Matemática 8
Trigonometria

Pré-Vestibular
Teoria e Exercícios Propostos

www.editora.coc.com.br
Editora COC – Empreendimentos Culturais Ltda.
Rua General Celso de Mello Rezende, 301
Tel.: (16) 603.9700 – CEP 14095-270
Lagoinha – Ribeirão Preto – SP

índice.matemática 8

Capítulo 01. Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Capítulo 02. Arcos e Ângulos

Capítulo 03. O Ciclo Trigonométrico

Capítulo 04. Adição e Subtração de Arcos

PV2D-06-MAT-81

índice.matemática 8

Capítulo 05. Trigonometria dos Números Reais

Capítulo 06. Inequações Trigonométricas

Capítulo 07. Funções Trigonométricas

Capítulo 01. Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

1. Introdução

Definiremos algumas relações e números obtidos a partir dos lados de triângulos retângulos. Antes, porém, precisamos rever algumas de suas propriedades.

A fig. 1 apresenta um triângulo onde um de seus ângulos internos é reto (de medida $90°$ ou $\frac{\pi}{2}$ rad), o que nos permite classificá-lo como um **triângulo retângulo**.

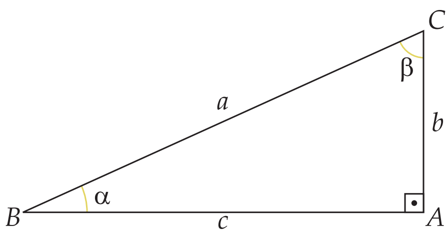


figura 1

Lembremo-nos de que, qualquer que seja o triângulo, a soma dos seus três ângulos internos vale 180°. Logo, a respeito do triângulo ABC apresentado, dizemos que:

$$\alpha + \beta + 90° = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = \mathbf{90°}$$

Com isso, podemos concluir:

1) que os ângulos α e β são **complementares**, isto é, são ângulos cujas medidas somam 90°;

2) uma vez que são complementares, ambos terão medida inferior a 90°.

Portanto, dizemos que todo triângulo retângulo tem **um ângulo interno reto** e **dois agudos, complementares entre si.**

De acordo com a figura, reconhecemos nos lados **b** e **c** os **catetos** do triângulo retângulo e em **a** sua **hipotenusa**.

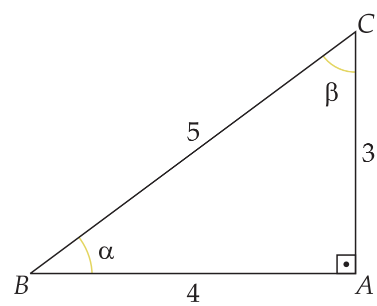
Lembremo-nos de que a hipotenusa será sempre o lado oposto ao ângulo reto e, ainda, o lado maior do triângulo. Podemos relacioná-los através do **Teorema de Pitágoras**, o qual enuncia que *o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos (sic)* ou, em linguajar moderno, "**a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo**".

Aplicado ao nosso triângulo, e escrito em linguagem matemática, o teorema seria expresso como segue:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

2. Seno, Co-seno e Tangente de um Ângulo Agudo

A fig. 2 ilustra um triângulo retângulo conhecido como **triângulo pitagórico**, classificação devida ao fato de que, segundo a tradição grega, através dele Pitágoras enunciou seu Teorema.



De fato, as medidas de seus lados (3, 4 e 5 unidades de comprimento) satisfazem a sentença $5^2 = 3^2 + 4^2$.

Apesar de nos apoiarmos particularmente no triângulo pitagórico, as relações que iremos definir são válidas para todo e qualquer triângulo retângulo. Apenas queremos, dessa forma, obter alguns resultados que serão comparados adiante.

Definimos seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo pelas relações apresentadas no quadro a seguir:

$$\text{seno do ângulo} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{co-seno do ângulo} = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tangente do ângulo} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo}}{\text{cateto adjacente ao ângulo}}$$

A partir dessas definições, o cálculo de seno, co-seno e tangente do ângulo α, por exemplo, nos fornecerão os seguintes valores:

$$\text{sen } \alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

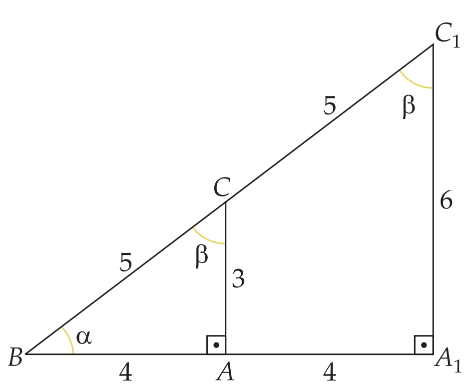
$$\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Ao que acabamos de ver, aliemos um conhecimento adquirido da Geometria. Ela nos ensina que dois triângulos de lados proporcionais são semelhantes.

Se multiplicarmos, então, os comprimentos dos lados de nosso triângulo por 2, teremos um triângulo pitagórico semelhante, com os novos lados (6, 8 e 10) igualmente satisfazendo o Teorema de Pitágoras.

Na fig. 3, apresentamos o resultado dessa operação, em que mostramos o triângulo *ABC*, já conhecido na fig. 1, e A_1BC_1.



Observemos que os ângulos α e β permanecem sendo os ângulos agudos internos do triângulo recém-construído.

Lançando mão das medidas dos novos lados $\overline{A_1B}$, $\overline{BC_1}$ e $\overline{A_1C_1}$ (respectivamente 8, 10 e 6 unidades de comprimento), calculemos, para o ângulo α, os valores de seno, co-seno e tangente:

$$\text{sen } \alpha = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

$$\cos \alpha = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{6}{8} = 0{,}75$$

Nosso intuito, na repetição dessas operações, é mostrar que, não importando se o triângulo é maior ou menor, as relações definidas como seno, co-seno e tangente têm, individualmente, valores constantes, desde que calculados para os mesmos ângulos.

Em outras palavras, **seno, co-seno e tangente são funções apenas dos ângulos internos do triângulo retângulo,** e não de seus lados.

3. Outras Razões Trigonométricas: Co-tangente, Secante e Co-secante

Além das razões com que trabalhamos até aqui, são definidas a co-tangente, secante e co-secante de um ângulo agudo de triângulo retângulo através de relações entre seus lados, como definimos no quadro a seguir:

$$\text{cotg do ângulo} = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo}}{\text{cateto oposto ao ângulo}}$$

$$\text{sec do ângulo} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente ao ângulo}}$$

$$\text{cossec do ângulo} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto ao ângulo}}$$

Por exemplo, para um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 unidades de comprimento, como exibido na fig. 6, teríamos, para o ângulo α,

$\text{cotg}\ \alpha = \dfrac{4}{3}$

$\sec \alpha = \dfrac{5}{4}$

$\text{cosec}\ \alpha = \dfrac{5}{3}$

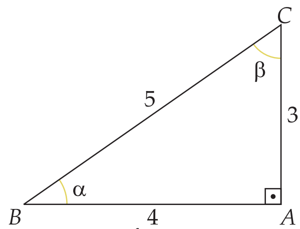
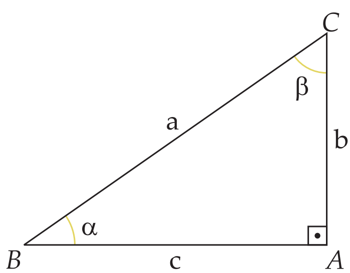


fig. 6

4. Seno, Co-seno, Tangente e Co-tangente de Ângulos Complementares

Já foi visto que em todo triângulo retângulo os ângulos agudos são complementares.



$$\boxed{\alpha + \beta = 90°}$$

Sabemos ainda que:

$\text{sen}\ \alpha = \dfrac{b}{a}$ $\qquad$ $\text{sen}\ \beta = \dfrac{c}{a}$

$\cos \alpha = \dfrac{c}{a}$ $\qquad$ $\cos \beta = \dfrac{b}{a}$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{b}{c}$ $\qquad$ $\text{tg}\ \beta = \dfrac{c}{b}$

$\text{cotg}\ \alpha = \dfrac{c}{b}$ $\qquad$ $\text{cotg}\ \beta = \dfrac{b}{c}$

Verifica-se facilmente que:

$\text{sen}\ \alpha = \cos \beta$; $\cos \alpha = \text{sen}\ \beta$;

$\text{tg}\ \alpha = \text{cotg}\ \beta$ $\quad$ $\text{cotg}\ \alpha = \text{tg}\ \beta$.

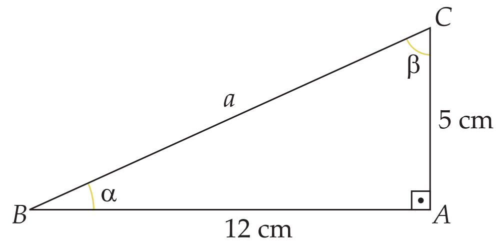
Tabelas de Razões Trigonométricas

Arco	Sen	Cos	Tg
0°	0,0000	1,0000	0,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175
2°	0,0349	0,9994	0,0349
3°	0,0523	0,9986	0,0524
4°	0,0698	0,9976	0,0699
5°	0,0872	0,9962	0,0875
6°	0,1045	0,9945	0,1051
7°	0,1219	0,9925	0,1228
8°	0,1392	0,9903	0,1405
9°	0,1564	0,9877	0,1584
10°	0,1736	0,9848	0,1763
11°	0,1908	0,9816	0,1944
12°	0,2079	0,9781	0,2126
13°	0,2250	0,9744	0,2309
14°	0,2419	0,9703	0,2493
15°	0,2588	0,9659	0,2679
16°	0,2756	0,9613	0,2867
17°	0,2924	0,9563	0,3057
18°	0,3090	0,9511	0,3249
19°	0,3256	0,9455	0,3443
20°	0,3420	0,9397	0,3640
21°	0,3584	0,9336	0,3839
22°	0,3746	0,9272	0,4040
23°	0,3907	0,9205	0,4245
24°	0,4067	0,9135	0,4452
25°	0,4226	0,9063	0,4663
26°	0,4384	0,8988	0,4877
27°	0,4540	0,8910	0,5095
28°	0,4695	0,8829	0,5317
29°	0,4848	0,8746	0,5543
30°	0,5000	0,8660	0,5774
31°	0,5150	0,8572	0,6009
32°	0,5299	0,8480	0,6249
33°	0,5446	0,8387	0,6494
34°	0,5592	0,8290	0,6745
35°	0,5736	0,8192	0,7002
36°	0,5878	0,8090	0,7265
37°	0,6018	0,7986	0,7536
38°	0,6157	0,7880	0,7813
39°	0,6293	0,7771	0,8098
40°	0,6428	0,7660	0,8391
41°	0,6561	0,7547	0,8693
42°	0,6691	0,7431	0,9004
43°	0,6820	0,7314	0,9325
44°	0,6947	0,7193	0,9657
45°	0,7071	70710,	1,0000

Arco	Sen	Cos	Tg
46°	0,7193	0,6947	1,0355
47°	0,7314	0,6820	1,0724
48°	0,7431	0,6691	1,1106
49°	0,7547	0,6561	1,1504
50°	0,7660	0,6428	1,1918
51°	0,7771	0,6293	1,2349
52°	0,7880	0,6157	1,2799
53°	0,7986	0,6018	1,3270
54°	0,8090	0,5878	1,3764
55°	0,8192	0,5736	1,4281
56°	0,8290	0,5592	1,4826
57°	0,8387	0,5446	1,5399
58°	0,8480	0,5299	1,6003
59°	0,8572	0,5150	1,6643
60°	0,8660	0,5000	1,7321
61°	0,8746	0,4848	1,8040
62°	0,8829	0,4695	1,8807
63°	0,8910	0,4540	1,9626
64°	0,8988	0,4384	2,0503
65°	0,9063	0,4226	2,1445
66°	0,9135	0,4067	2,2460
67°	0,9205	0,3907	2,3559
68°	0,9272	0,3746	2,4751
69°	0,9336	0,3584	2,6051
70°	0,9397	0,3420	2,7475
71°	0,9455	0,3256	2,9042
72°	0,9511	0,3090	3,0777
73°	0,9563	0,2924	3,2709
74°	0,9613	0,2756	3,4874
75°	0,9659	0,2588	3,7321
76°	0,9703	0,2419	4,0108
77°	0,9744	0,2250	4,3315
78°	0,9781	0,2079	4,7046
79°	0,9816	0,1908	5,1446
80°	0,9848	0,1736	5,6713
81°	0,9877	0,1564	6,3138
82°	0,9903	0,1392	7,1154
83°	0,9925	0,1219	8,1443
84°	0,9945	0,1045	9,5144
85°	0,9962	0,0872	11,4301
86°	0,9976	0,0698	14,3007
87°	0,9986	0,0523	19,0811
88°	0,9994	0,0349	28,6363
89°	0,9998	0,0175	57,2900
90°	1,0000	0,0000	– – – –

Exercícios Resolvidos

01. Um triângulo retângulo tem catetos cujas medidas são 5 cm e 12 cm. Determine o valor de seno, co-seno e tangente dos seus ângulos agudos.



Resolução

Para respondermos ao que se pede, necessitaremos do comprimento da hipotenusa do triângulo. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos que

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 5^2 + 12^2 = 169$$

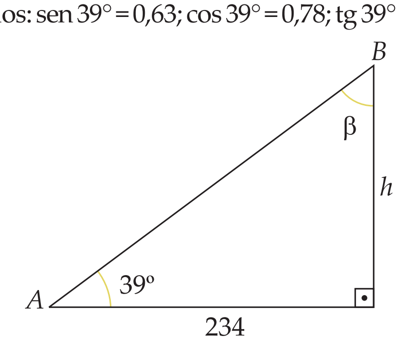
Logo, $a = 13$ cm. Assim, obtemos para seno, co-seno e tangente dos ângulos da figura, os seguintes valores:

$$sen\ \alpha = \frac{5}{13} \qquad cos\ \alpha = \frac{12}{13} \qquad tg\ \alpha = \frac{5}{12}$$

$$sen\ \beta = \frac{12}{13} \qquad cos\ \beta = \frac{5}{13} \qquad tg\ \beta = \frac{12}{5}$$

02. Um observador avista, de um ponto *A*, o topo de um edifício num ponto *B*, e, medindo a distância de *A* até a base do edifício, ele encontra 234 m. Sabendo-se que a linha *AB* forma com a horizontal um ângulo de 39°, determinar a altura aproximada do edifício, desprezando a altura do observador.

