

Dizemos que dois polinômios A(x) e B(x) são **idênticos** quando os valores numéricos de A(x) e de B(x) são iguais para todo $x \in C$. Indicamos: $A(x) \equiv B(x)$ (identidade)

Temos então que:

$$\boxed{A(x) \equiv B(x) \Leftrightarrow A(x) = B(x), \forall x \in C}$$

4.2. Reconhecimento

Sejam:

$$A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

e

$$B(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0$$

Para que $A(x) \equiv B(x)$, devemos ter:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 =$$

$$= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0,$$

para $\forall\, x \in C$

$$(a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \ldots$$
$$+(a_2 - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0, \forall\, x \in C$$

Assim, o polinômio deve ser identicamente nulo, ou seja:

$$a_n - b_n = 0;\ a_{n-1} - b_{n-1} = 0; \ldots; a_2 - b_2 = 0;$$
$$a_1 - b_1 = 0 \text{ e } a_0 - b_0 = 0$$

Então:

$$A(x) \equiv B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = b_n;\ a_{n-1} = b_{n-1}; \ldots; \\ a_2 = b_2; a_1 = b_1 \text{ e } a_0 = b_0 \end{cases}$$

Isto é:

Dois polinômios serão idênticos quando tiverem os coeficientes respectivamente iguais.

Exemplo

Calcular a, b e c para que os polinômios sejam idênticos:

$$P(x) = ax^4 + (b+1)x^3 + (c-2)x - 5$$
$$M(x) = 3x^3 + 4x - 5$$

Resolução

Devemos ter:

$$ax^4 + (b+1)x^3 + 0x^2 + (c-2)x - 5 =$$
$$= 0x^4 + 3x^3 + 0x^2 + 4x - 5$$

para $\forall\, x \in C$.

Assim:

$a = 0$; $b + 1 = 3$ e $c - 2 = 4$

ou seja: $a = 0$; $b = 2$ e $c = 6$

5. Adição de Polinômios

5.1. Definição

Dados dois polinômios:

$$A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

e

$$B(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0,$$

chamamos de soma de A e B, o único polinômio S, tal que $S(x) = A(x) + B(x)$.

Este polinômio é:

$$S(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots +$$
$$+(a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Exemplo

Dados os polinômios $A(x) = x^2 - 3x + 2$ e $B(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$, obter o polinômio S(x), tal que $S(x) = A(x) + B(x)$.

Resolução

Observemos que:

$A(x) = 0x^3 + x^2 - 3x + 2$ e

$B(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$

$S(x) = (0 + 1)x^3 + (1 - 3)x^2 + (-3 + 4)x + (2 + 1)$

Assim: $S(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$

5.2. Propriedades

Sendo A, B e C três polinômios quaisquer, são válidas as seguintes propriedades:

1ª) $A + B \equiv B + A$ (comutativa)

2ª) $A + (B + C) \equiv (A + B) + C$ (associativa)

3ª) $A + 0 \equiv A$ (elemento neutro)

0 indica o polinômio nulo.

4ª) $A + (-A) \equiv 0$ (elemento oposto)

Observação – A partir da quarta propriedade, podemos definir a **diferença** entre dois polinômios A – B como sendo a adição de A com o oposto de B.

$$A(x) - B(x) \equiv A(x) + [-B(x)]$$

Exemplo

Dados os polinômios $P_1(x) = 3x^3 - 2x - 1$ e $P_2(x) = x^4 + x^2 + 3x + 5$, obter $P_1(x) - P_2(x)$

Resolução

$P_1(x) - P_2(x) = (3x^3 - 2x - 1) - (x^4 + x^2 + 3x + 5)$

Assim:

$P_1(x) - P_2(x) = -x^4 + 3x^3 - x^2 - 5x - 6$

5.3. Considerações sobre o Grau

Sendo A e B dois polinômios quaisquer, temos:

1º) Se $G_A \neq G_B$, o grau de A + B ou de A – B ou de B – A é o maior grau entre os dois polinômios A e B.

Exemplo

Sendo $A(x) = 3x^2 + 2x + 1$ e

$B(x) = x^3 + x - 3$, temos:

$A(x) + B(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 2$

$G_A = 2$ e $G_B = 3 \Rightarrow G_{A+B} = 3$

2º) Se $G_A = G_B$, o polinômio A + B pode ser identicamente nulo (grau não definido) ou apresentar grau menor ou igual ao grau dos polinômios A e B (o mesmo pode ser afirmado de A – B e B – A).

Exemplo

Sendo $A(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1$ e

$B(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 3$

$A(x) + B(x) = 2x^3 + 6x^2 + x - 2$

$\therefore G_{A+B} = 3$

$A(x) - B(x) = -3x + 4$

$\therefore G_{A-B} = 1$

6. Multiplicação de Polinômios

6.1. Definição

Dados dois polinômios:

$$A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ e}$$
$$B(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0,$$

chamamos de produto de A e B o único polinômio P, tal que $P(x) \equiv A(x) \cdot B(x)$.

Este polinômio é obtido multiplicando cada termo de A por todos os termos de B, isto é:

$$P(x) = (a_n b_m) x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m) x^{n+m-1} + \ldots$$
$$+ (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + (a_0 b_0)$$

Exemplo

Dados os polinômios $A(x) = x^2 - 3x + 2$ e $B(x) = x^3 - 3x^2 + 3$, obter o polinômio $P(x)$, tal que $P(x) \equiv A(x) \cdot B(x)$.

Resolução

$$P(x) = x^2(x^3 - 3x^2 + 3) - 3x(x^3 - 3x^2 + 3) +$$
$$+ 2(x^3 - 3x^2 + 3)$$

$$P(x) = x^5 - 3x^4 + 3x^2 - 3x^4 + 9x^3 - 9x +$$
$$+ 2x^3 - 6x^2 + 6$$

$$P(x) = x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 3x^2 - 9x + 6$$

6.2. Propriedades

Sendo A, B e C três polinômios quaisquer, são válidas as seguintes propriedades:

1ª) $A \cdot B \equiv B \cdot A$ (comutativa)

2ª) $A \cdot (B \cdot C) \equiv (A \cdot B) \cdot C$ (associativa)

3ª) $A \cdot (B + C) \equiv A \cdot B + A \cdot C$ (distributiva)

6.3. Considerações sobre o Grau

Sendo A e B dois polinômios não-nulos, o grau do produto $A \cdot B$ é a soma dos graus dos polinômios A e B.

$$G_{A \cdot B} = G_A + G_B$$

No caso de um dos polinômios A ou B ser identicamente nulo, o produto $A \cdot B$ é identicamente nulo (o grau não é definido).

Exemplo

$G_A = 5$ e $G_B = 3 \Rightarrow G_{A \cdot B} = 8$

7. Divisão de Polinômios

7.1. Definição

Dados dois polinômios, A(x) e B(x), B não-nulo, existe um único par de polinômios Q (x) e R(x) em que se verificam as condições:

1ª) $A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x)$

2ª) $G_R < G_B$ ou $R(x) \equiv 0$

$$\begin{array}{l|l} A(x) & B(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

Os polinômios A e B são chamados de **dividendo** e **divisor** e os polinômios Q e R são o **quociente** e o **resto**.

Quando $R(x) \equiv 0$, dizemos que a divisão é exata, ou que A(x) é divisível por B(x).

7.2.0 Método da Chave

Dividir o polinômio A(x) pelo polinômio B(x), não-nulo, significa determinar o quociente Q(x) e o resto R(x).

Vamos dividir, por exemplo, o polinômio $A(x) = 2x^3 - 8x^2 + 7x - 5$ por $B(x) = x^2 - 2x + 3$, pelo método da chave.

1ª etapa

Dividimos inicialmente $2x^3$ por x^2, encontrando $2x$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 8x^2 + 7x - 5 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2} & 2x \end{array}$$

2ª etapa

Multiplicamos $2x$ por $x^2 - 2x + 3$ e vemos "quanto falta para $2x^3 - 8x^2 + 7x - 5$", isto é, subtraímos:

$2x^3 - 4x^2 + 6x$ de $2x^3 - 8x^2 + 7x - 5$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 8x^2 + 7x - 5 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2} -2x^3 + 4x^2 - 6x \quad & 2x \\ \cline{1-1} -4x^2 + x - 5 & \end{array}$$

3ª etapa

Enquanto o grau do resto for maior ou igual ao grau do divisor, continuamos a divisão. Dividimos então $-4x^2$ por x^2, encontrando -4.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 8x^2 + 7x - 5 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2} -2x^3 + 4x^2 - 6x \quad & 2x - 4 \\ \cline{1-1} -4x^2 + x - 5 & \end{array}$$

4ª etapa

Multiplicamos -4 por $x^2 - 2x + 3$ e vemos "quanto falta para $-4x^2 + x - 5$".