(Dados: sen 39° = 0,63; cos 39° = 0,78; tg 39° = 0,81)



Resolução

$$tg\ 39° = \frac{h}{234}$$

$$0{,}81 \cdot 234 = h$$

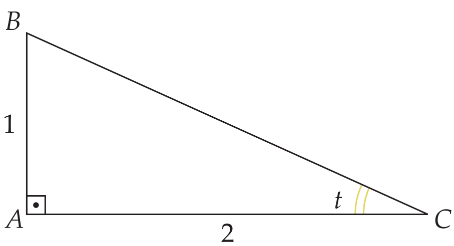
$$h = 189{,}54$$

03. (UFPa-PA)

No triângulo retângulo da figura temos:

I) $\text{sen}\ t = \frac{1}{2}$ III) $\text{tg}\ t = 2$

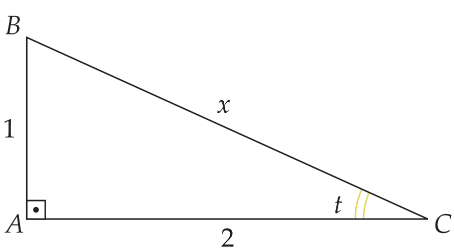
II) $\sec t = \frac{\sqrt{5}}{2}$



As afirmativas verdadeiras é (são):

a) I
b) II
c) III
d) II e III
e) I, II e III

Resolução



$$x^2 = 2^2 + 1^2 \Rightarrow x = \sqrt{5}$$

$$sen\ t = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow I)\ F$$

$$sec\ t = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow II)\ V$$

$$tg\ t = \frac{1}{2} \Rightarrow III)\ F$$ ***Resposta:*** *B*

5. Seno, Co-seno e Tangente dos Ângulos Notáveis

Uma vez definidos os conceitos de seno, co-seno e tangente de ângulos agudos internos a um triângulo retângulo, passaremos a determinar seus valores para ângulos de grande utilização em diversas atividades profissionais e encontrados facilmente em situações cotidianas.

Por exemplo, na Mecânica, demonstra-se que o ângulo de lançamento, tomado com relação à horizontal, para o qual se obtém o máximo alcance com uma mesma velocidade de tiro, é de 45°; uma colméia é constituída, interiormente, de hexágonos regulares, que por sua vez, são divisíveis, cada um, em seis triângulos eqüiláteros, cujos ângulos internos medem 60°; facilmente encontram-se coberturas de casas, de regiões tropicais, onde não há neve, com ângulo de inclinação definido nos 30°, etc.

Vamos selecionar, portanto, figuras planas em que possamos delimitar ângulos com as medidas citadas (30°, 45° e 60°). Para isso, passaremos a trabalhar com o quadrado e o triângulo eqüilátero.

Observemos, na figura 4 e na figura 5, que a diagonal de um quadrado divide ângulos internos opostos, que são retos, em duas partes de 45°, e que o segmento que define a bissetriz (e altura) de um ângulo interno do triângulo eqüilátero permite-nos reconhecer, em qualquer das metades em que este é dividido, ângulos de medidas 30° e 60°.

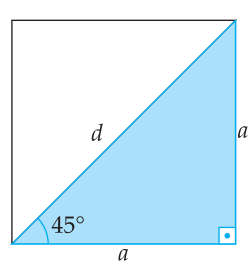


Figura 4

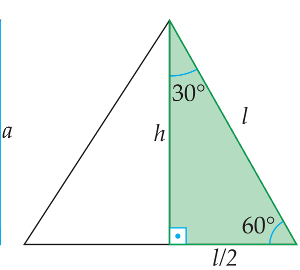


Figura 5

Primeiramente, vamos calcular os comprimentos da diagonal do quadrado (identificada na figura 4 por d) e a altura h, do triângulo eqüilátero (figura 5).

Uma vez que as regiões sombreadas nas figuras são triângulos retângulos, podemos aplicar o teorema de Pitágoras para cada um deles.

Para o meio-quadrado, temos que:

$$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2 \cdot a^2$$

$$\therefore \boxed{d = a\sqrt{2}}$$

Quanto ao triângulo eqüilátero, podemos escrever o seguinte:

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow \therefore \boxed{h = \frac{l\sqrt{3}}{2}}$$

Sabemos, agora, que o triângulo hachurado no interior do quadrado tem catetos de medida a e hipotenusa $a\sqrt{2}$. Para o outro triângulo sombreado, teremos catetos de medidas $\frac{l}{2}$ e $\frac{l\sqrt{3}}{2}$, enquanto sua hipotenusa tem comprimento l.

Passemos, agora, ao cálculo de seno, co-seno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°.

5.1. Seno, Co-seno e Tangente de 30° e 60°

Tomando por base o triângulo eqüilátero da figura 5, e conhecendo as medidas de seus lados, temos:

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{h}{l} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{l}{2}}{h} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{l\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{l} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{h}{\frac{l}{2}} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

5.2. Seno, Co-seno e Tangente de 45°

A partir do quadrado representado na figura 4, de lados a e diagonal $a\sqrt{2}$, podemos calcular:

$$\text{sen } 45° = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

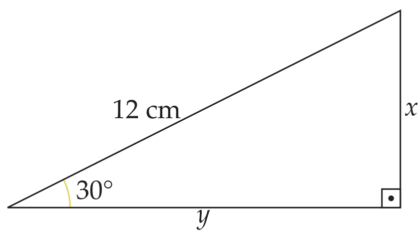
$$\text{tg } 45° = \frac{a}{a} = 1$$

Os resultados que obtivemos nos permitem definir, a seguir, uma tabela de valores de seno, co-seno e tangente dos ângulos notáveis, que nos será extremamente útil.

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exercícios Resolvidos

01. A partir dos dados apresentados na figura, determinar as medidas indicadas por x e y.



Resolução

Uma vez conhecidos um ângulo interno do triângulo retângulo apresentado (30°) e sua hipotenusa, para calcularmos x (cateto oposto a 30°), podemos fazer:

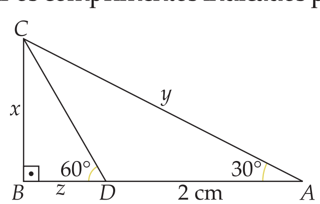
$$sen\ 30° = \frac{x}{12} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{12} \Rightarrow \boxed{x = 6\ cm}$$

Notemos que, agora, temos duas relações trigonométricas possíveis de serem usadas (co-seno e tangente), pois já conhecemos o cateto oposto e a hipotenusa do triângulo, e as duas razões que citamos utilizariam o cateto adjacente a 30°, nossa incógnita y. Logo,

$$cos\ 30° = \frac{y}{12} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{12} \Rightarrow$$

$$\boxed{y = 6\sqrt{3}\ cm}$$

02. Os triângulos ABC e BCD da figura são retângulos em B, sendo conhecidos os ângulos $B\hat{A}C = 30°$ e $B\hat{D}C = 60°$, além de $AD = 2$ cm. Pede-se calcular os comprimentos indicados por x, y e z.



Resolução

É fácil notarmos que o segmento $\overline{BC}$ é lado de ambos os triângulos retângulos, e que $\overline{BD}$ sobrepõe-se parcialmente a $\overline{AB}$. Citamos apenas catetos opostos e adjacentes aos ângulos conhecidos. É aconselhável, portanto, a utilização da relação definida como tangente.

Com isso, temos para o triângulo ABC,

$$tg\ 30° = \frac{x}{z+2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (z+2) \qquad (I)$$

Para o triângulo BCD, podemos dizer que:

$$tg\ 60° = \frac{x}{z} \Rightarrow x = z\sqrt{3} \qquad (II)$$

Igualando-se (I) e (II), temos que:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (z+2) = z\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z + 2 = 3z \Rightarrow 2 = 2z \Rightarrow$$

$$\boxed{z = 1\ cm}$$

Substituindo-se esse resultado em (II), por ser a equação mais simples, calculamos:

$$\boxed{x = \sqrt{3}\ cm}$$

A incógnita y é a medida da hipotenusa $\overline{AC}$ do triângulo ABC. Uma vez que conhecemos agora seus dois catetos, podemos nos dar ao luxo de escolher qualquer função trigonométrica para utilizar, desde que opere com a referida hipotenusa, ou mesmo utilizar o teorema de Pitágoras. Podemos fazer, então,

$$sen\ 30° = \frac{x}{y} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{y = 2\sqrt{3}\ cm}$$

Portanto, os comprimentos x, y e z pedidos são iguais, respectivamente, a $\sqrt{3}$ cm, $2\sqrt{3}$ cm e 1 cm.

03. (FCMSC-SP) Na figura, o perímetro do triângulo ACD é:

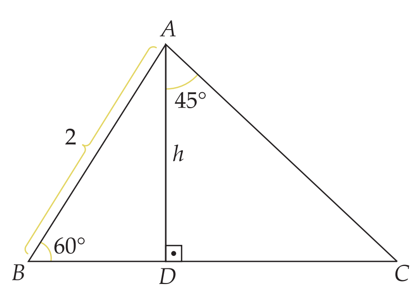
a) $3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{6}$

b) $3 + 4\sqrt{3}$

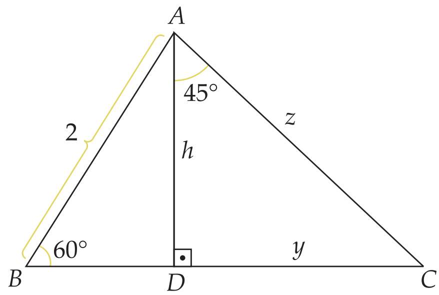
c) $3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}$

d) $5\sqrt{3}$

e) 6



Resolução



No ΔABD, temos:

$$sen\,60° = \frac{h}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{2} \Rightarrow h = \sqrt{3}$$

No ΔADC, temos:

$$tg\,45° = \frac{y}{h} \Rightarrow 1 = \frac{y}{h} \Rightarrow y = h = \sqrt{3}$$

$$sen\,45° = \frac{y}{z} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{z} \Rightarrow z = \sqrt{6}$$

$\therefore$ *o perímetro do ΔACD é* $h + y + z = 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$

Resposta: *E*

6. Identidades Trigonométricas

É comum a necessidade de obtermos uma razão trigonométrica, para um ângulo, a partir de outra razão cujo valor seja conhecido, ou mesmo simplificar expressões extensas envolvendo várias relações trigonométricas para um mesmo ângulo.

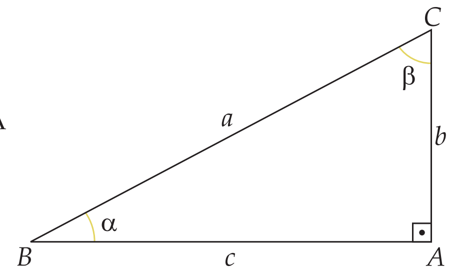
Nesses casos, as identidades trigonométricas que iremos deduzir neste tópico são ferramentas de grande aplicabilidade.

Antes de demonstrá-las, é necessário que definamos o que vem a ser uma identidade.

Identidade em uma ou mais variáveis é toda igualdade verdadeira para quaisquer valores a elas atribuídos, desde que verifiquem as condições de existência da expressão.

Por exemplo, a igualdade $x + \frac{2}{x} = \frac{2x^2 + 4}{2x}$ é uma identidade em x, pois é verdadeira para todo x real, desde que $x \neq 0$ (divisão por zero é indeterminada ou inexistente).

Fig. A



Vamos verificar agora como se relacionam as razões trigonométricas que já estudamos. Para isso, faremos uso do triângulo *ABC* apresentado na figura A, retângulo em *A*.

Aplicando as medidas de seus lados no teorema de Pitágoras, obtemos a seguinte igualdade:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Dividindo os seus membros por a^2, não alteraremos a igualdade. Assim, teremos:

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$$

Observemos que as frações entre parênteses podem definir, com relação ao nosso triângulo, que

$$sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \quad e \quad cos^2\,\beta + sen^2\,\beta = 1$$

Podemos afirmar, portanto, que a soma dos quadrados de seno e co-seno de um ângulo x é igual à unidade, ou seja:

$$\boxed{sen^2\,x + cos^2\,x = 1}$$

Expliquemos o significado da partícula **co,** que inicia o nome das relações co-seno, co-tangente e co-secante. Ela foi introduzida por Edmund Gunter, em 1620, querendo indicar a razão trigonométrica do complemento. Por exemplo, co-seno de 22° tem valor idêntico ao seno de 68° (complementar de 22°).

Assim, as relações **co-seno**, **co-tangente** e **co-secante** de um ângulo indicam, respectivamente, **seno, tangente** e **secante do complemento** desse ângulo.

Assim, indicando seno, tangente e secante simplesmente pelo nome de razão, podemos dizer que

$$\boxed{\text{co-razão } x = \text{razão } (90° - x)}$$

Facilmente podemos concluir, com base no triângulo apresentado na figura A, que:

$\text{sen } \alpha = \cos \beta$ $\quad$ $\text{sen } \beta = \cos \alpha$

$\text{tg } \alpha = \text{cotg } \beta$ $\quad$ $\text{tg } \beta = \text{cotg } \alpha$

$\sec \alpha = \text{cossec } \beta$ $\quad$ $\sec \beta = \text{cossec } \alpha$

Façamos um outro desenvolvimento. Tomemos um dos ângulos agudos do triângulo *ABC*, da figura A. Por exemplo, α. Dividindo-se sen α por cos α, obtemos:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = tg\ \alpha$$

De forma análoga, o leitor obterá o mesmo resultado se tomar o ângulo β. Dizemos, portanto, que, para um ângulo x, tal que $\cos x \neq 0$,

$$\boxed{\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}}$$

Podemos observar, também, que a razão $\frac{b}{c}$, que representa tg α, se invertida (passando a $\frac{c}{b}$), vem a constituir cotg α. Em virtude disso, e aproveitando a identidade enunciada anteriormente, podemos dizer que, para todo ângulo x de seno não-nulo:

$$\boxed{\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x} = \frac{\cos x}{\text{sen } x}}$$

Tais inversões ocorrem também em se tratando das relações seno, co-seno, secante e co-secante. Vejamos que:

$$\begin{cases} \text{sen } \alpha = \frac{b}{a} \\ \text{cosec } \alpha = \frac{a}{b} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \cos \alpha = \frac{c}{a} \\ \sec \alpha = \frac{a}{c} \end{cases}$$

Teríamos encontrado inversões semelhantes se utilizássemos o ângulo β.

Dizemos, assim, que, para um dado ângulo x,

$$\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x}}$$

$$\boxed{\text{cosec } x = \frac{1}{\text{sen } x}}$$

desde que seja respeitada a condição de os denominadores dos segundos membros dessas identidades não serem nulos.

Passaremos à exemplificação de situações em que poderão ser empregadas as identidades aqui demonstradas. Não sem antes apresentar, de forma resumida, o resultado das demonstrações com que nos detivemos aqui, o que faremos no quadro exibido a seguir.

1) $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
2) co-razão (x) = razão $(90° - x)$
3) $\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$ $\quad (\cos x \neq 0)$
4) $\text{cotg } x = \dfrac{1}{\text{tg } x} = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$ $\quad (\text{sen } x \neq 0)$
5) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\quad (\cos x \neq 0)$
6) $\text{cosec } x = \dfrac{1}{\text{sen } x}$ $\quad (\text{sen } x \neq 0)$

Outras Identidades Trigonométricas

a) Demonstre que $\sec^2 x = \text{tg}^2 x + 1$

Resolução

Desenvolveremos a demonstração a partir do primeiro membro da identidade apresentada, procurando chegar à expressão dada no segundo membro.

Lembremos que:

1. $\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$
2. $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
3. $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, respeitando-se, para 1 e 3, a condição de que $\cos x \neq 0$. Portanto:

$$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\sec^2 x = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sec^2 x = \text{tg}^2 x + 1 \quad \text{(cqd)}}$$

b) Mostre que $\text{cossec}^2 x = \text{cotg}^2 x + 1$.

Resolução

Usando o mesmo mecanismo desenvolvido no exemplo anterior e com o apoio das identidades trigonométricas deduzidas nessa seção, podemos dizer que, para $\text{sen}\, x \neq 0$,

$$\text{cossec}^2 x = \frac{1}{\text{sen}^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}^2 x} \Rightarrow$$

$$\text{cossec}^2 x = \frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{cossec}^2 x = \text{cotg}^2 x + 1 \quad \text{(cqd)}}$$

Observação – As identidades demonstradas nos exemplos a e b são denominadas **identidades trigonométricas auxiliares**. Ao quadro-resumo anterior, podemos anexar, então, as identidades.

7) $\sec^2 x = \text{tg}^2 x + 1 \quad (\cos x \neq 0)$

8) $\text{cossec}^2 x = \text{cotg}^2 x + 1 \quad (\text{sen}\, x \neq 0)$

Exercícios Resolvidos

01. De uma tabela de razões trigonométricas foi fornecido $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ como o valor do seno de um ângulo agudo. Pede-se determinar cosseno, tangente, co-tangente, secante e cossecante desse ângulo.

Resolução

O fato de o ângulo referido no enunciado ser agudo (com medida entre 0° e 90°), significa que os valores de todas as razões trigonométricas que lhe digam respeito são positivos. Esse assunto será estudado, quando envolvermos as relações trigonométricas com arcos determinados no ciclo trigonométrico.

Denominando de x o nosso ângulo agudo e aplicando as identidades fundamentais, podemos dizer que:

1) $sen^2 x + cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 + cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow cos^2 x = 1 - \frac{5}{16} = \frac{16-5}{16} \Rightarrow cos\ x = \pm\frac{\sqrt{11}}{4}$$

Como cos x > 0, descartamos a solução negativa. Teremos, assim:

$$\boxed{cos\ x = \frac{\sqrt{11}}{4}}$$

Uma vez conhecidos seno e cosseno do ângulo, poderemos calcular as demais razões, pois todas podem ser expressas em função daquelas. Assim:

2) $tg\, x = \dfrac{sen\, x}{cos\, x} = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{4}}{\frac{\sqrt{11}}{4}} \Rightarrow$

$$tg\, x = \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{11}} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} \Rightarrow \boxed{tg\, x = \frac{\sqrt{55}}{11}}$$

3) $cotg\ x = \dfrac{1}{tg\, x} = \dfrac{11}{\sqrt{55}} \Rightarrow cotg\ x = \dfrac{11}{\sqrt{55}} \cdot \dfrac{\sqrt{55}}{\sqrt{55}} \Rightarrow$

$$\boxed{cotg\ x = \frac{\sqrt{55}}{5}}$$

02. Calcular sen x, sabendo-se que x é agudo e que:

$$\begin{cases} \text{tg}\,x + \text{cotg}\,x = \dfrac{9\sqrt{5}}{10} \\ \text{cotg}\,x - \text{tg}\,x = \dfrac{\sqrt{5}}{10} \end{cases}$$

Resolução

Somando-se as equações do sistema, membro a membro, obtemos:

$$2\,\text{cotg}\,x = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{\cos x}{\text{sen}\,x} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \text{sen}\,x$$

Sabemos que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$*. Logo, substituindo-se* $\cos x$ *por* $\dfrac{\sqrt{5}}{2} \cdot \text{sen}\,x$*, teremos:*

$$\text{sen}^2 x + \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \text{sen}\,x\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\text{sen}^2 x + \frac{5\,\text{sen}^2 x}{4} = 1$$

$$4\,\text{sen}^2 x + 5\,\text{sen}^2 x = 4 \Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{4}{9} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{sen}\,x = \pm\frac{2}{3}}$$

Como x é agudo, concluímos que $\text{sen}\,x = \dfrac{2}{3}$.

03. Simplificar as expressões:

a) $E_1 = \text{tg}\,x + \text{cotg}\,x - \sec x \cdot \text{cossec}\,x$

b) $E_2 = \dfrac{\text{cotg}\,x \cdot \sec x}{\text{cossec}^2 x}$

Resolução

Uma vez que podemos exprimir todas as razões trigonométricas em função de seno e/ou cosseno, devemos substituir cada termo das expressões dadas por relações convenientes.

a) $E_1 = \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x} - \dfrac{1}{\cos x} \cdot \dfrac{1}{\text{sen}\,x} \Rightarrow$

$$E_1 = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x - 1}{\text{sen}\,x \cdot \cos x} = \frac{1-1}{\text{sen}\,x \cdot \cos x}$$

$$E_1 = \frac{0}{\text{sen}\,x \cdot \cos x} \Rightarrow \boxed{E_1 = 0}$$

b) $E_2 = \dfrac{\dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}}{\dfrac{1}{\text{sen}^2 x}} = \dfrac{1}{\text{sen}\,x} \cdot \dfrac{\text{sen}^2 x}{1} \Rightarrow$

$$\boxed{E_2 = \text{sen}\,x}$$

04. (UFSCar-SP) O valor da expressão $\dfrac{2 - \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \text{tg}^2 x$ é:

a) –1
b) –2
c) 2
d) 1
e) 0

Resolução

$$E = \frac{2 - \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \text{tg}^2 x = \frac{2 - \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$E = \frac{2 - 2\,\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{2 \cdot (1 - \text{sen}^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} = 2$$

Resposta: *C*

05. (FGV-RJ) A função trigonométrica equivalente a $\dfrac{\sec x + \text{sen}\,x}{\text{cosec}\,x + \cos x}$ é:

a) sen x
b) cotg x
c) sec x
d) cosec x
e) tg x

Resolução

$$\frac{\sec x + \text{sen}\,x}{\text{cossec}\,x + \cos x} = \frac{\dfrac{1}{\cos x} + \text{sen}\,x}{\dfrac{1}{\text{sen}\,x} + \cos x} = \frac{\dfrac{1 + \text{sen}\,x \cdot \cos x}{\cos x}}{\dfrac{1 + \text{sen}\,x \cdot \cos x}{\text{sen}\,x}} =$$

$$= \frac{\cancel{1 + \text{sen}\,x \cdot \cos x}}{\cos x} \cdot \frac{\text{sen}\,x}{\cancel{1 + \text{sen}\,x \cdot \cos x}} = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \text{tg}\,x$$

Resposta: *E*

Capítulo 02. Arcos e Ângulos

1. Introdução

Trigonometria é uma palavra derivada do grego, em que *trigonos*, equivalente a **triângulo,** e *metrein*, a **mensuração**, revelam suas origens, ligadas ao estudo das relações entre os lados e ângulos de triângulos.

Mas antes de nos iniciarmos em seus fundamentos, é necessário que revisemos alguns conceitos importantes.

Vamos considerar, para isso, a circunferência da fig. 1a. Definimos como **arco de circunferência** cada uma das partes em que ela é dividida por dois de seus pontos.

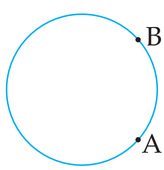


fig. 1a

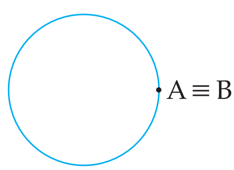
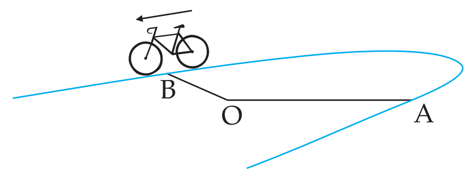


fig. 1b

Num caso particular, apresentado na fig. 1b, se esses pontos forem coincidentes, determinam-se um arco **nulo** e um arco de **uma volta**.

Daremos ênfase, neste capítulo, aos sistemas de mensuração de arcos e ângulos, alguns deles definindo suas unidades de medição como determinada fração de uma volta. Essas unidades serão denominadas de angulares. Porém, a medida de um arco pode ser feita também em unidades lineares. Imaginemos, por exemplo, um ciclista percorrendo um trecho circular de um pista no decorrer de certa competição. Suponhamos que ele tenha cumprido, na curva, um total de 50 m. Dizemos, portanto, que o **comprimento do arco de circunferência** descrito pelo ciclista é de 50 m. Dessa forma, a medida de $\overset{\frown}{AB}$ foi expressa em unidades lineares.



Entretanto, para medirmos o mesmo arco em unidades angulares, aplicaríamos um conceito simples e importante da Geometria, que define um **ângulo central** como aquele que **tem seu vértice sobre o centro de uma circunferência**, como indicado na fig. 2 pelo ângulo α.

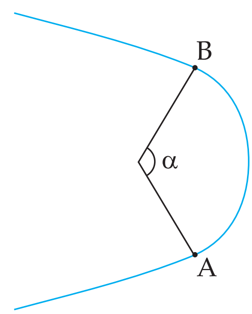


fig. 2

Notemos que seus lados determinam sobre a circunferência os pontos A e B e, sobre ela, tomemos o menor arco $\overset{\frown}{AB}$. Dizemos que **a medida do arco é igual à medida do ângulo central que o determina** ou que

$$\boxed{m(\overset{\frown}{AB}) = \alpha}$$

Como conseqüência disso, poderemos utilizar as mesmas unidades angulares para medirmos tanto arcos de cincunferência quanto ângulos formados por um par de semi-retas.

2. Graus, Grados e Radianos

Os sistemas de unidades angulares definidos para a medição de arcos e ângulos mais utilizados atualmente são o **circular** e o **sexagesimal**, que expressam suas medidas em **radianos** e em **graus**, respectivamente, existindo também o sistema **centesimal**, no qual é definida a unidade **grado**.

Passemos agora às suas definições.

2.1. Graus

Por definição, **1 grau é o arco equivalente a $\frac{1}{360}$ da circunferência**, ou seja, em um arco de volta completa, ou de uma volta, cabem 360°.

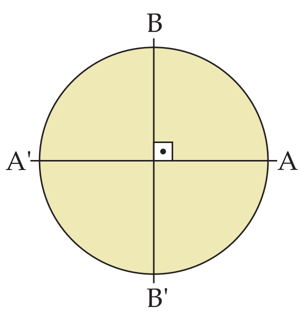


fig. 3

Observando a fig. 3, notamos que as retas $\overleftrightarrow{AA'}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$, perpendiculares entre si, dividem a circunferência em quatro arcos de mesma medida, referentes a quatro ângulos centrais retos.

Com isso, concluímos que:

1 ângulo reto = 90°
2 ângulos retos = 180°
3 ângulos retos = 270°
4 ângulos retos = 360°

O grau comporta ainda os submúltiplos **minuto** (′) e **segundo** (″), de forma que

$$1° = 60' \quad \text{e} \quad 1' = 60''$$

Devemos ressaltar que, apesar de terem nomes idênticos, os minutos e segundos que usamos na quantificação de tempo não têm nenhuma correlação com os minutos e segundos que acabamos de definir como submúltiplos do grau, a não ser por constituírem também um sistema sexagesimal de unidades. Veremos mais adiante, por exemplo, que o arco descrito pela extremidade do ponteiro dos minutos, no transcurso de um minuto, não mede 1′, mas sim 6°.

Exemplo

Se α e β são arcos que medem, respectivamente, 83° 30′ 39″ e 12° 43′ 45″, determinar as medidas de $\alpha + \beta$ e $\alpha - \beta$:

Resolução

Para calcularmos a soma dos arcos dados, devemos operar em separado as quantidades em graus, minutos e segundos, como exibido abaixo:

$$\begin{array}{rrrr} & 83° & 30' & 39'' \\ + & 12° & 43' & 45'' \\ \hline & 95° & 73' & 84'' \end{array}$$

Como as quantidades em minutos (73′) e segundos (84″) excedem 60 unidades, podemos fazer

$73' = 60' + 13' = 1°\,13'$ e

$84 = 60'' + 24'' = 1'\,24''$, ou seja,

$73'\,84'' = 1°\,(13 + 1)'\,24'' = 1°\,14'\,24''$

Logo, a soma dos arcos será dada por

$$\boxed{\alpha + \beta = 96°\,14'\,24''}$$

Montemos agora a operação de diferença entre os arcos fornecidos:

$$\begin{array}{rrrr} & 83° & 30' & 39'' \\ - & 12° & 43' & 45'' \\ \hline \end{array}$$

Verificamos aqui que existem minuendos menores que os subtraendos (30′ < 43′ e 39″ < 45″), o que nos levaria a resultados negativos ao operarmos minutos e segundos.

Um artifício simples para contornarmos essa dificuldade é "emprestarmos" 1° e 1′ do minuendo e transformá-los em 60 minutos e 60 segundos, respectivamente, adicionando-os, em seguida, às quantidades já existentes dos mesmos submúltiplos.

Teremos, dessa forma, a seguinte operação:

$$\alpha = 83°\ 30'\ 39'' \Rightarrow$$

$$\alpha = (83 - \mathbf{1})°(30 + \mathbf{60} - \mathbf{1})'(39 + \mathbf{60})''$$

Assim, $\alpha = 82°\ 89'\ 99''$

A diferença entre α e β pode ser calculada operando-se separadamente as quantidades em graus, minutos e segundos, como fizemos na adição e apresentamos a seguir:

$$\begin{array}{rrrr} & 82° & 89' & 99'' \\ - & 12° & 43' & 45'' \\ \hline & 70° & 46' & 54'' \end{array}$$

Obtemos, portanto,

$$\boxed{\alpha - \beta = \mathbf{70°\ 46'\ 54''}}$$

2.2. Grados

Definimos como **1 grado o arco equivalente a $\frac{1}{400}$ da circunferência**, isto é, em uma circunferência ou arco de uma volta cabem 400 gr.

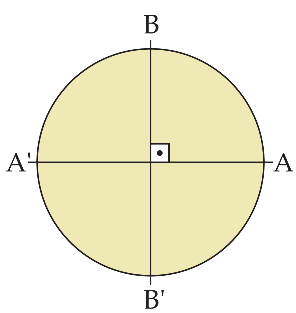


fig. 4

Tomando-se por base a fig. 4, é fácil concluir, portanto, que:

1 ângulo reto = 100 gr
2 ângulos retos = 200 gr
3 ângulos retos = 300 gr
4 ângulos retos = 400 gr

A unidade grado, como sistema de mensuração centesimal de arcos e ângulos, não foi empregada com a mesma intensidade com que se trabalha hoje, em vários países do mundo, com unidades do sistema métrico decimal, voltadas à medição de comprimentos, áreas e volumes, baseadas na utilização de potências de 10 para definição de múltiplos e submúltiplos.