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 8x^2 + 7x - 5 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2} -2x^3 + 4x^2 - 6x \quad & 2x - 4 \\ \cline{1-1} -4x^2 + x - 5 & \\ +4x^2 - 8x + 12 & \\ \cline{1-1} -7x + 7 & \end{array}$$

Nesse ponto terminamos a divisão, pois o grau de $-7x + 7$ é menor que o grau do divisor.

Portanto, temos:

Quociente = $Q(x) = 2x - 4$

Resto = $R(x) = -7x + 7$

7.3. Considerações sobre o Grau

Sendo A e B dois polinômios não-nulos, o grau do quociente Q(x) é a diferença entre os graus dos polinômios A e B, e o resto, se não for nulo, terá grau menor que o grau de B(x).

7.4. O Método de Descartes

Vamos dividir, por exemplo, o polinômio $A(x) = 2x^3 - 8x^2 + 7x - 5$ por $B(x) = x^2 - 2x + 3$ pelo método de Descartes, também conhecido como método dos coeficientes a determinar.

1ª etapa

Estimamos quem serão o quociente Q(x) e o resto R(x) da divisão, lembrando que $G_Q = G_A - G_B = 1$, e, se o resto não for nulo, $G_R < G_B$.

Assim:

Q(x) = ax + b e R(x) = cx + d

2ª etapa

Como $A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, temos:

$$2x^3 - 8x^2 + 7x - 5 \equiv$$
$$\equiv (x^2 - 2x + 3) \cdot (ax + b) + cx + d$$
$$2x^3 - 8x^2 + 7x - 5 \equiv ax^3 + (-2a + b)x^2 +$$
$$+ (3a - 2b)x + 3b + cx + d$$

ou seja:

$$2x^3 - 8x^2 + 7x - 5 \equiv ax^3 + (-2a + b)x^2 +$$
$$+ (3a - 2b + c)x + (3b + d)$$

3ª etapa

Estabelecemos a igualdade dos coeficientes dos termos correspondentes.

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ -2a + b = -8 \\ 3a - 2b + c = 7 \\ 3b + d = -5 \end{array}\right\}$$

4ª etapa

Resolvemos o sistema e encontramos

a = 2; b = – 4; c = –7 e d = 7.

Então: Q(x) = 2x – 4 e R(x) = –7x + 7

Exercícios Resolvidos

01. (UFG-GO) Na divisão do polinômio

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pelo polinômio

$D(x) = x^2 + 1$ encontra-se para quociente o polinômio $Q(x) = 2x - 1$ e para resto o polinômio $R(x) = -x + 1$. Então, P(x) é o polinômio:

a) $x^3 - x^2 + x + 1$
b) $2x^3 - x^2 + 1$
c) $2x^3 - x^2 - x + 1$
d) $2x^3 - x^2 + x$

Resolução

$$\begin{array}{r|l} ax^3 + bx^2 + cx + d & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} -x + 1 & 2x - 1 \end{array}$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (2x - 1)(x^2 + 1) + (-x + 1)$$
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 2x^3 + 2x - x^2 - 1 - x + 1$$
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 2x^3 - x^2 + x$$

$$\text{Logo: } \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 1 \\ d = 0 \end{cases} \quad \text{Portanto, } P(x) = 2x^3 - x^2 + x$$

Resposta: *D*

02. Dados os polinômios

$P(x) = 2x^5 - 32x^3 + 43x^2 - 40x + 20$ e $D(x) = x^2 + 4x - 3$, efetuar a operação $P(x) \div D(x)$.

Resolução

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 \qquad - 32x^3 + 43x^2 - 40x + 20 & x^2 + 4x - 3 \\ \cline{2-2} -2x^5 - 8x^4 + 6x^3 \qquad\qquad\qquad & \underbrace{2x^3 - 8x^2 + 6x - 5}_{\text{quociente}} \\ \cline{1-1} -8x^4 - 26x^3 + 43x^2 - 40x + 20 & \\ 8x^4 + 32x^3 - 24x^2 \qquad\qquad & \\ \cline{1-1} 6x^3 + 19x^2 - 40x + 20 & \\ -6x^3 - 24x^2 + 18x \qquad & \\ \cline{1-1} -5x^2 - 22x + 20 & \\ 5x^2 + 20x - 15 & \\ \cline{1-1} -2x + 5 & \rightarrow \text{resto} \end{array}$$

03. (ITA-SP) Os valores de α, β e γ que tornam o polinômio $P(x) = 4x^5 + 2x^4 - 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ divisível por $Q(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 1$ satisfazem as desigualdades:

a) $\alpha > \beta > \gamma$
b) $\alpha > \gamma > \beta$
c) $\beta > \alpha > \gamma$
d) $\beta > \gamma > \alpha$
e) $\gamma > \alpha > \beta$

Resolução

$$\begin{array}{l|l} \cancel{4x^5} + \cancel{2x^4} - 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma & 2x^3 + x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -\cancel{4x^5} - \cancel{2x^4} + 4x^3 - 2x^2 & 2x^2 + 1 \\ \cline{1-1} \cancel{2x^3} + (\alpha - 2)\, x^2 + \beta x + \gamma & \\ -\cancel{2x^3} - x^2 \qquad + 2x - 1 & \\ \cline{1-1} (\alpha - 3)\, x^2 + (\beta + 2)\, x + (\gamma - 1) & \end{array}$$

Como P(x) deve ser divisível por Q(x), temos:

$$(\alpha - 3)x^2 + (\beta + 2)x + (\gamma - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha - 3 = 0 \\ \beta + 2 = 0 \\ \gamma - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

Assim, $\alpha > \gamma > \beta$

Resposta: *B*

8. Divisão por (x – a)

8.1. Cálculo do Resto

Na divisão de um polinômio P(x) por (x – a) observamos que o resto, se não for nulo, terá grau zero, isto é, será sempre um número real r. Então:

$$P(x) \equiv (x-a) \cdot Q(x) + r$$

em que Q(x) é o quociente dessa divisão. Calculando o valor numérico de P(x) para x = a, temos:

$$P(a) = (a-a) \cdot Q(a) + r$$

Logo, P(a) = r

Verificamos, assim, que:

> O resto da divisão de P(x) por (x – a) é r = P(a).

Exemplos

1º) Calcular o resto da divisão de $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ por x – 2.

Resolução

$r = P(2) = 16 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 - 1$

Assim, r = 7

2º) Calcular o resto da divisão de $P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 6$ por x + 2

Resolução

x + 2 = x – (–2)

Então: r = P(–2)

$r = (-2)^4 + 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 6$

r = 6

8.2. Teorema de D'Alembert

Para que um polinômio seja divisível por (x – a), é preciso que o resto seja igual a zero, ou seja, P(a) = 0

> P(x) é divisível por (x – a) $\Leftrightarrow$ P(a) = 0

Essa propriedade é conhecida como **teorema de D'Alembert**, [Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783)]

Exemplo

Determine k para que o polinômio $P(x) = kx^3 + 2x^2 + 4x - 2$ seja divisível por (x + 3).

Resolução

Devemos ter: P(–3) = 0

Assim:

$k(-3)^3 + 2(-3)^2 + 4(-3) - 2 = 0$

Então $k = \dfrac{4}{27}$

8.3. Algoritmo de Briot-Ruffini

Dividindo um polinômio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ pelo binômio (x – a), o quociente será um polinômio $Q(x) = q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \ldots + q_2x^2 + q_1x + q$; tal que:

$$P(x) \equiv (x-a) \cdot Q(x) + r$$

Assim:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \equiv$$
$$\equiv (x-a)\left(q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \ldots + q_2x^2 + q_1x + q_0\right)$$

Ou então:

$$a_nx^n + a_nx^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \equiv$$
$$\equiv q_{n-1}x^n + (q_{n-2} - aq_{n-1})x^{n-1} + \ldots +$$
$$+ (q_1 - aq_2)x^2 + (q_0 - aq_1)x + r - aq_0$$

E, daí, obtemos:

$$q_{n-1} = a_n$$
$$q_{n-2} - aq_{n-1} = a_{n-1} \Rightarrow q_{n-2} = aq_{n-1} + a_{n-1}$$

....

$$q_1 - aq_2 = a_2 \Rightarrow q_1 = aq_2 + a_2$$
$$q_0 - aq_1 = a_1 \Rightarrow q_0 = aq_1 + a_1$$
$$r - aq_0 = q_0 \Rightarrow r = aq_0 + a_0$$

Esses cálculos podem ser efetuados aplicando-se o seguinte esquema, conhecido como dispositivo de Briot-Ruffini.