Em virtude de seu desuso, deixamos de dedicar-lhe maior atenção.

2.3. Radianos

Um **radiano** é definido como o **arco cujo comprimento é igual ao do raio da circunferência onde tal arco foi determinado**.

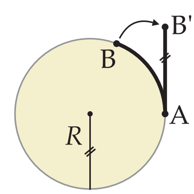


fig. 5

A partir da fig. 5, imagine que o arco AB foi retirado. O segmento $\overline{AB'}$ obtido, tendo comprimento igual ao raio da circunferência, indica que $m(\overset{\frown}{AB}) = 1$ rad. Podemos dizer, portanto, que a medida de um arco, em radianos, equivale ao **número de vezes que o comprimento do raio cabe nesse arco**, ou seja, sendo ***l*** e **R** os comprimentos do arco e do raio da circunferência, respectivamente, temos:

$$\boxed{\alpha = \frac{l}{R}}$$

Lembramos que o comprimento de uma circunferência de raio R é dado por $2\pi R$. Utilizando a relação apresentada acima, para calcular em radianos a medida do arco de uma volta, dividimos o comprimento da circunferência pelo seu raio, isto é,

$$\boxed{\alpha = \frac{2\pi R}{R} \Rightarrow \alpha = 2\pi \text{ rad}}$$

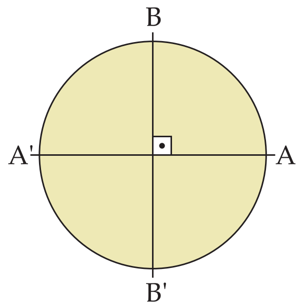


fig. 6

Com esse resultado e com o auxílio da fig.6, podemos dizer que:

1 ângulo reto = $\frac{\pi}{2}$ rad

2 ângulos retos = π rad

3 ângulos retos = $\frac{3\pi}{2}$ rad

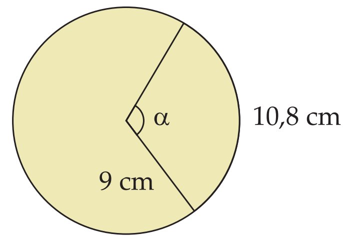
4 ângulos retos = $2\ \pi$rad

Não podemos esquecer que π é um número real, de valor aproximadamente igual a 3,14.

Observação – Um arco ou ângulo medido no sistema circular (em radianos) resulta em um número **adimensional**, uma vez que ele é fruto da divisão feita entre comprimentos de arco e de raio, tendo-se o cancelamento de suas unidades. A utilização de **rad** acompanhando os valores das medidas de ângulos e arcos é uma convenção, indicando o sistema de mensuração utilizado.

Exemplos

1. Na circunferência da figura, de raio 9 cm, determinou-se, com os lados do ângulo central α, um arco de comprimento 10,8 cm. Calcular, em radianos, a medida de α:

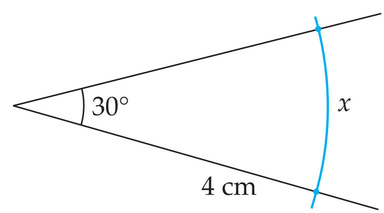


Resolução

De acordo com a definição de radiano, temos

$$\alpha = \frac{l}{R} = \frac{10{,}8}{9} \Rightarrow \alpha = \boxed{\mathbf{1{,}2\ rad}}$$

2. Na figura abaixo, conhecidos o raio de 4 cm do arco de circunferência e o ângulo central de 30°, calcular o comprimento, em cm, do arco por ele determinado sobre a curva:



Resolução

Podemos responder ao que foi pedido com o uso da simples regra de três.

Sabemos que um arco de volta completa mede 360° e tem comprimento 2πR, onde R é o raio da circunferência.

Logo, sendo x o comprimento procurado, teremos:

$$\frac{x}{30^\circ} = \frac{2\pi R}{360^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 4}{12} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{2\pi}{3}\ cm \cong 2{,}1\ cm}$$

3. Conversões

Pelo que vimos quanto a unidade de medidas de arcos e ângulos, obtemos a tabela seguinte:

Arcos	Graus	Grados	Radianos
1 reto	90°	100 gr	$\frac{\pi}{2}$ rad
2 retos	180°	200 gr	π rad
3 retos	270°	300 gr	$\frac{3\pi}{2}$ *rad*
4 retos	360°	400 gr	2π rad

Para convertermos as medidas de arcos de uma unidade para outra, é suficiente a aplicação de uma regra de três simples, tomando-se para isso qualquer das equivalências exibidas na tabela anterior.

A fim de operar-se com os menores valores, não fracionários, sugerimos a utilização da relação seguinte:

$$\boxed{180° = 200 \text{ gr} = \pi \text{ rad}}$$

Exemplos

1. Transformar 45° em radianos e grados:

Resolução

$$\frac{45°}{180°} = \frac{\alpha}{\pi \text{ rad}} \Rightarrow \alpha = \frac{45° \cdot \pi \text{ rad}}{180°} \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad}}$$

$$\frac{45°}{180°} = \frac{\alpha}{200 \text{ gr}} \Rightarrow \alpha = \frac{45° \cdot 200 \text{ gr}}{180°} \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha = 50 \text{ gr}}$$

2. Converter $\frac{2\pi}{3}$ rad para graus:

Resolução

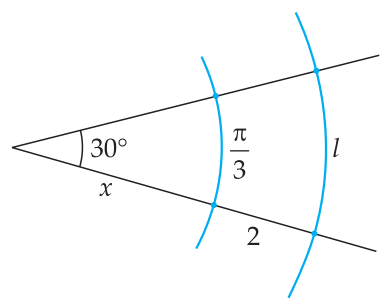
$$\frac{\frac{2\pi}{3}\text{rad}}{\pi \text{ rad}} = \frac{\alpha}{180°} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot 180°}{3} \Rightarrow \boxed{\alpha = 120°}$$

Uma outra forma de realizarmos essa conversão é substituirmos π rad por 180°, como mostramos abaixo:

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}\text{rad} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot 180°}{3} \Rightarrow \boxed{\alpha = 120°}$$

Exercícios Resolvidos

01. A ilustração abaixo representa arcos de circunferências concêntricas, determinadas pelo ângulo central de 30°. Determine os comprimentos, em cm, de x e l, indicados na figura.



Resolução

Converter 30° para radianos

$$\frac{30°}{180°} = \frac{\alpha}{\pi \text{ rad}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Aplicar a relação $\alpha = \frac{l}{R}$ *para o arco de menor raio:*

$$\alpha = \frac{l}{R} \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{\pi/3}{x} \Rightarrow x = 2 \text{ cm}$$

Aplicar a mesma relação ao arco de maior raio e usar o resultado anterior:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{l}{x+1} \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{l}{3} \Rightarrow l = \frac{3\pi}{6}$$

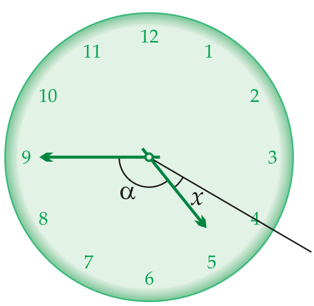
$$l = \frac{\pi}{2}\,cm$$

$$x = 2\ cm\ e\ \ l = \frac{\pi}{2}\,cm$$

02. Determinar o ângulo formado entre os ponteiros de horas e minutos de um relógio que marca exatamente 16h 45min.

Resolução

Para nos auxiliar na resolução deste problema, esquematizemos um relógio, como abaixo, com suas doze divisões.



Cada uma das divisões corresponde a um arco de medida $\frac{360°}{12}$*, ou 30°.*

Seja α o ângulo pedido. Da nossa ilustração, podemos dizer que:

$$\alpha + x = 5 \cdot 30° \Rightarrow \alpha + x = 150°$$

Para determinarmos α, resta-nos calcular x, isto é, o arco "varrido" pelo ponteiro das horas nos 45 minutos passados das 16.

Sabendo-se que, para cada hora (ou 60 minutos), o ponteiro menor percorre uma divisão do mostrador (ou 30°), montamos a regra de três seguinte:

$$\frac{x}{30°} = \frac{45min}{60min} \Rightarrow x = \frac{30° \cdot 45}{60} = \left(\frac{45}{2}\right)^{\circ} = 22{,}5°$$

Logo,

$$\alpha = 150° - x = 150° - 22{,}5° \Rightarrow \boxed{\alpha = 127{,}5°}$$

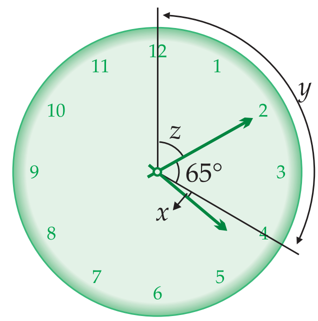
ou, se quisermos, $\boxed{\alpha = 127°\,30'}$

03. Entre as 16 h e 17 h, os ponteiros de um relógio formam um ângulo de 65°. Pede(m)-se o(s) horários(s) exato(s) indicado(s) pelo relógio.

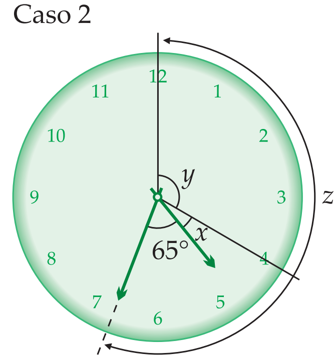
Resolução

Comecemos por prever as possíveis situações dos ponteiros. Eles poderão formar 65° estando o ponteiro maior (dos minutos) antes ou depois do ponteiro das horas, como indicam as figuras a seguir:

Caso 1



Caso 2



Nas ilustrações acima, considere

x ⟶ arco "varrido" pelo ponteiro das horas desde as 16 h até o instante em questão.

y ⟶ arco compreendido entre as marcações 12 e 4 do relógio.

z ⟶ arco "varrido" pelo ponteiro dos minutos desde a marca 12 do relógio até o instante considerado.

Para ambos os casos, y é facilmente calculado fazendo-se

$$y = 4 \cdot 30° = 120°$$

A questão se prende à determinação do número de minutos passados das 16 h, em que o ângulo entre os *ponteiros seja de 65°. Chamemos de **m** esses minutos decorridos após as 16 h. Teremos, assim, condições de escrever os arcos x e z em função de m.*

Com efeito, se em cada 5 minutos o ponteiro maior percorre um arco de 30°, podemos montar a regra de três seguinte:

$$\frac{z}{30°} = \frac{m}{5\ min} \Rightarrow z = 6\ m$$

Quanto ao ponteiro das horas, sabemos que ele percorre 30° a cada 60 minutos.

Assim, $\dfrac{x}{30°} = \dfrac{m}{60\ min} \Rightarrow x = \dfrac{m}{2}$

Passemos agora à análise, caso a caso, dos arcos apresentados nas figuras anteriores.

Caso 1

$$x + y - z = 65° \Rightarrow \frac{m}{2} + 120° - 6m = 65° \Rightarrow$$

$$\frac{11m}{2} = 55° \Rightarrow \boxed{m = 10\ min}$$

Caso 2

$$z - (x + y) = 65° \Rightarrow 6m - \frac{m}{2} - 120° = 65° \Rightarrow$$

$$\frac{11m}{2} = 185° \Rightarrow \boxed{m = \frac{370}{11}\ min}$$

Entre as 16 e 17 h, os ponteiros terão formado entre si um ângulo de 65° no horário exato de 16 h 10 min e, $16\ h\,\dfrac{370}{11}\ min$.

Capítulo 03. O Ciclo Trigonométrico

1. Introdução

As limitações que o triângulo retângulo nos impõe na utilização das razões trigonométricas que estudamos até aqui são notórias: seus ângulos internos, passíveis de aplicação a essas relações, são agudos.

Veremos que as razões trigonométricas, aplicadas agora a arcos de uma circunferência, manterão as mesmas propriedades que demonstramos ser válidas quando utilizadas com ângulos agudos.

Inicialmente, deveremos definir uma circunferência, em especial, sobre a qual interpretaremos as nossas já conhecidas razões trigonométricas.

Tal circunferência recebe o nome de **circunferência trigonométrica** ou **ciclo trigonométrico**.

Imaginemos, primeiramente, um sistema de coordenadas cartesianas, como indicado na figura 1.

Nos eixos ***r*** e ***s***, perpendiculares entre si, cada ponto corresponde a um número real e vice-versa: cada número real tem um ponto associado em cada uma das retas. À interseção dos eixos, faremos corresponder o número zero, tanto para o eixo ***r***, das abscissas, como para o eixo **s**, das ordenadas, constituindo o que chamamos de origem dos eixos coordenados.

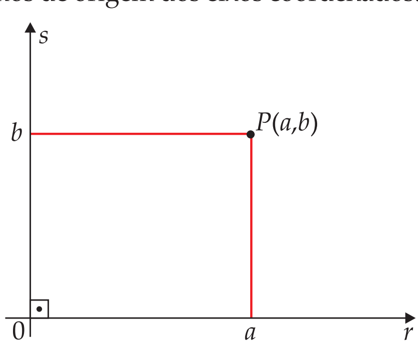


Figura 1

Assim, qualquer ponto do plano assim determinado pode ser representado por um par de números reais, a que chamamos de par ordenado. O ponto ***P***, na figura, terá então as coordenadas (***a***, ***b***), sendo ***a*** a abscissa de ***P*** e ***b*** a sua ordenada.

Na figura 2, fazemos surgir o **ciclo trigonométrico** com centro na origem dos eixos e raio unitário.

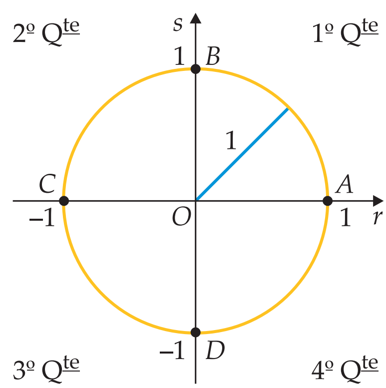


Figura 2

Como conseqüência, os pontos de interseção da circunferência com o par de eixos, indicados na figura por *A*, *B*, *C* e *D*, terão coordenadas dadas, respectivamente, por (1, 0), (0, 1), (–1, 0) e (0, –1).

Esses pontos dividem o ciclo trigonométrico em quatro arcos congruentes, aos quais damos o nome de quadrantes, numerados a partir de A no sentido anti-horário.

Por convenção, *A*, *B*, *C* e D são apenas limitadores dos quadrantes, não pertencendo a nenhum deles. Por exemplo, *D* é ponto que separa o 3º do 4º quadrante, mas não lhes pertence.

2. Números Reais no Ciclo Trigonométrico

Há pouco, referimo-nos à associação entre pontos de uma reta e números reais. Definida a origem de um eixo, um número real x corresponderá a um de seus pontos que diste $|x|$ da origem.

Assumindo a reta real da figura 3, se $x > 0$, o ponto estará à direita de 0. Caso contrário, tal ponto estará localizado à esquerda de 0.

Na ilustração, representamos os pontos associados aos números $-\sqrt{3}$, –1, 0, 1, 2, 3 e π, a título de exemplo.

Figura 3

Procederemos semelhantemente no ciclo trigonométrico. A cada número real x faremos corresponder um ponto sobre a circunferência, de tal forma que:

- o ponto A esteja associado ao número $x = 0$;
- um número real x seja associado a um ponto P , tal que o comprimento do arco $\overset{\frown}{AP}$ seja igual a $|x|$;
- se $x > 0$, o arco $\overset{\frown}{AP}$ será determinado, sobre o ciclo, no sentido anti-horário; se $x < 0$, o arco $\overset{\frown}{AP}$ será definido no sentido horário, como indicamos na figura 4.

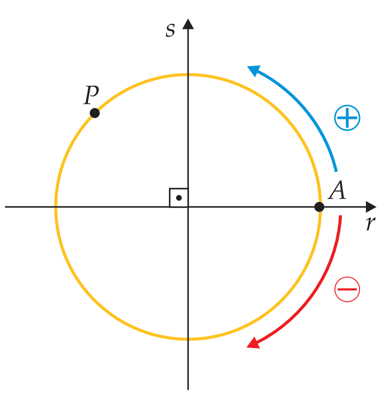


Figura 4

O ponto P, determinado de acordo com o que apresentamos acima, associado a um número real x, é denominado de **imagem de** $\boldsymbol{x}$ no ciclo trigonométrico.

Lembremos que o comprimento da circunferência trigonométrica pode ser calculado por $C = 2\pi R$, sendo R o seu raio.

Como ele tem por medida uma unidade, o comprimento do ciclo trigonométrico será igual, portanto, a 2π unidades. Como decorrência, temos que:

- um arco de uma volta (ou de medida 2π rad) terá comprimento 2π unidades;
- um arco de comprimento $|x|$, no ciclo trigonométrico, terá medida $|x|$ rad.

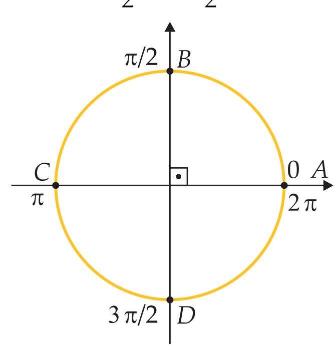
Assim, a medida de um arco $\overset{\frown}{AP}$, sobre o ciclo trigonométrico, é igual ao módulo do número real x do qual P é a imagem.

Exercícios Resolvidos

01. No ciclo trigonométrico, identificar as imagens dos números reais 0, π/2, π, 3π/2 e 2π.

Resolução

No ciclo ilustrado a seguir, o ponto A é imagem dos números 0 e 2π, enquanto B, C e D são imagens, respectivamente, de $\frac{\pi}{2}$, π *e* $\frac{3\pi}{2}$.



02. Localizar, no ciclo trigonométrico, as imagens dos números reais dados nos itens que seguem:

a) $x = 1$

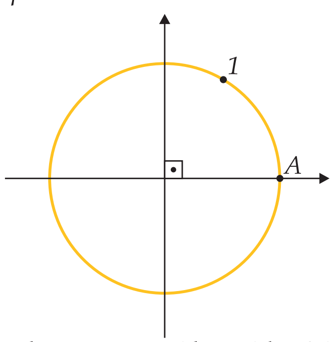
b) $x = \dfrac{\pi}{4}$

c) $x = \dfrac{5\pi}{6}$

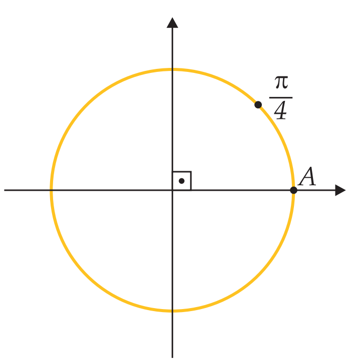
d) $x = -\dfrac{\pi}{3}$

Resolução

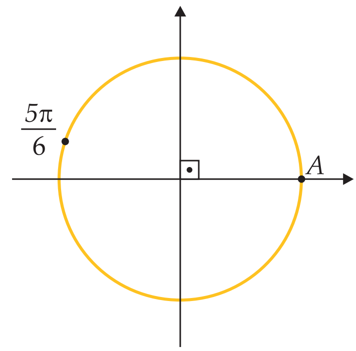
a) No sentido anti-horário, percorremos um arco de comprimento ***igual ao do raio*** *(ou de medida 1 rad) a partir do ponto* A.



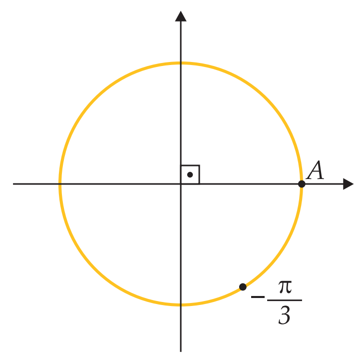
b) Igualmente no sentido anti-horário, a partir de A*, percorremos um arco de comprimento* $\dfrac{\pi}{4}$ *(ou de medida 45°)*



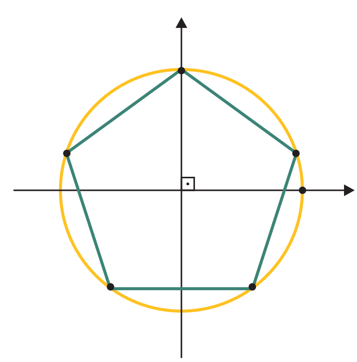
c) A partir do ponto A*, descrevemos um arco de comprimento* $\dfrac{5\pi}{6}$ *(ou de medida 150°), no sentido anti-horário.*



d) No sentido horário, iniciando de A*, percorremos um arco de comprimento* $\dfrac{\pi}{3}$ *(ou de medida 60°)*



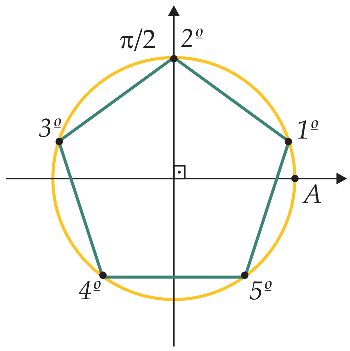
03. Um pentágono regular é inscrito no ciclo trigonométrico, conforme representa a figura a seguir. Considerando $x \in R$ tal que $0 \leq x < 2\pi$, determine os valores de x de forma que os vértices do pentágono sejam suas imagens no ciclo.



Resolução

Os arcos do ciclo limitados por dois vértices consecutivos do pentágono regular têm comprimento

$$\frac{2\pi}{5}\left(\frac{\text{comprimento do arco de uma volta}}{\text{nº de vértices}}\right)$$



Numerando seus vértices a partir de A, no sentido anti-horário, teremos, para o segundo deles, a imagem de $\frac{\pi}{2}$. Dessa forma, podemos associar a cada vértice os números reais x dados a seguir:

Primeiro vértice:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{10}$$

Segundo vértice:

$$x = \frac{\pi}{2}$$

Terceiro vértice:

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5} = \frac{9\pi}{10}$$

Quarto vértice:

$$x = \frac{9\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{13\pi}{10}$$

Quinto vértice:

$$x = \frac{13\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{17\pi}{10}$$

Assim, os valores reais de x pedidos compõem o conjunto solução:

$$S = \left\{\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{10}; \frac{13\pi}{10}; \frac{17\pi}{10}\right\}$$

3. Seno, Co-seno e Tangente no Ciclo Trigonométrico

Definimos seno, co-seno e tangente para um ângulo agudo interno de um triângulo retângulo como razões entre seus lados.

Para que possamos aplicar tais relações a quaisquer ângulos (nulo, reto e obtuso) e também a quaisquer arcos contidos no ciclo trigonométrico, é necessário que façamos uma redefinição desses conceitos.

Observando a figura 5, consideremos a circunferência trigonométrica, de centro $O(0, 0)$ e raio unitário. Notamos que a reta t a tangencia no ponto A, de coordenadas $(1, 0)$.

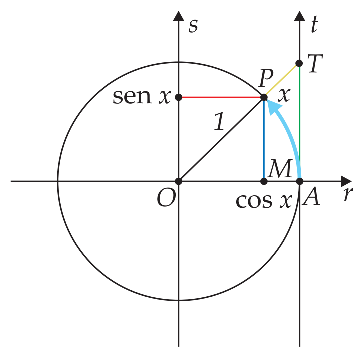


Fig. 5

Imaginemos um ponto P, no primeiro quadrante, imagem no ciclo de um número real x. A semi-reta $\overrightarrow{OP}$ intercepta a reta t no ponto T.

Definimos, então,

sen $x \rightarrow$ ordenada de P
cos $x \rightarrow$ abscissa de P
tg $x \rightarrow$ ordenada de T

Assim, o ponto P terá coordenadas (cos x, sen x) e o ponto T coordenadas (1, tg x).

Em virtude das definições que vimos, referirmo-nos aos eixos r, s e t, respectivamente, como eixos dos co-senos, dos senos e das tangentes.

É necessário, porém, reconhecermos que as razões antes definidas continuam válidas.

Para isso, notemos o triângulo retângulo *OMP* (destacado na figura 5), oriundo da construção que acabamos de fazer. Considerando x como um número real positivo, podemos dizer que o ângulo $M\hat{O}P$ tem medida x. Assim,

$$\operatorname{sen} x = \frac{MP}{OP} = \frac{MP}{1} \Rightarrow MP = \operatorname{sen} x$$

$$\cos x = \frac{OM}{OP} = \frac{OM}{1} \Rightarrow OM = \cos x$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{MP}{OM} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

De fato, as medidas dos segmentos $\overline{MP}$ e $\overline{OM}$ podem ser dadas pelas coordenadas (positivas, no caso) de P: respectivamente, sen x e cos x.

Além disso, reconhecemos na relação $\frac{MP}{OM}$ a identidade tg x = $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, que já foi demonstrada.

Essa identidade ainda é reconhecível como conseqüência da semelhança dos triângulos *OMP* e *OAT*. Com certeza, podemos afirmar que

$$\frac{AT}{OA} = \frac{MP}{OM} \Rightarrow \frac{AT}{1} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow AT = \operatorname{tg} x$$

De fato, a medida do segmento $\overline{AT}$ pode ser dada pela ordenada de T (positiva), que adiantamos constituir a tg x.

Procurando ampliar as noções de seno, cosseno e tangente para arcos do ciclo, imaginemos o ponto P, da figura 5, movimentando-se no sentido positivo de giro por sobre a circunferência, o que ilustramos nas figuras 6a a 6b. Notemos que o ponto T movimenta-se também por sobre a reta t.

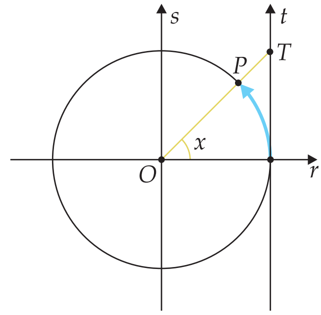


Fig. 6a

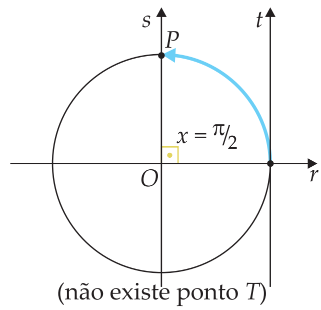


Fig. 6b

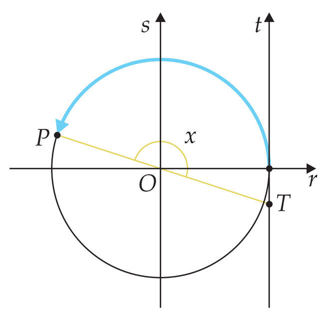


Fig. 6c

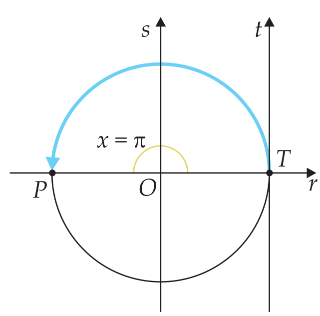


Fig. 6d

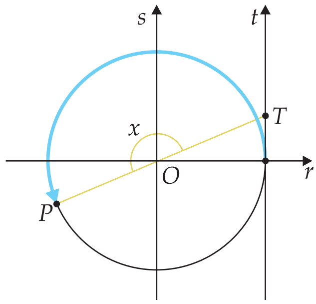
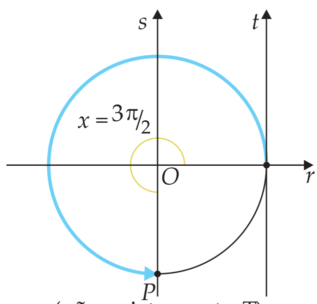


Fig. 6e



(não existe ponto *T*)

Fig. 6f

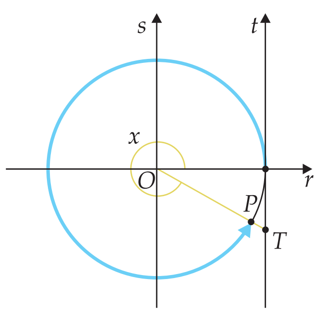


Fig. 6g

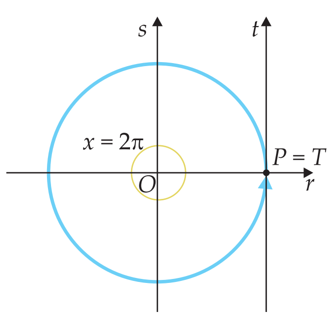


Fig. 6h

Da seqüência de ilustrações, podemos concluir que, se x é arco com extremidade no:

- **primeiro quadrante** (figura 6a), todas as coordenadas de P e T são positivas, ou seja,

$$\boxed{\text{sen } x > 0, \cos x > 0, \text{tg } x > 0}$$

- **segundo quadrante** (figura 6c), o ponto P possui ordenada positiva (sen $x > 0$) e abscissa negativa ($\cos x < 0$), sendo também negativa a ordenada de T (tg $x < 0$);
- **terceiro quadrante** (figura 6e), as coordenadas de P são negativas (sen $x < 0$ e $\cos x < 0$), enquanto T tem ordenada positiva (tg $x > 0$);
- **quarto quadrante** (figura 6g), P tem ordenada negativa (sen $x < 0$) e abscissa positiva ($\cos x > 0$), e o ponto T tem ordenada negativa (tg $x < 0$).