	a_n	a_{n-1}	...	a_2	a_1	a_0
a	$\underbrace{a_n}_{q_{n-1}}$	$\underbrace{a_n \cdot a + a_{n-1}}_{q_{n-2}}$	...	$\underbrace{aq_2 + a_2}_{q_2}$	$\underbrace{aq_1 + a_1}_{q_1}$	$\underbrace{q_0 \cdot a + a_0}_{\text{Resto}}$

Exemplos

1º) Calcular o quociente e o resto da divisão de $3x^3 - 2x^2 + 5x - 7$ por $x - 2$

Resolução

1º passo:

	3	–2	5	–7
2	3	Repetimos o primeiro coeficiente do dividendo		

2º passo:

	3	–2	5	–7
2	3	4		

3º passo:

	3	–2	5	–7
2	3	4	13	

4º passo:

	3	–2	5	–7
2	3	4	13	19

5º passo:

	3	–2	5	–7
2	3	4	13	19
	Coeficientes do quociente			Resto

Assim: Q(x) = $3x^2 + 4x + 13$ e R(x) = 19

2º) Dividir $P(x) = 3x^4 + 8x^3 - 20x - 21$ por $(x + 1)$

Resolução

	3	8	0	–20	–21
–1	3	5	–5	–15	–6
	$Q(x) = 3x^3 + 5x^2 - 5x - 15$				Resto = –6

3º) Dado $P(x) = 5x^4 - 9x^3 + 2x^2 - 5x - 11$, calcular P(3).

Resolução

Como P(3) é o resto na divisão de P(x) por (x – 3), temos:

	5	–9	2	–5	–11
3	5	6	20	55	154
	$Q(x) = 5x^3 + 6x^2 + 20x + 55$				Resto = 154

Assim, P(3) = 154

4º) Determine k para que $P(x) = x^5 + x^2 + kx - 5$ seja divisível por x – 2.

Resolução

Devemos ter resto = 0 na divisão de P(x) por (x – 2). Então:

	1	0	0	1	k	–5
2	1	2	4	9	18 + k	31 + 2k

$\underbrace{1 \quad 2 \quad 4 \quad 9 \quad 18+k}_{\text{Quociente}} \quad \underbrace{31+2k}_{\text{Resto}}$

Como o resto é zero, então:

$$31 + 2k = 0 \Rightarrow k = -\frac{31}{2} = -15{,}5$$

$\therefore$ K = –15,5

- **Briot-Ruffini para o binômio ax + b (a ≠ 0, b ≠ 0 e a ≠ 1)**

$P(x) = (ax + b) \cdot Q(x) + r$

$$P(x) = a\left(x + \frac{b}{a}\right) \cdot Q(x) + r$$

$$P(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right) \cdot a\,Q(x) + r$$

Fazendo $Q_1(x) = a \cdot Q(x)$, temos:

$$P(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right) \cdot Q_1(x) + r$$

Assim, aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini para $\left(x + \frac{b}{a}\right)$, obtemos $Q_1(x)$ e r, em que r também é o resto na divisão por (ax + b) e $\frac{1}{a} \cdot Q_1(x)$ é o quociente na divisão por (ax + b)

Exemplo

Dividir $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 2$ por $(2x - 1)$.

Resolução

	2	–4	6	–2
$\frac{1}{2}$	2	–3	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{4}$

$\underbrace{2 \quad -3 \quad \frac{9}{2}}_{Q_1(x)} \quad \underbrace{\frac{1}{4}}_{R(x)}$

Assim:

$$Q(x) = \frac{1}{2} \cdot Q_1(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - 3x + \frac{9}{2})$$

$$Q(x) = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} \text{ e } R(x) = \frac{1}{4}$$

Exercícios Resolvidos

01. Efetuar, utilizando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, a divisão do polinômio $P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 12$ por $D(x) = (x - 1)$.

Resolução

1	2	4	–7	0	12
	2	6	–1	–1	11

Assim, temos:

Quociente: $Q(x) = 2x^3 + 6x^2 - x - 1$

Resto: $R(x) = 11$

02. Obter o quociente e o resto da divisão de $P(x) = 2x^5 - x^3 - 4x + 6$ por $(x + 2)$.

Resolução

–2	2	0	–1	0	–4	6
	2	–4	7	–14	24	–42

Assim, temos:

Quociente: $Q(x) = 2x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 14x + 24$

Resto: $R(x) = -42$

03. Qual o resto da divisão de $P(x) = x^{40} - x - 1$ por $(x-1)$?

Resolução

$R = P(1) = 1^{40} - 1 - 1 = -1$

04. (PUC-MG) O polinômio $P(x) = x^4 - kx^3 + 5x^2 + 5x + 2k$ é divisível por $x - 1$. Então, o valor de k é:

a) –11
b) –1/3
c) 1/5
d) 9

Resolução

$P(x) = x^4 - kx^3 + 5x^2 + 5x + 2k$

P(x) divisível por (x – 1): $P(1) = 0$

$1^4 - k \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 2k = 0$

$1 - k + 5 + 5 + 2k = 0$

$\therefore k = -11$

Resposta: *A*

9. Divisão pelo Produto $(x - a) \cdot (x - b)$

Consideremos um polinômio P(x) com grau maior ou igual a dois, que, dividido por $(x - a)$ e por $(x - b)$ apresenta restos iguais a r_1 e r_2, respectivamente.

Vamos calcular o resto na divisão de P(x) por $(x - a) \cdot (x - b)$.

Como os restos na divisão de P(x) por $(x - a)$ e por $(x - b)$ são r_1 e r_2, respectivamente, temos:

$P(a) = r_1$ e $P(b) = r_2$

O resto na divisão de P(x) por $(x - a) \cdot (x - b)$ é um polinômio $R(x) = mx + n$ de grau no máximo igual a 1, já que o divisor tem grau 2. Assim:

$$P(x) = (x - a) \cdot (x - b) \cdot Q(x) + mx + n$$

Como $P(a) = r_1$ e $P(b) = r_2$, temos:

$$P(a) = (a - a)(a - b) \cdot Q(a) + m \cdot a + n = r_1$$

$$\boxed{ma + n = r_1}$$

$$P(b) = (b - a)(b - b) \cdot Q(b) + m \cdot b + n = r_2$$

$$\boxed{m \cdot b + n = r_2}$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} m \cdot a + n = r_1 \\ m \cdot b + n = r_2 \end{cases}$$

encontramos

$$m = \frac{r_1 - r_2}{a - b} \quad \text{e} \quad n = \frac{ar_2 - br_1}{a - b}$$

Assim: $\boxed{R(x) = \left(\frac{r_1 - r_2}{a - b}\right)x + \left(\frac{ar_2 - br_1}{a - b}\right)}$

Observações

1ª) Se P(x) for divisível por $(x - a)$ e por $(x - b)$, temos:

$P(a) = 0 \Rightarrow r_1 = 0$

$P(b) = 0 \Rightarrow r_2 = 0$

Então, $R(x) = \left(\frac{0 - 0}{a - b}\right)x + \left(\frac{a \cdot 0 - b \cdot 0}{a - b}\right)$

ou seja: $R(x) = 0$

Assim, P(x) é divisível por $(x - a) \cdot (x - b)$

2ª) Do mesmo modo, podemos provar que, se P(x) é divisível por n fatores distintos $(x - a_1), (x - a_2), \dots, (x - a_n)$, então P(x) é divisível pelo produto $(x - a_1) \cdot (x - a_2), \dots (x - a_n)$.

Exemplos

1º) Verificar se o polinômio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ é divisível por $B(x) = x^2 - 1$

Resolução

Sabemos que $B(x) = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$; para que P(x) seja divisível por B(x) é necessário que P(x) seja divisível por $(x + 1)$ e por $(x - 1)$; então devemos ter $P(1) = 0$ e $P(-1) = 0$.

$P(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 1 = 0$

$\therefore$ P(x) divisível por $(x - 1)$

$P(-1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + 4(-1) - 1$

$P(-1) = -10$

$\therefore$ P(x) não é divisível por $(x + 1)$.

Logo, P(x) não é divisível por B(x).

2º) Calcule a e b para que $P(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$ seja divisível por $(x - 1) \cdot (x - 2)$.

Resolução

P(x) deve ser divisível por $(x - 1)$ e por $(x - 2)$. Então:

$P(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 + a \cdot 1 + b = 0$

$\therefore\ a + b = -3$

$P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 + a \cdot 2 + b = 0$

$\therefore\ 2a + b = -16$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a + b = -3 \\ 2a + b = -16 \end{cases}$$

encontramos $a = -13$ e $b = 10$

3º) Se um polinômio P(x) dividido por (x – 1) dá resto 2 e dividido por (x – 2) dá resto 1, qual é o resto na divisão de P(x) pelo produto (x — 1) · (x – 2)?