É possível ainda inferir que, para

- $x = 0$ ou $x = 2\pi$ (figura 6h), temos:

$$\begin{cases} \text{sen } x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases}$$

- $x = \dfrac{\pi}{2}$ (figura 6b), temos

$$\begin{cases} \text{sen } x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

- $x = \pi$ (figura 6d), temos

$$\begin{cases} \text{sen } x = 0 \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

- $x = \dfrac{3\pi}{2}$ (figura 6f), temos

$$\begin{cases} \text{sen } x = -1 \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

É importante observar que é impossível quantificar o valor da tangente para arcos de medida $x = \dfrac{\pi}{2}$ (figura 6b) e $x = \dfrac{3\pi}{2}$ (figura 6f), uma vez que não há interseção entre a reta t e a semi-reta $\overrightarrow{OP}$.

As tabelas a seguir resumem o que verificamos a respeito dos sinais das razões trigonométricas nos diferentes quadrantes, além dos valores para seno, co-seno e tangente de arcos notáveis da primeira volta, com extremidades nos limites desses quadrantes:

	Sinais			
	1º Q$^{\text{te}}$	2º Q$^{\text{te}}$	3º Q$^{\text{te}}$	4º Q$^{\text{te}}$
sen *x*	+	+	–	–
cos *x*	+	–	–	+
tg *x*	+	–	+	–

	Valores				
	0° (0 rad)	90° ($\frac{\pi}{2}$ rad)	180° (π rad)	270° ($\frac{3\pi}{2}$ rad)	360° (2π rad)
sen *x*	0	1	0	–1	0
cos *x*	1	0	–1	0	1
tg *x*	0	∄	0	∄	0

Exercícios Resolvidos

01. Calcular o valor da expressão

$$E=\frac{\operatorname{sen}90^\circ\cdot\cos180^\circ+\cos0^\circ\cdot\operatorname{sen}270^\circ}{\operatorname{sen}0^\circ+tg\,180^\circ\cdot\cos270^\circ+\cos0^\circ}$$

Resolução

$$E=\frac{1\cdot(-1)+1\cdot(-1)}{0+0\cdot0+1}=-2$$

02. Sendo $x=\frac{\pi}{2}$, determinar o valor de

$$E=\frac{\cos2x+2\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg}4x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}:$$

Resolução

Substituindo x por $\frac{\pi}{2}$ na expressão dada, obtemos:

$$E=\frac{\cos\pi+2\,sen\frac{\pi}{2}}{tg\,2\pi-tg\frac{\pi}{4}}$$

$$E=\frac{-1+2\cdot1}{0-1}=\frac{1}{-1}\qquad\boxed{E=-1}$$

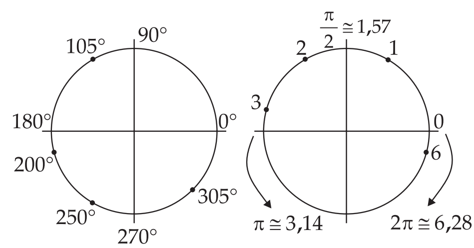
03. Qual é o sinal das expressões:

a) $E=\operatorname{sen}105^\circ\cdot\cos200^\circ\cdot\sec305^\circ\cdot\operatorname{cosec}250^\circ$

b) $E=\operatorname{sen}1\cdot\cos2\cdot\sec3\cdot\operatorname{cosec}6$

Resolução

Observe que os arcos do item b estão em radianos. Assim



a) $sen\ 105^\circ>0,\ cos\ 200^\circ<0,\ sec\ 305^\circ=$

$$=\frac{1}{cos\ 305^\circ}>0,\ cosec\ 250^\circ=\frac{1}{sen\ 250^\circ}<0$$

$E=+\cdot-\cdot+\cdot-\Rightarrow E>0$

b) $sen\ 1>0,\ cos\ 2<0,\ sec\ 3=\frac{1}{cos\,3}<0,$

$cosec\ 6=\frac{1}{sen\ 6}<;\ E=+\cdot-\cdot-\cdot-\Rightarrow E<0$

Resposta: *a)* $E>0$

b) $E<0$

04. (Fatec-SP) A que quadrante pertence x, se $x\in\left]0,2\pi\right[$ e $\operatorname{sen}x\cdot\cos x>0$ e $\operatorname{tg}x\cdot\sec x<0$?

Resolução

$sen\ x\cdot cos\ x>0$

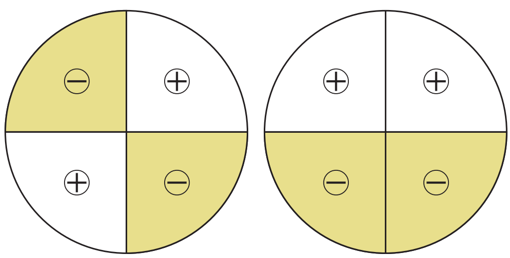
$$ambos\ positivos \begin{cases} cos\,x < 0 \\ sen\,x > 0 \end{cases}$$

ou

$$ambos\ negativos \begin{cases} cos\,x > 0 \\ sen\,x < 0 \end{cases}$$

$$tg\,x \cdot sec\,x < 0 \Rightarrow tg\,x \cdot \frac{1}{cos\,x} < 0$$

O sinal será negativo se tg x > 0 e cos x < 0 ou tg x < 0 e cos x > 0



Conclusão

Como as duas condições devem ser satisfeitas, $x \in 3^{\underline{o}}$ quadrante.

***Resposta**: $x \in 3^{\underline{o}}$ quadrante*

05. (Cesgranrio-RJ) Se o cos x = 3/5 e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, então tg x vale:

a) – 4/3
b) – 3/4
c) 5/3
d) 7/4
e) –7/4

1ª Resolução

$$sen^2x + cos^2x = 1 \Rightarrow sen^2x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$sen^2x + \frac{9}{25} = 1 \quad \Rightarrow \quad sen^2x = \frac{16}{25}$$

$sen\,x = \pm\frac{4}{5}$. *Como x ∈ IV quadrante sen x < 0, logo sen x = – 4/5.*

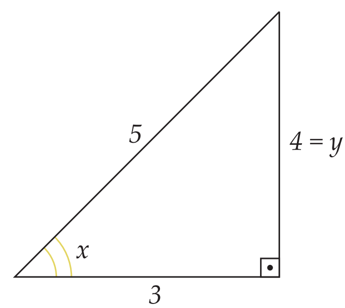
$$tg\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x} = \frac{-4/5}{3/5} = -4/3 \Rightarrow Resposta: tg\,x = -4/3$$

2ª Resolução

Podemos construir um triângulo retângulo que atenda às condições do problema sem nos preocuparmos com os sinais. Encontrado o valor da incógnita, observamos o quadrante definido no problema para determinarmos o sinal da incógnita.

Resolução

$$cos\,x = \frac{3}{5} = \frac{cat.\,adj.}{cat}$$



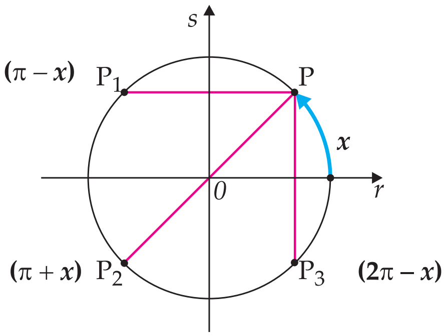
$$5^2 = 3^2 + y^2 \Rightarrow y = 4$$

$$x \in IV\ quadrante \Rightarrow tg\,x = -\frac{4}{3}$$

4. Redução ao Primeiro Quadrante: Simetrias

Na figura a seguir, apresentamos um ponto P do ciclo trigonométrico, imagem de um número real x ou, simplesmente, extremidade de um arco no primeiro quadrante.

Os pontos P_1, P_2 e P_3, pertencentes à circunferência, são simétricos de P em relação ao eixo das ordenadas, à origem dos eixos coordenados e ao eixo das abscissas, respectivamente.



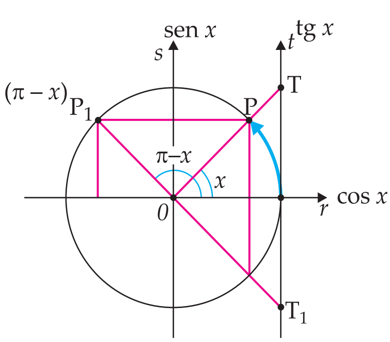
Notemos também que, sendo P imagem de um arco de medida x, teremos:

- P_1 como imagem de um arco de medida $\pi - x$;
- P_2 como imagem de um arco de medida $\pi + x$;
- P_3 como imagem de um arco de medida $2\pi - x$ ou de medida $-x$.

Analisemos agora, caso a caso, as simetrias encontradas para P.

4.1. Simetria em Relação ao Eixo das Ordenadas

Na figura a seguir, vemos que os pontos P e P_1, simétricos em relação ao eixo das ordenadas, têm **ordenadas iguais** e **abscissas simétricas**.



Uma vez que os pontos a que nos referimos podem ser escritos como: P (cos x, sen x) e P_1 (cos ($\pi - x$), sen ($\pi - x$)), obtemos as seguintes identidades:

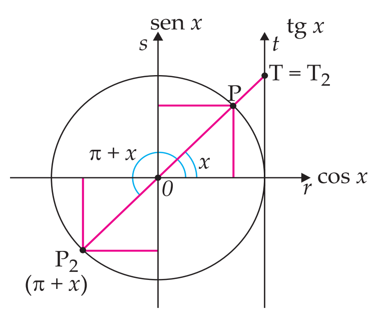
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{sen}\,(\pi - x) = \text{sen}\,x \\ \cos\,(\pi - x) = -\cos\,x \end{array}}$$

Observemos, ainda, que os pontos T e T_1, interseções da reta t respectivamente com $\overleftrightarrow{OP}$ e $\overleftrightarrow{OP_1}$, têm **ordenadas simétricas**. Como T e T_1 podem ser escritos como T (1, tg x) e T_1 (1, tg ($\pi - x$)), deduzimos que:

$$\boxed{\text{tg}\,(\pi - x) = -\text{tg}\,x}$$

4.2. Simetria em Relação à Origem dos Eixos Coordenados

Os pontos P e P_2, representados na figura a seguir, simétricos em relação à origem dos eixos coordenados, têm **abscissas** e **ordenadas simétricas**.



Uma vez sendo possível representar P e P_2 por meio dos pares ordenados (cos x, sen x) e (cos ($\pi + x$), sen ($\pi + x$)), respectivamente, podemos então afirmar que:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{sen}\,(\pi + x) = -\text{sen}\,x \\ \cos\,(\pi + x) = -\cos\,x \end{array}}$$

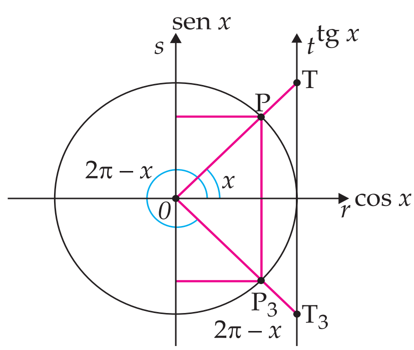
As interseções da reta t com as retas $\overleftrightarrow{OP}$ e $\overleftrightarrow{OP_2}$ resultam em pontos T e T_2, congruentes e, conseqüentemente, de ordenadas iguais.

Como T e T_2 podem ser escritos na forma T (1, tg x) e T_2 (1, tg ($\pi + x$)), dizemos que:

$$\boxed{\text{tg}\,(\pi + x) = \text{tg}\,x}$$

4.3. Simetria em Relação ao Eixo das Abscissas

Vemos, na figura a seguir, os pontos P e P_3, simétricos em relação ao eixo das abscissas. Notamos que suas **abscissas são iguais** e suas **ordenadas, simétricas.**



Escrevendo esses pontos na notação:

$P\,(\cos x, \operatorname{sen} x)$ e $P_3\,(\cos(2\pi - x), \operatorname{sen}(2\pi - x))$, facilmente podemos concluir que:

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen}(2\pi - x) = -\operatorname{sen} x \\ \cos(2\pi - x) = \cos x \end{array}}$$

Os pontos T e T_3, oriundos das interseções da reta t com as retas $\overleftrightarrow{OP}$ e $\overleftrightarrow{OP_3}$, respectivamente, possuem ordenadas simétricas.

Escrevendo T e T_3 como $T\,(1, \operatorname{tg} x)$ e $T_3\,(1, \operatorname{tg}(2\pi - x))$, é correto dizer que:

$$\boxed{\operatorname{tg}(2\pi - x) = -\operatorname{tg} x}$$

O ponto P_3 do ciclo pode ainda ser extremidade do arco de medida $(-x)$. Os resultados anteriores, portanto, podem ser reescritos na forma:

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \\ \cos(-x) = \cos x \\ \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \end{array}}$$

Em resumo, pelo que verificamos aqui, podemos dizer que dois arcos com medidas entre 0 e 2π rad, determinados no ciclo trigonométrico a partir de sua origem,

- têm senos iguais se forem simétricos em relação ao eixo das ordenadas (eixo dos senos);
- têm co-senos iguais se forem simétricos em relação ao eixo das abscissas (eixo dos co-senos);
- têm tangentes iguais se forem simétricos em relação à origem dos eixos coordenados.

Exercícios Resolvidos

01. Calcular seno, co-seno e tangente dos arcos a seguir:

a) 150°

b) $\dfrac{5\pi}{4}$

c) 300°

Resolução

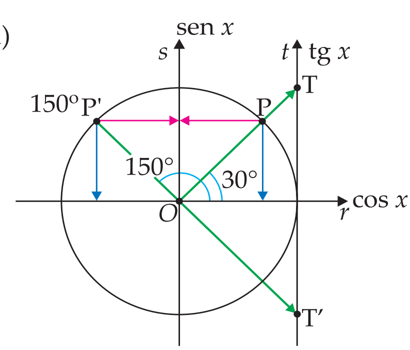
Para respondermos ao que se pede, daremos os seguintes passos:

I. determinar no ciclo trigonométrico a extremidade do arco;

II. buscar, no primeiro quadrante, o ponto simétrico ao ponto localizado;

III. conhecidos os valores de seno, co-seno e tangente do arco determinado no primeiro quadrante, expor a resposta, mantendo ou invertendo sinais, de acordo com a simetria obtida.

a)



sen 150° = sen 30º

$$\boxed{sen\ 150° = \frac{1}{2}}$$

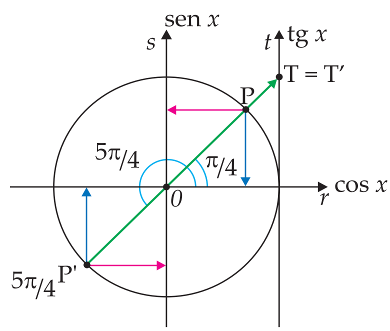
$cos\ 150° = -\ cos\ 30°$

$$\boxed{cos\ 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$tg\ 150° = -tg\ 30°$

$$\boxed{tg\ 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

b)



$$sen\frac{5\pi}{4} = -\ sen\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{sen\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

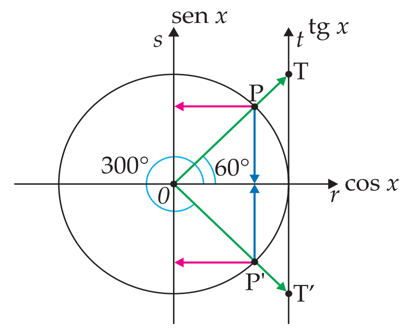
$$cos\frac{5\pi}{4} = -\ cos\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$tg\frac{5\pi}{4} = tg\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{tg\frac{5\pi}{4} = 1}$$

c)



$sen\ 300° = -\ sen\ 60°$

$$\boxed{sen\ 300° = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$cos\ 300° = cos\ 60°$

$$\boxed{cos\ 300° = \frac{1}{2}}$$

$tg\ 300° = -tg\ 60°$

$$\boxed{tg\ 300° = -\sqrt{3}}$$

02. Se x é um arco determinado no 1º quadrante, tal que tg $x = 0{,}75$, calcule:

a) sen $(\pi - x)$

b) cos $(\pi + x)$

Resolução

Calculemos primeiramente os valores de seno e co-seno de x, que serão positivos, pois x é arco do primeiro quadrante.