Resolução

P(1) = 2 e P(2) = 1

O resto na divisão de P(x) por (x – 1) · (x – 2) é um polinômio R(x) = ax + b, pois se o divisor tem grau 2, o resto, no máximo, terá grau 1.

Assim:

$$P(x) = (x-1)\cdot(x-2)\cdot Q(x) + ax + b$$

$$P(1) = (1-1)\,(1-2)\cdot Q(1) + a\cdot 1 + b = 2$$

$$\therefore a + b = 2$$

$$P(2) = (2-1)\,(2-2)\cdot Q(2) + a\cdot 2 + b = 1$$

$$\therefore 2a + b = 1$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$$

encontramos a = – 1 e b = 3.

Assim: R(x) = –x + 3.

10. Divisões Sucessivas

Consideremos um polinômio P(x) divisível por B(x) = (x – a) · (x – b), e que o quociente na divisão de P(x) por B(x) é um polinômio Q(x).

Assim:

$$P(x) = (x-a)\,\overbrace{(x-b)\cdot Q(x)}^{Q_1(x)}$$

P(x) é divisível por (x – a) e o quociente na divisão de P(x) por (x – a) é $Q_1(x)$ = (x – b) Q(x).

Então $Q_1(x)$ é divisível por (x – b) e o quociente na divisão de $Q_1(x)$ por (x – b) é Q(x). Portanto, Q(x) é o quociente na divisão de P(x) por (x – a) · (x – b).

Esquematicamente:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & (x-a)(x-b) \\ \cline{2-2} 0 & Q(x) \end{array} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{l|l} P(x) & x-a \\ \cline{2-2} 0 & Q_1(x) \end{array} \\ \text{e} \\ \begin{array}{l|l} Q_1(x) & x-b \\ \cline{2-2} 0 & Q(x) \end{array} \end{array} \right.$$

Reciprocamente, temos:

Se P(x) é divisível por (x – a) e o quociente $Q_1(x)$, da divisão de P(x) por (x – a), é divisível por (x – b), então concluímos que P(x) é divisível pelo produto (x – a) · (x – b). Além disso, o quociente na divisão de P(x) por (x – a) (x – b) é igual ao quociente na divisão de $Q_1(x)$ por (x – b).

$$\left. \begin{array}{c} \begin{array}{l|l} P(x) & x-a \\ \cline{2-2} 0 & Q_1(x) \end{array} \\ \text{e} \\ \begin{array}{l|l} Q_1(x) & x-b \\ \cline{2-2} 0 & Q(x) \end{array} \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{array}{l|l} P(x) & (x-a)(x-b) \\ \cline{2-2} 0 & Q(x) \end{array}$$

Observações

1ª) Podemos efetuar essas divisões sucessivas com auxílio do dispositivo de Briot-Ruffini.

Exemplo

Verificar se P(x) = $x^3 + 2x^2 - 13x + 10$ é divisível por (x – 1) (x – 2).

Resolução

Dividimos sucessivamente P(x) por (x – 1) e o quociente encontrado por (x – 2).

	1	2	–13	10
1	1	3	–10	0
2	1	5	0	

Como P(x) é divisível por $(x-1)$ e o quociente nesta divisão é divisível por $(x-2)$, concluímos que P(x) é divisível por $(x-1)\cdot(x-2)$.

2º) No caso particular, se b = a, as divisões sucessivas permitem verificar se P(x) é divisível por $(x-a)^2$, $(x-a)^3$, etc.

Exemplo

Calcular a e b para que

$P(x)=x^4+x^2+ax+b$ seja divisível por $(x-1)^2$.

Resolução

Dividimos P(x) por (x – 1), e o quociente encontrado também dividimos por (x – 1). Os restos nas duas divisões devem ser nulos.

	1	0	1	a	b
1	1	1	2	a + 2	a + 2 + b
1	1	2	4	a + 6	

Devemos ter:

$$\begin{cases} a+6=0 \\ a+2+b=0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos:

a = –6 e b = 4

Exercícios Resolvidos

01. (FGV-SP) Para que o polinômio P(x) = $=x^3-8x+mx-n$ seja divisível por $(x+1)(x-2)$, o produto $m\cdot n$ deve ser igual a:

a) – 8
b) 10
c) – 10
d) 8
e) – 6

Resolução

Condição: P(–1) = 0 e P(2) = 0

$$\left.\begin{array}{l} P(-1)=(-1)^3-8(-1)+m(-1)-n=0 \Rightarrow m+n=7 \\ P(2)=(2)^3-8(2)+m(2)-n=0 \Rightarrow 2m-n=8 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m=5 \text{ e } n=2 \therefore m\cdot n=10$$

Resposta: *B*

02. Determine a e b de modo que o polinômio $P(x)=x^3+ax+b$ seja divisível por $(x-1)^2$.

Resolução

1	*1*	*0*	*a*	*b*
1	*1*	*1*	*a+1*	*a+b+1*
	1	*2*	*a+3*	

$$\begin{cases} a+b+1=0 \\ a+3=0 \end{cases}$$

$\therefore a=-3$ *e* $b=2$

03. (UFSC) Um polinômio P(x) dividido por (x + 1) dá resto 3 e por (x – 2) dá resto 6. O resto da divisão de P(x) pelo produto $(x+1)\cdot(x-2)$ é da forma ax + b, com a, b ∈ R. Obter o valor numérico da expressão a + b.

Resolução

$P(x) \div (x+1) \Rightarrow r=P(-1) \Rightarrow P(-1)=3$

$P(x) \div (x-2) \Rightarrow r=P(2) \Rightarrow P(2)=6$

$$\begin{array}{l|l} P(x) & (x+1)\ (x-2) \\ \hline & \quad Q(x) \end{array}$$

$R(x)=ax+b$

$P(x)=(x+1)(x-2)\,Q(x)+ax+b$

$P(-1)=3 \Rightarrow -a+b=3$

$P(2)=6 \Rightarrow 2a+b=6$

$\therefore a=1$ *e* $b=4$

$a+b=5$

Capítulo 03. Equações Algébricas

1. Introdução

Achar as soluções de equações polinomiais foi um dos grandes desafios da Álgebra Clássica.

As primeiras contribuições vieram com o matemático árabe AL-Khowarizmi no século IX, com importantes conclusões sobre a resolução de equações de 1º e 2º graus.

Em seus trabalhos, Al-Khowarizmi usou pela primeira vez o termo "álgebra", que significa "trocar de membro" um termo de uma equação.

Porém, só no século XVI, no Renascimento, é que os matemáticos italianos Girolano Cardano (1501-1576), Niccolo Tartaglia (1500-1557) e Ludovico Ferrari (1522-1565) começaram a propor fórmulas para resolver equações de 3º e 4º graus. No entanto, a resolução de equações de grau superior ao 4º ainda continua sendo um grande desafio.

Em 1798, em sua tese de doutoramento, o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) demonstrou que "toda equação de grau n ($n \in \mathbb{N}^*$) admite pelo menos uma raiz complexa", o que ficou conhecido como o Teorema Fundamental da Álgebra.

Em 1824, o matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829) demonstrou que uma equação do 5º grau não poderia ser resolvida através de fórmulas envolvendo radicais.

Em 1829, o jovem matemático francês Évariste Galois (1811-1832) demonstrou que a impossibilidade descoberta por Abel se estendia a todas as equações polinomiais de grau maior que o 4º.

As descobertas de Abel e Galois não significam, no entanto, que nunca poderemos conhecer as raízes de uma equação de grau maior que o 4º. Existem teoremas gerais que, associados a condições particulares, permitem que descubramos soluções de equações deste tipo.

2. Definições e Elementos

Denominamos **equação polinomial** ou **equação algébrica** de grau n, na variável $x \in \mathbb{C}$, toda equação que pode ser reduzida à forma:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

em que:

$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$ e a_0 são números complexos chamados coeficientes.

Exemplos

1º) $3x - 2 = 0$ é uma equação algébrica de 1º grau.

2º) $5x^3 - 3x + 1 = 0$ é uma equação algébrica de 3º grau.

3º) $\sqrt{5}x^5 + ix + 1 = 0$ é uma equação algébrica de 5º grau.

Chamamos de **raiz** ou **zero** de uma equação polinomial $P(x) = 0$ todo número complexo α, tal que $P(\alpha) = 0$.

α é raiz de $P(x) = 0 \Leftrightarrow P(\alpha) = 0$

Exemplo

1 é raiz da equação $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$,

pois $1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = 0$

Conjunto solução de uma equação polinomial é o conjunto formado por todas as raízes da equação.