Com o auxílio das identidades estudadas no Capítulo 2, teremos:

$$sec^2 x = tg^2 x + 1 \Rightarrow \frac{1}{cos^2 x} = 1{,}5625$$

$$cos^2 x = 0{,}64 \qquad \therefore\ cos\ x = 0{,}8$$

$$sen^2 x + cos^2 x = 1 \Rightarrow sen^2 x = 0{,}36$$

$$\therefore\ sen\ x = 0{,}6$$

a) $sen\ (\pi - x) = sen\ x$

$\boxed{sen\ (\pi - x) = 0{,}6}$

b) $cos\ (\pi + x) = -\ cos\ x$

$\boxed{cos\ (\pi + x) = -\ 0{,}8}$

03. (UEL–PR) O valor da expressão $\cos(2\pi/3) + \text{sen}\ (3\pi/2) + \text{tg}(5\pi/4)$ é:

a) $\dfrac{\sqrt{2}-3}{2}$

b) $-1/2$

c) 0

d) 1/2

e) $\sqrt{3}/2$

Resolução

$cos\ (2\pi/3) = -\ cos\ (\pi/3) = -\dfrac{1}{2}$

$sen\ (3\pi/2) = -1$

$tg\ (5\pi/4) = tg\ (\pi/4) = \sqrt{2}/2$

$cos\ (2\pi/3) + sen\ (3\pi/2) + tg\ (5\pi/4) =$

$-\dfrac{1}{2} - 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{\sqrt{2}-3}{2}$

***Resposta:** A*

04. (FGV–SP) Das igualdades:

(1) $\text{sen}\ \dfrac{\pi}{6} = -\text{sen}\ \dfrac{5\pi}{6}$

(2) $\cos \dfrac{\pi}{6} = -\cos \dfrac{5\pi}{6}$

(3) $\text{tg}\ \dfrac{\pi}{6} = \text{tg}\ \dfrac{7\pi}{6}$

(4) $\text{cosec}\ \dfrac{\pi}{6} = \text{cosec}\ \dfrac{5\pi}{6}$

Podemos dizer que:

a) nenhuma delas é correta.

b) apenas uma delas é correta.

c) apenas duas delas são corretas.

d) apenas três delas são corretas.

e) todas são corretas.

Resolução

(1) Falsa, pois $sen\ \pi/6 = sen\ 5\pi/6$ $(sen\ x = sen\ (\pi - x))$

(2) Verdadeira $(cos\ x = -\ cos\ (\pi - x))$

(3) Verdadeira $(tg\ x = tg\ (\pi + x))$

(4) Verdadeira, pois

$$cossec\ x = \frac{1}{sen\ x} \Rightarrow \frac{1}{sen\ \pi/6} = \frac{1}{sen\ 5\pi/6}$$

***Resposta**: D*

5. Equações Trigonométricas na Primeira Volta

É necessário que, primeiramente, saibamos o que vem a ser uma equação trigonométrica, e vamos entendê-la a partir dos seguintes exemplos:

- A igualdade $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$ é uma **identidade em** $\boldsymbol{x}$, uma vez que ela é válida para a medida de todo e qualquer arco que venha a substituir x.
- A expressão $\text{sen}^3\ x = -\dfrac{1}{8}$ é uma **equação em** $\boldsymbol{x}$, ou seja, não é todo e qualquer arco de medida x que apresenta o cubo do seu seno igual a $-1/8$. Portanto, x passa a ser a incógnita da equação, cuja solução será o conjunto de valores de x que a satisfazem.

Pelo que vimos, podemos dizer que uma **equação trigonométrica** é toda igualdade dependente de uma incógnita aplicada a uma ou mais razões trigonométricas.

Se a expressão, porém, for satisfeita para qualquer valor substituído na incógnita, ela passará a se chamar **identidade trigonométrica.**

Uma vez que há uma infinidade de formas em que essas equações podem se apresentar, iremos estudar alguns tipos básicos, aos quais podem ser reduzidas as equações mais complexas.

5.1. Equação da Forma sen x = a

Como os pontos do ciclo têm ordenadas limitadas entre –1 e 1, essa equação só apresenta solução para valores de a tais que $a \in [-1, 1]$.

Podemos, nesse intervalo, encontrar a tal que $a = \text{sen } \alpha$, isto é,

$$\text{sen } x = a \Rightarrow \text{sen } x = \text{sen } \alpha$$

Os números x e α apresentam mesmo seno se, e somente se, suas imagens no ciclo trigonométrico são coincidentes ou simétricas em relação ao eixo das ordenadas.

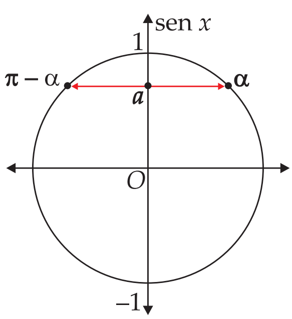


Fig. 11

De acordo com a figura, dizemos que, para $0 \le \alpha < 2\pi$,

$$\text{sen } x = \text{sen } \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ ou \\ x = \pi - \alpha \end{cases}$$

5.2. Equação da Forma cos x = a

Os pontos que compõem a circunferência trigonométrica têm abscissas (ou valores possíveis de co-seno para os arcos por eles definidos) limitadas entre –1 e 1. Logo, esse tipo de equação só tem solução se a é tal que $a \in [-1, 1]$.

Nesse intervalo, podemos encontrar a tal que $a = \cos \alpha$, isto é,

$$\cos x = a \ \Rightarrow \cos x = \cos \alpha$$

Os números x e α apresentam mesmo co-seno se, e somente se, suas imagens no ciclo trigonométrico são coincidentes ou simétricas em relação ao eixo das abscissas.

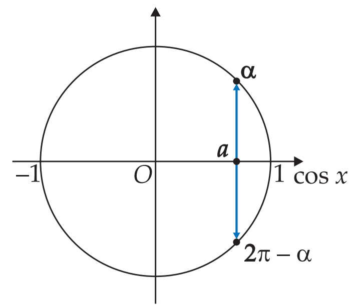


Fig. 12

Pelo que observamos na figura 12, podemos afirmar que, para $0 \le \alpha < 2\pi$,

$$\cos x = \cos \alpha \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ \text{ou} \\ x = 2\pi - \alpha \end{cases}$$

5.3. Equação da Forma tg x = a

Equações dessa forma têm solução para qualquer valor de a, real.

Sendo α tal que $a = \text{tg } \alpha$, podemos dizer que:

$$\text{tg } x = a \ \Rightarrow \text{tg } x = \text{tg } \alpha$$

Os arcos x e α apresentam mesma tangente se, e somente se, suas imagens no ciclo trigonométrico são coincidentes ou simétricas em relação à origem dos eixos coordenados (diametralmente opostas).

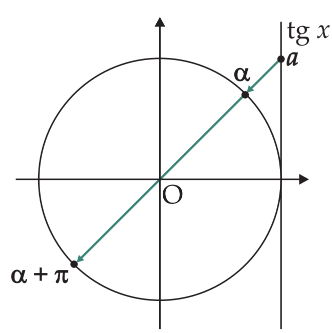


Fig. 13

De acordo com a figura, para $0 \le \alpha < 2\pi$, é correto dizer que:

$$\boxed{\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha \iff \begin{cases} x = \alpha \\ \text{ou} \\ x = \alpha + \pi \end{cases}}$$

Exercícios Resolvidos

01. Sendo $0 \le x < 2\pi$, resolver as equações:

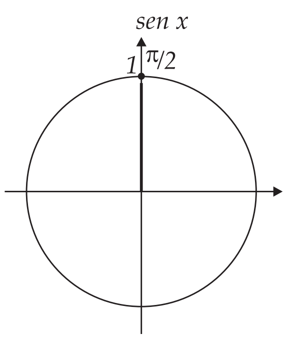
a) sen $x = 1$

b) sen $x = 0$

c) sen $x = -\dfrac{1}{2}$

Resolução

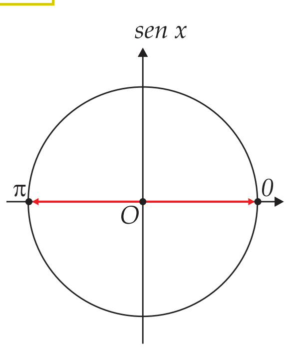
a)



No ciclo trigonométrico anterior, podemos ver que:

$\boxed{x = \pi/2}$

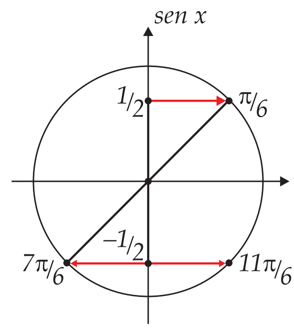
b)



A partir do valor 0 do eixo dos senos, determinamos no ciclo trigonométrico, como raízes, os arcos:

$\boxed{x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \pi}$

c)

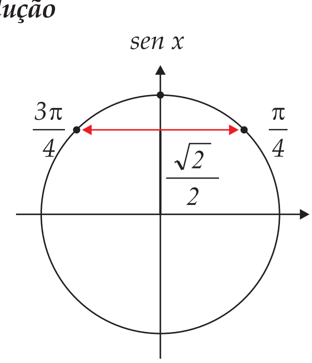


Sabendo que $\frac{1}{2}$ *é o valor do seno de* $\frac{\pi}{6}$, *com base na circunferência trigonométrica verificamos que* $-\frac{1}{2}$ *é o valor de seno que se refere às imagens dos arcos* $\frac{\pi}{6} + \pi$ *e* $2\pi - \frac{\pi}{6}$, *ou seja,*

$$\boxed{x = \frac{7\pi}{6} \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{11\pi}{6}}$$

02. (FGV-SP 2001) Resolva a equação sen $x = \sqrt{2}/2$ onde $0 \le x \le 2\pi$

Resolução



$S = \{\pi/4, 3\pi/4\}$

03. Para arcos x tais que $0 \le x \le 2\pi$, determinar o conjunto solução da equação

$2\text{sen}^2\, x + \text{sen}\, x - 1 = 0$

Resolução

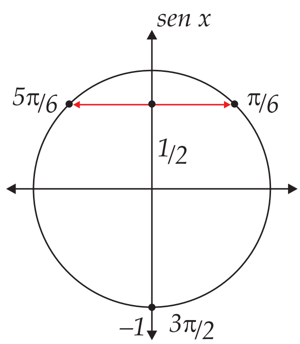
Podemos, inicialmente, simplificar a equação fazendo $y = \text{sen}\, x$

Dessa forma, teremos a equação enunciada reescrita na forma

$2y^2 + y - 1 = 0$

Aplicando a fórmula de Bhaskara, encontramos as raízes:

$$\begin{cases} y = -1 \Rightarrow sen\,x = -1 \\ y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow sen\,x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$



No ciclo trigonométrico, respeitando o intervalo de validade da incógnita x, encontramos:

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2}$$

Logo,

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}}$$

04. Se x é tal que $0 \le x < 2\pi$, resolver as equações em x apresentadas a seguir:

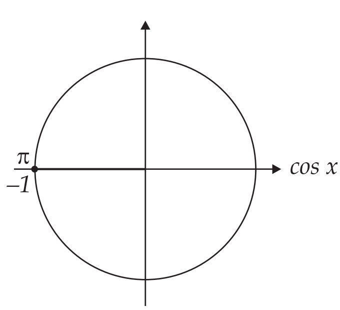
a) $\cos x = -1$

b) $\cos x = 0$

c) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução

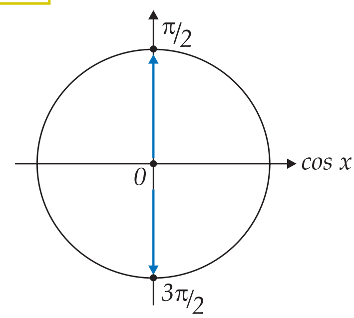
a)



Segundo o que observamos no ciclo trigonométrico acima, temos que:

$\boxed{x = \pi}$

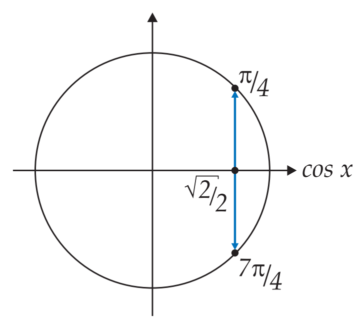
b)



A partir do valor 0 do eixo dos co-senos, encontramos, no ciclo, as imagens dos arcos (raízes da equação):

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} \quad ou \quad x = \frac{3\pi}{2}}$$

c)



Associados ao valor $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *do eixo dos co-senos, encontramos as raízes:*

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} \quad ou \quad x = \frac{7\pi}{4}}$$

05. (PUC-SP) A soma das raízes da equação $\cos x + \cos^2 x = 0$; $0 \le x \le 2\pi$, em radianos é:

a) π

b) 2π

c) 3π

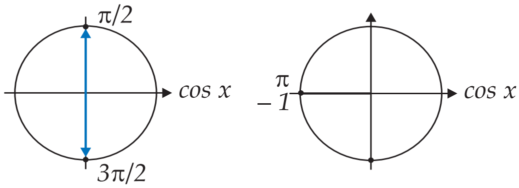
d) 4π

e) 5π

Resolução

$\cos x + \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x \cdot (1 + \cos x) = 0$