Resolver uma equação é obter o seu conjunto verdade.

Exemplos

1º) Resolver a equação $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$

Resolução

$x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x\,(x^2 - 4x + 3) = 0$

Então:

$x = 0$

ou

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = 1$

Assim:

$S = \{0, 1, 3\}$ (conjunto solução).

2º) Resolver a equação:

$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$

Resolução

$$x^2(x+1) - 3(x+1) = 0$$

$$(x+1)\left(x^2 - 3\right) = 0$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

ou

$$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Assim: $S = \left\{-1, +\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right\}$ (conjunto solução)

3º) Resolver a equação $x^3 + 2x^2 + 2x = 0$ em C.

Resolução

$$x^3 + 2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 + 2x + 2\right) = 0$$

$$x\left(x^2 + 2x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 + 2x + 2 = 0$$

De $x^2 + 2x + 2 = 0$, vem:

$\Delta = 4 - 8 = -4 = 4i^2$

$$x = \frac{-2 \pm 2i}{2} \Rightarrow x = -1 + i \text{ ou } x = -1 - i$$

Portanto:

$x^3 + 2x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -1 + i$ ou $x = -1 - i$

Ou seja, o conjunto solução da equação é $S = \{0, -1 + i, -1 - i\}$

Dizemos que duas equações são **equivalentes** em U quando os seus conjuntos soluções em U são iguais.

3. Multiplicidade das Raízes

Em uma equação algébrica de grau n, podemos ter, entre as suas n raízes, m raízes iguais entre si. Quando m raízes são iguais a um mesmo número α, dizemos que α é raiz de **multiplicidade m** da equação.

Observações

1ª) Quando α é uma raiz de multiplicidade m de uma equação $P(x) = 0$, $P(x)$ é divisível por $(x - \alpha)^m$ e não é divisível por $(x - \alpha)^{m+1}$

2ª) Quando α é raiz de multiplicidade 1 de uma equação $P(x) = 0$, dizemos que α é uma raiz simples de $P(x) = 0$

Exemplo

Verificar qual a multiplicidade da raiz 2 na equação $x^4 - 4x^3 + 16x - 16 = 0$. Resolver a equação.

Resolução

Dividindo $P(x) = x^4 - 4x^3 + 16x - 16$ por $(x - 2)$, temos:

	1	–4	0	16	–16
2	1	–2	–4	8	0

Assim:

$P(x) = (x - 2)(x^3 - 2x^2 - 4x + 8)$

Dividindo $Q_1(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ por $(x - 2)$, temos:

	1	–2	–4	8
2	1	0	–4	0

Assim: $P(x) = (x - 2)(x - 2) \cdot (x^2 - 4)$

Como $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$, temos:

$P(x) = (x - 2)^3 \cdot (x + 2)$

Então, 2 é raiz tripla (multiplicidade 3) da equação $P(x) = 0$.

O conjunto solução da equação é:

$$S = \{2, -2\}$$

Quando 1 é raiz?

Sabemos que, num polinômio P(x), o valor de P(1) é igual à soma dos coeficientes de P(x), o que nos permite concluir:

> Numa equação P(x) = 0, se a soma dos coeficientes de P(x) for nula, 1 é raiz da equação.

Exemplo

Resolver a equação:

$2x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$

Resolução

$2 - 3 + 2 - 1 = 0 \Rightarrow$ 1 é raiz da equação.

Dividindo $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ por $(x - 1)$, temos:

	2	–3	2	–1
1	2	–1	1	0

Assim: $P(x) = (x - 1)(2x^2 - x + 1)$

Resolvendo a equação $2x^2 - x + 1 = 0$, temos:

$\Delta = 1 - 8 = -7 = 7i^2$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{4}$$

Assim: $$S = \left\{1, \frac{1 + \sqrt{7}i}{4}, \frac{1 - \sqrt{7}i}{4}\right\}$$

Exercícios Resolvidos

01. Calcule **m** de modo que o número $\frac{1}{2}$ seja raiz da equação:

$x^3 - 4x^2 + mx + 2 = 0$

Resolução

Se $\frac{1}{2}$ é raiz da equação, temos:

$x^3 - 4x^2 + mx + 2 = 0$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + m \cdot \frac{1}{2} + 2 = 0$$

$$\frac{1}{8} - \frac{4}{4} + \frac{m}{2} + 2 = 0$$

$1 - 8 + 4m + 16 = 0$

$4m = -9$

$$m = -\frac{9}{4}$$

02. (FGV-SP) Na equação:

$x^4 + px^3 + px^2 + px + p = 0$, sabendo-se que 1 é raiz, então:

a) $p = -1/4$
b) $p = 0$ ou $p = 1$
c) $p = 0$ ou $p = -1$
d) $p = 1$ ou $p = -1$
e) $p = \frac{1}{3}$

Resolução

$P(1) = 1 + p + p + p + p = 0 \Rightarrow 1 + 4p = 0 \Rightarrow$

$$p = -\frac{1}{4}$$

03. (PUC-SP) A multiplicidade da raiz $x_0 = 1$ da equação $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$ é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Resolução

$x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$

1	1	–1	–3	5	–2	
1	1	0	–3	2	0	
1	1	1	–2	0		
1	1	2	0			
	1	$3 \neq 0$				

Logo, 1 é raiz de multiplicidade 3.

04. (PUC-SP) No universo C, a equação

$$\begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ -2 & x & 0 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} = -2$$

admite:

a) três raízes racionais.
b) duas raízes não reais.
c) duas raízes irracionais.
d) uma única raiz não inteira.
e) uma única raiz positiva.

Resolução

$$\begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ -2 & x & 0 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} = -2$$

$(x+1) \cdot x \cdot (x-2) = -2$
$x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$
Fatorando: $x^2 \cdot (x-1) - 2 \cdot (x-1) = 0$
$(x-1)\ (x^2-2) = 0$
$x - 1 = 0$ *ou* $x^2 - 2 = 0$
$x = 1$ *ou* $x = \sqrt{2}$ *ou* $x = -\sqrt{2}$
$S = \{-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}\}$

Resposta: *C*

05. (UFES) Se f é um polinômio tal que a soma de seus coeficientes é zero, então:

a) $f(0) = 0$
b) f é divisível por $x - 1$
c) f é divisível por $x - 2$
d) f é identicamente nulo
e) f não possui raízes reais

Resolução

Se a soma dos coeficientes é zero, então o polinômio anula-se para $x = 1$. Assim sendo, o número real 1 é raiz do polinômio. Portanto, pelo teorema de D'Alembert, o polinômio é divisível por $(x - 1)$.

Resposta: *B*

4. Teoremas Fundamentais

4.1. Teorema Fundamental da Álgebra

Toda equação polinomial de grau n, $n \geq 1$, admite pelo menos uma raiz complexa.

4.2. Teorema da Decomposição

Admitamos que α_1 é uma raiz da equação de grau n, ($n \geq 1$):

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

Dividindo P(x) por $(x - \alpha_1)$, encontramos um quociente $Q_1(x)$ e resto $R_1 = P(\alpha_1) = 0$

Então:

$$\boxed{P(x) = (x - \alpha_1) \cdot Q_1(x)}$$

$Q_1(x)$ tem grau n – 1 e, se $n - 1 \geq 1$, a equação $Q_1(x) = 0$ possui pelo menos uma raiz α_2. Dividindo $Q_1(x)$ por $(x - \alpha_2)$, encontramos um quociente $Q_2(x)$ e resto $R_2 = Q_1(\alpha_2) = 0$.

Então:

$$\boxed{Q_1(x) = (x - \alpha_2) \cdot Q_2(x)}$$

Ou seja:

$$\boxed{P(x) = (x - \alpha_1)\ (x - \alpha_2) \cdot Q_2(x)}$$

Prosseguindo nesse raciocínio, chegaremos, após um número finito de divisões, a um polinômio constante $Q_n(x) = R$, tal que:

$$P(x) = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n) \cdot Q_n(x)$$

Através da identidade:

$$(x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n) \cdot k =$$

$= a_0x^n + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$, é fácil percebermos que $k = a_n$

Então:

Todo polinômio P(x) de grau n pode ser escrito na forma fatorada:

$$P(x) = a_0(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n),$$

onde a_0 é o coeficiente de x^n no polinômio P(x), e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são as n raízes de P(x).

Observações

1º) Toda equação polinomial de grau n admite n raízes (reais ou imaginárias).

2º) Quando conhecemos uma raiz α da equação P(x) = 0, dividindo P(x) por (x – α) encontramos o quociente Q(x), tal que:

$$P(x) = (x-\alpha)\cdot Q(x)$$

Então:

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-\alpha)\cdot Q(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x = \alpha \text{ ou } Q(x) = 0\right)$$

Assim, as demais raízes de P(x) = 0 também são raízes da equação Q(x) = 0.

Como o grau de Q(x) é uma unidade menor que o grau de P(x) = 0, dizemos que abaixamos o grau da equação.

Exemplos

1º) Dada a equação $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$:

a) verificar que 3 é uma de suas raízes;
b) obter as suas demais raízes;
c) escrever esta equação na forma fatorada.

Resolução

a) Sendo $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$

$P(3) = 2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 11 \cdot 3 + 6$

$P(3) = 54 - 27 - 33 + 6 = 0$

Logo, 3 é raiz de P(x) = 0

b) Como 3 é raiz, podemos dividir P(x) por (x – 3), encontrando resto nulo.

	2	–3	–11	6
3	2	3	–2	0

Assim:

$P(x) = (x - 3)(2x^2 + 3x - 2)$

As demais raízes de P(x) = 0 são as raízes de $2x^2 + 3x - 2 = 0$, que são:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$x = -2 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

Então, as demais raízes da equação são -2 e $\frac{1}{2}$.

c) A forma fatorada de P(x) é:

$$P(x) = 2(x-3)(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

2º) Resolver a equação $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$, em C, sabendo que 1 é raiz.

Resolução

Dividindo $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ por $(x - 1)$, temos:

	1	–3	4	–2
1	1	–2	2	0

Assim: $P(x) = (x - 1)(x^2 - 2x + 2)$

Fazendo $x^2 - 2x + 2 = 0$, temos:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2i}{2}$$

$$x = 1 + i \text{ ou } x = 1 - i$$

Então: S = {1, 1 + i, 1 – i}

3º) Resolver a equação:

$2x^4 - 7x^3 - 17x^2 + 7x + 15 = 0$, sabendo que duas de suas raízes pertencem ao conjunto $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Resolução

Vamos dividir:

$P(x) = 2x^4 - 7x^3 - 17x^2 + 7c + 15$ por $(x + 2)$, $(x + 1)$, (x), $(x - 1)$ e $(x - 2)$, até encontrarmos resto zero.

	2	–7	–17	7	15
–2	2	–11	5	–3	$21 \neq 0$

	2	–7	–17	7	15
–1	2	–9	–8	15	0

Como o resto é nulo, temos:

$P(x) = (x + 1)(2x^3 - 9x^2 - 8x + 15)$

As outras raízes de P(x) serão as raízes de

$2x^3 - 9x^2 - 8x + 15 = 0$

Vamos dividir:

$Q(x) = 2x^3 - 9x^2 - 8x + 15$ sucessivamente por $(x + 1)$, x, $(x - 1)$ e $(x - 2)$, até encontrarmos resto zero.

	2	–9	–8	+15
–1	2	–11	3	$12 \neq 0$

	2	–9	–8	15
0	2	–9	–8	$15 \neq 0$

	2	–9	–8	15
1	2	–7	–15	0

Como o resto é nulo, temos:

$Q(x) = (x - 1)(2x^2 - 7x - 15)$

Assim:

$P(x) = (x + 1)(x - 1)(2x^2 - 7x - 15)$

As demais raízes de $P(x) = 0$ serão as raízes de $2x^2 - 7x - 15 = 0$, então:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4} \Rightarrow x = \frac{7 \pm 13}{4}$$

$$x = 5 \text{ ou } x = \frac{-3}{2}$$

Assim: $S = \left\{-1, 1, 5, \frac{-3}{2}\right\}$

4.3. Multiplicidade das Raízes

Conforme vimos anteriormente, em uma equação algébrica de grau n, podemos ter, entre as suas n raízes, m raízes iguais entre si. Quando m raízes são iguais a um mesmo número α, dizemos que α é raiz de **multiplicidade m** da equação, e, na forma fatorada, o fator $(x - \alpha)$ aparece exatamente m vezes.

$\boxed{\alpha \text{ é a raiz de multiplicidade m de } P(x) = 0}$

$\Updownarrow$

$\boxed{P(x) = (x - \alpha)^m \cdot Q(x) \text{ e } Q(\alpha) \neq 0}$

Exercícios Resolvidos

01. Componha uma equação de grau 3 em que o coeficiente do termo de maior grau é 3, sabendo que 3 é raiz simples e 2 é raiz dupla.

Resolução

$3(x - 2)^2 (x - 3) = 0$

$3(x^2 - 4x + 4)(x - 3) = 0$

$3(x^3 - 7x^2 + 16x - 12) = 0$

$3x^3 - 21x^2 + 48x - 36 = 0$

02. (UEL-PR) As soluções de uma das equações abaixo, para um valor adequado de k, são –2, 3 e 5. Qual é essa equação?

a) $x^3 + 6x^2 - 31x + k = 0$
b) $x^3 + kx^2 - x + 36 = 0$
c) $2x^3 + 6x^2 - x + k = 0$
d) $2x^3 - 12x^2 - 2x + k = 0$
e) $2x^3 - 12x^2 + kx + 20 = 0$

Resolução

$a_0\,(x + 2)\,(x - 3)\,(x - 5) = 0$

$a_0\,(x^2 - x - 6)\,(x - 5) = 0$

$a_0(x^3 - 6x^2 - x + 30) = 0$

Para $a_0 = 1$, *temos:* $x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$

Para $a_0 = 2$, *temos:* $2x^3 - 12x^2 - 2x + 60 = 0$

A equação procurada está na alternativa D e o valor de k *é 60.*

03. Sabendo-se que –2 é uma raiz dupla do polinômio $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$, então o conjunto de todos os números reais x para os quais a expressão $\dfrac{1}{\sqrt{P(x)}}$ está definida é:

a) $\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq -2\}$
b) $\{x \in \mathbf{R} \mid x > -1\}$
c) $\{x \in \mathbf{R} \mid x > 1\}$
d) $\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq -2 \text{ e } x \neq 1\}$
e) não sei.

Resolução

$P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$; – 2 é raiz dupla:

–2	1	3	0	–4
–2	1	1	–2	0
	1	–1	0	

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Temos, então:

$P(x) = (x + 2)^2\,(x - 1)$

$\dfrac{1}{\sqrt{P(x)}}$ *é definida para $P(x) > 0$ ou:*

$(x+2)^2 \cdot (x - 1) > 0.$

Como $(x + 2)^2$ é positivo ou nulo, devemos ter $x - 1 > 0$ ou $x > 1$.

Resposta: *C*

04.(Fuvest-SP) As três raízes de $9x^3 - 31x - 10 = 0$ são p, q e 2. O valor de $p^2 + q^2$ é:

a) 5/9
b) 10/9
c) 20/9
d) 26/9
e) 31/9

Resolução

2	9	0	– 31	– 10
	9	18	5	0

Então:

$9x^3 - 31x - 10 = (x - 2) \cdot (9x^2 + 18x + 5)$.

Assim:

$$9x^2 + 18x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-18 \pm 12}{18}\begin{cases} x = -\dfrac{5}{3} \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$p^2 + q^2 = \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{26}{9}$$

Resposta: *D*

5. Relações de Girard

As relações de Girard (Albert Girard, matemático francês, 1595-1632) são relações entre os coeficientes de uma equação algébrica e as raízes da mesma.

Analisemos inicialmente essas relações para equações de 2º, 3º e 4º graus e, de modo análogo, para equações de grau n.

5.1. Para Equações de 2º Grau

Consideremos a equação:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

Supondo que x_1 e x_2 são raízes, temos:

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \equiv x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$$

Assim:

$$\boxed{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{e} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Exemplo

Sendo x_1 e x_2 raízes de $x^2 - 7x + 8 = 0$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{7}{1} = 7$$

e

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{8}{1} = 8$$

5.2. Para Equações de 3º Grau

Consideremos a equação:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \ (a \neq 0)$$

Supondo que x_1, x_2 e x_3 são raízes, temos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3)$$

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \equiv x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 +$$

$$+(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Assim:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= \frac{-b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 &= \frac{-d}{a} \end{aligned}}$$

Exemplo

Sendo x_1, x_2 e x_3 raízes de

$$3x^3 - 7x^2 + 8x + 2 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a} = \frac{7}{3}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = \frac{8}{3}$$

$$x_1x_2x_3 = \frac{d}{a} = \frac{-2}{3}$$

5.3. Para Equações de 4º Grau

Consideremos a equação

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad (a \neq 0)$$

Supondo que x_1, x_2, x_3 e x_4 são raízes da equação, temos:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \equiv$$

$$\equiv a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} \equiv$$

$$\equiv x^4 + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x_3 + (x_1x_2 + x_1x_3 +$$

$$+x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)x^2 + (x_1x_2x_3 +$$

$$+x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)x + x_1x_2x_3x_4$$

Assim:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 &= \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 &= -\frac{d}{a} \\ x_1x_2x_3x_4 &= \frac{e}{a} \end{aligned}}$$

Exemplo

Sabendo que 2 + i é raiz da equação $2x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 37x - 15 = 0$, determine as outras raízes.

Resolução

Se $x_1 = 2 + i$ é uma raiz, então $x_2 = 2 - i$ também é. (Isto será demonstrado no próximo módulo.)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{3}{2} \Rightarrow (2+i) +$$
$$+(2-i) + x_3 + x_4 = \frac{3}{2}$$
$$\therefore x_3 + x_4 = -\frac{5}{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = -\frac{15}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2+i)(2-i)x_3 \cdot x_4 = -\frac{15}{2}$$
$$\therefore x_3 \cdot x_4 = -\frac{3}{2}$$

Como $x_3 + x_4 = -\frac{5}{2}$ e $x_3 \cdot x_4 = -\frac{3}{2}$, x_3 e x_4 são raízes de $2x^2 + 5x - 3 = 0$

Resolvendo, temos:

$$x_3 = -3 \text{ e } x_4 = \frac{1}{2}$$

Então, as outras raízes são $2 - i$, -3 e $\frac{1}{2}$.

5.4. Para Equações de Grau n

Consideremos a equação de grau n $(n > 1)$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0$$

Sendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ raízes dessa equação, temos:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$
$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + \ldots + x_{n-1} \cdot x_n = \frac{a_2}{a_0}$$
$$\vdots$$
$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

Exemplos

1º) Calcular o coeficiente m para que a equação $x^3 + mx^2 - 2x + 1 = 0$ admita duas raízes opostas.

Resolução

Se α, $-\alpha$ e β são as raízes, temos:

$$\alpha + (-\alpha) + \beta = -m \Rightarrow \beta = -m \quad \text{(I)}$$
$$\alpha(-\alpha) + \alpha\beta + (-\alpha)\beta = -2 \Rightarrow -\alpha^2 = -2 \quad \text{(II)}$$
$$\alpha(-\alpha)\beta = -1 \Rightarrow -\alpha^2\beta = -1 \quad \text{(III)}$$

Substituindo (I) e (II) em (III), temos:

$$-2 \cdot (-m) = -1 \Rightarrow \boxed{m = -\frac{1}{2}}$$

2º) Calcular o coeficiente m de modo que a equação $x^3 + mx^2 + 11x + m = 0$ admita raízes α, β, γ que verifiquem a relação $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 14$.

Resolução

$\alpha + \beta + \gamma = -m$ e $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 11$

$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\,\alpha\beta +$
$+ 2\,\alpha\gamma + 2\,\beta\gamma$

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 +$
$- 2\,(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$

Assim: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (-m)^2 - 2 \cdot (11)$

Então: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = m^2 - 22$

$14 = m^2 - 22$

$m^2 = 36 \Rightarrow \boxed{m = \pm 6}$

Exercícios Resolvidos

01. (UFSCar-SP) Sabendo-se que a soma de duas das raízes da equação $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ é igual a 5, pode-se afirmar a respeito das raízes que:

a) são todas iguais e não nulas.
b) somente uma raiz é nula.
c) as raízes constituem uma progressão geométrica.
d) as raízes constituem uma progressão aritmética.
e) nenhuma raiz é real.

Resolução

$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$

Raízes: x_1, x_2 *e* x_3

Informação: $x_1 + x_2 = 5$

Girard: $x_1 + x_2 + x_3 = 7 \Rightarrow 5 + x_3 = 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_3 = 2$

Como 2 é raiz, por Briot-Ruffini, temos

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -7 & 14 & -8 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & 0 \end{array}$$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$x = 1$ ou $x = 4$

$S = \{1, 2, 4\}$

Resposta: *C*

02. (ITA-SP) Se α, β, γ são raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$, então, o valor de $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ é:

a) $\frac{1}{4}$

b) $-\frac{1}{4}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $-\frac{3}{2}$

e) $\frac{3}{2}$

Resolução

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta\cdot\gamma + \alpha\cdot\gamma + \alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma} = \frac{\frac{a_2}{a_0}}{\frac{-a_3}{a_0}} = \frac{a_2}{-a_3} = \frac{3}{4}$$

Resposta: *C*

03. (Fuvest-SP) Sabe-se que o produto de duas raízes da equação algébrica $2x^3 - x^2 + kx + 4 = 0$ é igual a 1. Então, o valor de k é:

a) – 8

b) – 4

c) 0

d) 4

e) 8

Resolução

$2x^3 - x^2 + kx + 4 = 0$

Raízes: x_1, x_2 e x_3

Informação: $x_1 \cdot x_2 = 1$

Girard: $\underbrace{x_1 \cdot x_2}_{1} \cdot x_3 = \frac{-4}{2} = -2$

$\therefore x_3 = -2$

-2 é raiz $\Rightarrow P(-2) = 0$

$2(-2)^3 - (-2)^2 - 2k + 4 = 0$

$-16 - 4 - 2k + 4 = 0$

$-2k - 16 = 0$

$k = -8$

Resposta: *A*

6. Teorema das Raízes Complexas

Raízes Complexas de Equações com Coeficientes Reais

Consideremos a equação de coeficientes reais:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

Supondo que o número complexo z é raiz da equação, temos:

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-2}z^2 + a_{n-1}z + a_n = 0$$

Logo, o conjugado de:

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-2}z^2 + a_{n-1}z + a_n$$

também é zero, ou seja:

$$\overline{a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-2}z^2 + a_{n-1}z + a_n} = 0$$

Utilizando as propriedades do conjugado, concluímos que:

$$a_0 \cdot \overline{z}^n + a_1 \cdot \overline{z}^{n-1} + \dots +$$

$$+ a_{n-2} \cdot \overline{z}^2 + a_{n-1} \cdot \overline{z} + a_n = 0$$

Dessa forma, $\overline{z}$ também é raiz da equação considerada.

Assim, concluímos que:

> Se um número complexo $z = a + bi$ ($a \in R$ e $b \in R$), é raiz de uma equação algébrica de coeficientes reais, então o conjugado de z, $\overline{z} = a - bi$, também é raiz dessa equação.

Exemplo

Resolver a equação $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 2 = 0$ sabendo, que uma raiz é $(1 - i)$.

Resolução

Se $(1 - i)$ é raiz da equação

$P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 2 = 0$, então $(1 + i)$ também é raiz. Assim:

	1	–4	5	–2	–2
1+ i	1	–3+i	1–2i	1–i	0
1– i	1	–2	–1	0	

P(x) = [x – (1 + i)] [x – (1 – i)] · [x^2 – 2x – 1]

Fazendo $x^2 - 2x - 1 = 0$, temos $x = 1 + \sqrt{2}$ ou $x = 1 - \sqrt{2}$

Logo:

$$S = \left\{1+i,\ 1-i,\ 1+\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}\right\}$$

Importante

Demonstra-se que, numa equação algébrica de coeficientes reais, valem ainda as propriedades:

1ª) Se z é raiz de multiplicidade m, então $\overline{z}$ também será raiz de multiplicidade m.

2ª) Dada a equação algébrica $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a^2x_{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$ com **coeficientes inteiros**, se o número irracional $a + b\sqrt{n}$ (n não é um quadrado perfeito) for uma de suas raízes, então o número irracional $a - b\sqrt{n}$ também será raiz desta equação.

Conseqüências

1ª) Numa equação algébrica de coeficientes reais e de grau ímpar, pelo menos uma de suas raízes é real.

2ª) Numa equação algébrica de coeficientes reais, a quantidade de raízes imaginárias é sempre um número par.

Exercícios Resolvidos

01. Uma equação algébrica com coeficientes reais admite como raízes os números complexos 2 + i, 1 – i e 0. Podemos afirmar que o grau dessa equação é, necessariamente:

a) par.
b) ímpar.
c) igual a três.
d) menor ou igual a seis.
e) maior ou igual a cinco.

Resolução

Como a equação tem coeficientes reais, além das raízes 2 + i, 1 – i e zero, ela admite também 2 – i e 1 + i como raízes. Logo, o menor grau possível para essa equação é 5.

Resposta: *E*

02. Resolver a equação $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$, sabendo-se que 1 + i é uma de suas raízes.

Resolução

Sendo a equação de coeficientes reais, se 1 + i é uma raiz, então 1 – i também será raiz desta equação. Assim, já temos duas das três raízes da equação. Pelas relações de Girard, temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_1}{a_0}, \text{ ou seja, } (1+i) + (1-i) + x_3 = 5$$

$\therefore x_3 = 3$

V = {1 – i, 1 + i, 3}

03. Sendo $4 + \sqrt{2}\,i$ e $\sqrt{5}$ raízes do polinômio $P(x) = 2x^5 - 22x^4 + 74x^3 + 2x^2 - 420x + 540$, então a soma dos quadrados das raízes reais desse polinômio é:

a) 17
b) 23
c) 19
d) 25
e) 21

Resolução

Sendo a equação de coeficientes inteiros, se $4 + \sqrt{2}\,i$ e $\sqrt{5}$ são raízes, então $4 - \sqrt{2}\,i$ e $-\sqrt{5}$ também são raízes desta equação. Assim, já temos quatro das cinco raízes da equação. Pelas relações de Girard, temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -\frac{a_1}{a_0}, \text{ ou seja,}$$

$$\left(4 + \sqrt{2}\,i\right) + \left(\sqrt{5}\right) + \left(4 - \sqrt{2}\,i\right) + \left(-\sqrt{5}\right) + x_5 = 11$$

$\therefore x = 3$

As raízes reais são: $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$ *e 3.*

A soma dos quadrados das raízes reais é:

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(-\sqrt{5}\right)^2 + 3^2 = 19$$

Resposta: *C*

7. Pesquisa de Raízes Racionais

Vimos até aqui que, para resolvermos uma equação algébrica P(x) = 0 de grau n, devemos descobrir uma raiz α e dividir P(x) por $(x - \alpha)$, recaindo em uma equação Q(x) = 0 de grau n – 1.

7.1. Raízes Inteiras de Equações com Coeficientes Inteiros

Consideremos uma equação

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$

com $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$ e a_0 inteiros ($a_n \neq 0$ e $a_0 \neq 0$).

Supondo que α inteiro é raiz de P(x) = 0, temos:

$$P(\alpha) = 0$$

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$$

$$a_n = -a_0\alpha^n - a_1\alpha^{n-1} - \ldots - a_{n-1}\alpha$$

$$a_n = \alpha(-a_0\alpha^{n-1} - a_1\alpha^{n-2} - \ldots - a_{n-1})$$

$$\frac{a_n}{\alpha} = \underbrace{-a_0\alpha^{n-1} - a_1\alpha^{n-2} - \ldots - a_{n-1}}_{\text{inteiro}}$$

Assim, $\frac{a_n}{\alpha}$ também é inteiro e, portanto:

$$\boxed{\alpha \text{ é divisor de } a_n}$$

Observação

Com esta propriedade, quando tivermos uma equação algébrica de coeficientes inteiros, podemos descobrir as suas raízes inteiras (se existirem). Para tanto, devemos pesquisar todos os divisores (positivos e negativos) de a_n, o termo independente da equação.

Exemplo

Resolver a equação:

$$2x^3 - 11x^2 + 17x - 6 = 0$$

Resolução

As possíveis raízes inteiras da equação são os divisores de – 6, ou seja, ± 1, ± 2, ± 3, ± 6.

Pesquisando as raízes:

	2	–11	17	–6
1	2	–9	8	2
–1	2	–13	30	–36
2	2	–7	3	0

2 é uma raiz de P(x) = 0, então

$P(x) = (x - 2)(2x^2 - 7x + 3)$

$$2x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = 3$$

$$\therefore S = \left\{2, \frac{1}{2}, 3\right\}$$

Observação

Podemos notar que a equação tem outra raiz inteira, o número 3, que é um divisor de $a_n = -6$

7.2. Raízes Racionais de Equações com Coeficientes Inteiros

Consideremos a equação:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com coeficientes a, b, c e d **inteiros** ($a \neq 0$ e $d \neq 0$).

Supondo que o número racional $\alpha = \frac{p}{q}$ (p e q inteiros e primos entre si) é raiz da equação, temos:

$$a \cdot \frac{p^3}{q^3} + b \cdot \frac{p^2}{q^2} + c \cdot \frac{p}{q} + d = 0$$

$$a \cdot p^3 + b \cdot p^2 \cdot q + c \cdot p \cdot q^2 + d \cdot q^3 = 0 \quad \text{(I)}$$

De (I) temos:

$ap^3 + (b \cdot p^2 + c \cdot p \cdot q + d \cdot q^2) \cdot q = 0$

então $b \cdot p^2 + c \cdot p \cdot q + d \cdot q^2 = -\dfrac{ap^3}{q}$

Como $b \cdot p^2 + c \cdot p \cdot q + d \cdot q^2$ é inteiro, $\dfrac{ap^3}{q}$ é inteiro.

Como p e q são primos entre si,

q é divisor de a

Também de (I) temos:

$(a \cdot p^2 + b \cdot p \cdot q + c \cdot q^2) \cdot p + d \cdot q^3 = 0$

então, $a \cdot p^2 + b \cdot p \cdot q + c \cdot q^2 = -\dfrac{d \cdot q^3}{p}$

Como $a \cdot p^2 + b \cdot p \cdot q + c \cdot q^2$ é inteiro, $\dfrac{d \cdot q^3}{p}$ é inteiro.

Como p e q são primos entre si,

p é divisor de d

Assim, na equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ as possíveis raízes racionais $\dfrac{p}{q}$ são tais que p é divisor do termo independente d, e q é divisor do coeficiente do termo de maior grau da equação.

Generalizando, temos:

Se $\alpha = \dfrac{p}{q}$ (p e q primos entre si) é uma raiz racional da equação de coeficientes inteiros:

$a_0x^n + a_1x^{n+1} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0$ ($a_n \neq 0$ e $a_0 \neq 0$), então p é divisor de a_n e q é divisor de a_0

Exemplo

Resolver a equação:

$$2x^3 + x^2 + x - 1 = 0$$

Resolução

Os divisores do termo independente são:

$$+1 \text{ e } -1$$

Os divisores do coeficiente do termo de maior grau são:

$$\pm 1 \text{ e } \pm 2$$

Os únicos valores racionais possíveis para raízes da equação são:

$$+1, -1, \frac{1}{2} \text{ e } -\frac{1}{2}$$

Pesquisando estes valores, temos:

	2	1	1	–1
1	2	3	4	3
–1	2	–1	2	–3
$\frac{1}{2}$	2	2	2	0

Assim, $\dfrac{1}{2}$ é raiz e a equação pode ser escrita:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 2x + 2) = 0$$

Resolvendo a equação $2x^2 + 2x + 2 = 0$, temos:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Assim:

$$S = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

Exercícios Resolvidos

01. Entre as frações

$$\frac{3}{4}, \frac{3}{7}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{6}{10}, \frac{5}{11}, \frac{7}{12}, \frac{11}{13}, \frac{9}{15} \text{ e } \frac{13}{6}$$

podem ser raízes da equação $16x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + 45 = 0$, com **a**, **b**, **c**, **d** e **e** números inteiros, as frações:

a) $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{8}$ d) $\frac{5}{11}$ e $\frac{7}{12}$

b) $\frac{9}{15}$ e $\frac{7}{8}$ e) $\frac{13}{6}$ e $\frac{5}{11}$

c) $\frac{3}{7}$ e $\frac{11}{13}$

Resolução

Em todas as alternativas, exceto a primeira, em pelo menos uma das frações ou o numerador não é divisor inteiro de 45 ou o denominador não é divisor inteiro de 16.

Resposta: *A*

02. Obter todas as raízes, reais e não reais, da equação: $x^3 - 4x^2 + x + 26 = 0$.

Resolução

$p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 13, \pm 26\}$ *e* $q \in \{\pm 1\}$

Assim, $\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 13, \pm 26\}$ *(possíveis raízes racionais).*

Para $x = -2$*, temos:*

	1	−4	1	26
−2	1	−6	13	0

Portanto, -2 *é uma raiz*

$$x^2 - 6x + 13 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i$$

$V = \{-2,\ 3 + 2i,\ 3 - 2i\}$

03. Resolver a equação: $2x^3 - 7x^2 + 6x + 5 = 0$

Resolução

$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 6x + 5$

As possíveis raízes racionais são: $\frac{p \in D(5)}{q \in D(2)} \Rightarrow$

$$\frac{p}{q} \in \left\{\pm 1; \pm\frac{1}{2}; \pm 5; \pm\frac{5}{2}\right\}$$

	2	−7	6	5
−1/2	2	−8	10	0

Portanto, −1/2 é uma das raízes; as outras duas são as raízes da equação:

$2x^2 - 8x + 10 = 0$

$x^2 - 4x + 5 = 0$

$\Delta = 16 - 20 = -4 = 4i^2$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2}$$

$$x = \frac{2(2 \pm i)}{2} = 2 \pm i \text{ e assim:}$$

$$V = \left\{-\frac{1}{2}; 2 - i; 2 + i\right\}$$