$\cos x = 0$ ou $1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1$



Soma $= \pi/2 + 3\pi/2 + \pi = 2\pi + \pi = 3\pi$

***Resposta:** C*

06. Sendo x um número tal que $0 \leq x < 2\pi$, resolver as equações seguintes:

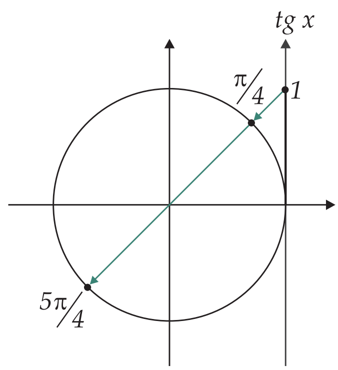
a) $\text{tg}\, x = 1$

b) $\text{tg}\, x = 0$

c) $\text{tg}\, x = -\sqrt{3}$

Resolução

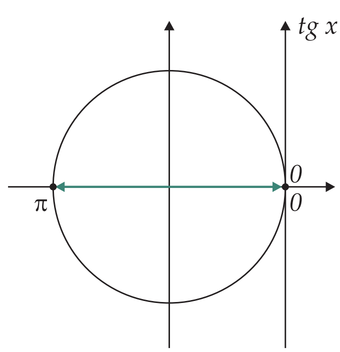
a)



Pelo que observamos no ciclo ilustrado acima, as raízes da equação enunciada são:

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{4}}$$

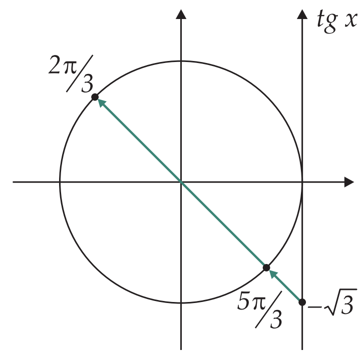
b)



O valor 0 do eixo das tangentes associa-se aos arcos:

$$\boxed{x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \pi}$$

c)



De acordo com o ciclo trigonométrico acima, temos para raízes da equação dada

$$\boxed{x = \frac{2\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{3}}$$

07. Para valores de x tais que $0 \leq x < \pi$, calcular a soma das raízes da equação $|\text{tg}\, 2x| = 1$.

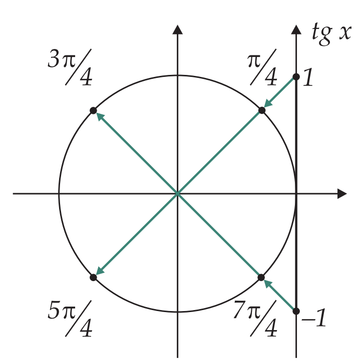
Resolução

Multiplicando por 2 o intervalo de validade para os arcos x, temos:

$$0 \leq x < \pi \Rightarrow 0 \leq 2x < 2\pi$$

Da equação fornecida no enunciado, temos:

$$|tg\, 2x| = 1 \Rightarrow \begin{cases} tg\, 2x = 1 \\ ou \\ tg\, 2x = -1 \end{cases}$$



Do ciclo trigonométrico, observamos que:

$$\begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{4} \text{ ou} \\ 2x = \dfrac{3\pi}{4} \text{ ou} \\ 2x = \dfrac{5\pi}{4} \text{ ou} \\ 2x = \dfrac{7\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{8} \text{ ou} \\ x = \dfrac{3\pi}{8} \text{ ou} \\ x = \dfrac{5\pi}{8} \text{ ou} \\ x = \dfrac{7\pi}{8} \end{cases}$$

Logo, a soma das raízes encontradas é:

$$S = \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} + \frac{7\pi}{8} = \frac{16\pi}{8}$$

$$\boxed{S = 2\pi}$$

Capítulo 04. Adição e Subtração de Arcos

1. Introdução

Neste módulo temos o objetivo de suprir a necessidade de obtenção de razões trigonométricas para ângulos não notáveis a partir de valores conhecidos de seno. co-seno e tangente de outros que, combinados em operações algébricas, transformem-se nos ângulos desejados.

Os resultados que serão demonstrados a partir de ângulos agudos internos de triângulos retângulos poderão ser utilizados em ângulos de medida superior a 90°, encontrados em triângulos obtusângulos, e em arcos de circunferência.

2. Adição de Arcos

Apresentamos na figura 1 três triângulos retângulos, *OAB*, *OCD* e *OHD*, em que temos hipotenusa unitária. Dessa forma, temos $OB = OD = 1$.

Observemos que a soma dos ângulos a e b, agudos e internos, respectivamente dos triângulos *OAB* e *OCD,* compõe o ângulo interno de medida $a + b$ do triângulo *OHD*. A partir dele, podemos definir seno e co-seno de $a + b$ como:

$$\text{sen}\,(a+b) = \frac{DH}{OD} = \frac{DH}{1} \Rightarrow$$
$$\text{sen}\,(a+b) = DH$$

$$\cos\,(a+b) = \frac{OH}{OD} = \frac{OH}{1} \Rightarrow$$
$$\cos\,(a+b) = OH$$

A partir do triângulo *OCD* podemos calcular seno e co-seno do ângulo b como:

$$\text{sen}\, b = \frac{CD}{OD} = \frac{CD}{1} \Rightarrow CD = \text{sen}\, b$$

$$\cos b = \frac{OC}{OD} = \frac{OC}{1} \Rightarrow OC = \cos b$$

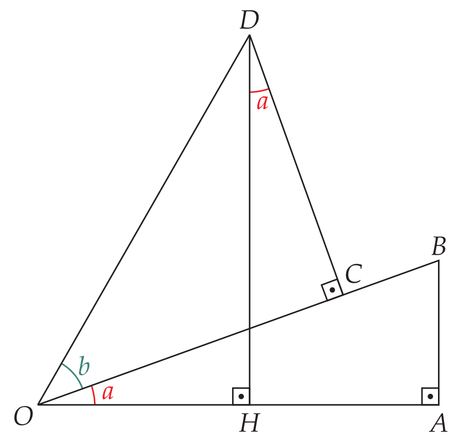


Figura 1

Na Geometria demonstramos que, se um ângulo tem seus lados perpendiculares aos lados de outro ângulo, eles terão mesma medida. Assim, não é difícil notar que, na construção apresentada na figura acima, os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{D}H$ são tais que $A\hat{O}B = C\hat{D}H = a$, uma vez que os lados $\overline{CD}$ e $\overline{DH}$ são, respectivamente, perpendiculares aos lados $\overline{OB}$ e $\overline{OA}$ do outro.

Na figura 2, a partir do ponto *C*, traçamos os segmentos $\overline{CR}$ e $\overline{CS}$, perpendiculares respectivamente a $\overline{OA}$ e $\overline{DH}$. Montamos, assim, dois novos triângulos retângulos, *OCR* e *CDS,* destacados na ilustração. Observemos que os triângulos agora formados têm um ângulo interno de medida a.

Dessa forma, temos:

- no triângulo CDS:

$$\text{sen } a = \frac{CS}{CD} = \frac{CS}{\text{sen } b} \Rightarrow CS = \text{sen } a \text{ sen } b;$$

$$\cos a = \frac{DS}{CD} = \frac{DS}{\text{sen } b} \Rightarrow DS = \text{sen } b \cos a;$$

- e no triângulo OCR:

$$\text{sen } a = \frac{CR}{OC} = \frac{CR}{\cos b} \Rightarrow CR = \text{sen } a \cos b;$$

$$\cos a = \frac{OR}{OC} = \frac{OR}{\cos b} \Rightarrow OR = \cos a \cos b.$$

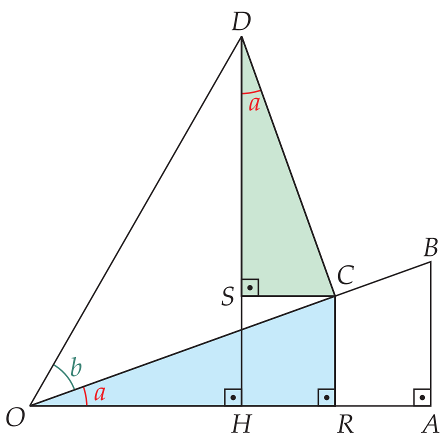


Figura 2

Vimos anteriormente que $\text{sen } (a+b) = DH$. Observando a figura 2, podemos reescrever essa expressão como:

$$\text{sen } (a+b) = CR + DS \Rightarrow$$
$$\text{sen } (a+b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$

Como $\cos (a+b) = OH$, e com base na figura 2, temos também que:

$$\cos (a+b) = OR - CS \Rightarrow$$
$$\cos (a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

Desde que $\cos x \neq 0$, para um ângulo x é válida a identidade $\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$

Por meio dela, portanto, podemos deduzir a tangente da soma de ângulos a e b como mostramos a seguir:

$$\text{tg } (a+b) = \frac{\text{sen } (a+b)}{\cos (a+b)} \Rightarrow$$

$$\text{tg } (a+b) = \frac{\text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b}$$

Dividindo-se numerador e denominador da fração obtida por $\cos a \cos b$, obtemos:

$$\text{tg } (a+b) = \frac{\dfrac{\text{sen } a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} + \dfrac{\text{sen } b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b}}{\dfrac{\cos a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} - \dfrac{\text{sen } a \cdot \text{sen } b}{\cos a \cdot \cos b}} \Rightarrow$$

$$\text{tg } (a+b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

Em resumo, para dois ângulos a e b, temos que:

$$\text{sen } (a+b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$
$$\cos (a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$
$$\text{tg } (a+b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b} \quad [\cos (a+b) \neq 0]$$

3. Diferença de Arcos

Seja $\text{sen } (x - y) = \text{sen } [x + (-y)]$

Aplicando-se a fórmula já conhecida, temos:

$\text{sen } (x - y) = \text{sen } x \cdot \cos (-y) + \text{sen } (-y) \cdot \cos x$

e, utilizando a redução ao 1º quadrante

$\cos (-y) = \cos y$ e $\text{sen } (-y) = -\text{sen } y$, temos:

$\text{sen } (x - y) = \text{sen } x \cdot \cos y + (-\text{sen } y) \cdot \cos x$, assim:

$$\text{sen } (x - y) = \text{sen } x \cdot \cos y - \text{sen } y \cdot \cos x$$

- Seja $\cos (x - y) = \cos [x + (-y)]$

Aplicando-se a fórmula já conhecida, temos:

$\cos (x - y) = \cos x \cdot \cos (-y) - \text{sen } x \cdot \text{sen } (-y)$

e, utilizando a redução ao 1º quadrante

$\cos (-y) = \cos y$ e $\text{sen } (-y) = -\text{sen } y$, temos:

$\cos (x - y) = \cos x \cdot \cos y - \text{sen } x \cdot (-\text{sen } y)$, assim:

$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$

Para deduzirmos a tangente da diferença, utilizamos o mesmo procedimento:

$\operatorname{tg}(x - y) = \operatorname{tg}[x + (-y)]$ e, aplicando a fórmula da adição de arcos,

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(-y)}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(-y)}$$

mas, pela redução ao 1º quadrante:

$\operatorname{tg}(-y) = -\operatorname{tg} y$

Logo, $\operatorname{tg}(x-y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + (-\operatorname{tg} y)}{1 - \operatorname{tg} x \cdot (-\operatorname{tg} y)}$, assim:

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

Portanto, para dois ângulos a e b, concluímos que:

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$
$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b} \quad [\cos(a-b) \neq 0]$$

Exercícios Resolvidos

01. Calcular o valor de seno, co-seno e tangente de 75°.

Resolução

Podemos escrever 75° por meio da soma de 30° + 45°.

Com o auxílio das expressões de seno, co-seno e tangente da soma, temos que:

- $\operatorname{sen} 75° = \operatorname{sen}(30° + 45°) \Rightarrow$

$\operatorname{sen} 75° = \operatorname{sen} 30° \cos 45° + \operatorname{sen} 45° \cos 30°$

$\Rightarrow \operatorname{sen} 75° = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$$\operatorname{sen} 75° = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

- $\cos 75° = \cos(30° + 45°) \Rightarrow$

$\cos 75° = \cos 30° \cdot \cos 45° - \operatorname{sen} 30° \cdot \operatorname{sen} 45° \Rightarrow$

$\cos 75° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$$\cos 75° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

- $\operatorname{tg} 75° = \operatorname{tg}(30° + 45°) \Rightarrow$

$\operatorname{tg} 75° = \dfrac{\operatorname{tg} 30° + \operatorname{tg} 45°}{1 - \operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{tg} 45°} \Rightarrow$

$\operatorname{tg} 75° = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \dfrac{\dfrac{3 + \sqrt{3}}{3}}{\dfrac{3 - \sqrt{3}}{3}} \Rightarrow$

$\operatorname{tg} 75° = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \cdot \dfrac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \Rightarrow$

$$\operatorname{tg} 75° = 2 + \sqrt{3}$$

02. Sendo x e y ângulos agudos e sabendo-se que $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ e $\cos y = \dfrac{1}{4}$, calcular o valor de seno e secante de $x + y$.

Resolução

Antes de mais nada, será necessário calcularmos sen y e cos x. Assim, teremos, por meio da identidade $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$ e sabendo que os ângulos são agudos, os seguintes resultados:

- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\cos^2 x = 1 - \dfrac{3}{16} = \dfrac{13}{16}$

$$\therefore \cos x = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

- $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1 \Rightarrow$

$\operatorname{sen}^2 y = 1 - \dfrac{3}{16} = \dfrac{15}{16}$

$$\therefore \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Aplicando-se os valores conhecidos na expressão do seno da soma, obtemos:

$$sen\,(x+y) = sen\,x \cdot cos\,y + sen\,y \cdot cos\,x \Rightarrow$$

$$sen\,(x+y) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{13}}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow$$

$$\boxed{sen\,(x+y) = \frac{\sqrt{3}}{16}(1+\sqrt{65})}$$

Para conhecermos o valor de sec (x + y), podemos dizer que:

$$sec\,(x+y) = \frac{1}{cos\,(x+y)} \Rightarrow$$

$$sec\,(x+y) = \frac{1}{cos\,x \cdot cos\,y - sen\,x \cdot sen\,y} \Rightarrow$$

$$sec\,(x+y) = \frac{1}{\frac{\sqrt{13}}{4}\cdot\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}} \Rightarrow$$

$$sec\,(x+y) = \frac{16}{\sqrt{13}-3\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{13}+3\sqrt{5}}{\sqrt{13}+3\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$sec\,(x+y) = \frac{16\,(\sqrt{13}+3\sqrt{5})}{-32} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sec\,(x+y) = -\frac{\sqrt{13}+3\sqrt{5}}{2}}$$

03. Calcular o valor de seno, co-seno e tangente de 15°.

Resolução

Podemos dizer que 15° corresponde à diferença 60° – 45° ou a 45° – 30°. Se utilizarmos essa última forma apresentada, aplicada às expressões de seno, co-seno e tangente da diferença, obteremos os seguintes resultados:

- $sen\,15° = sen\,(45° - 30°) \Rightarrow$

$$sen\,15° = sen\,45° \cdot cos\,30° - sen\,30° \cdot cos\,45°$$

$$sen\,15° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{sen\,15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

- $cos\,15° = cos\,(45° - 30°) \Rightarrow$

$$cos\,15° = cos\,45° \cdot cos\,30° + sen\,45° \cdot sen\,30°$$

$$cos\,15° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{cos\,15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

- $tg\,15° = tg\,(45° - 30°)$

$$tg\,15° = \frac{tg\,45° - tg\,30°}{1 - tg\,45° \cdot tg\,30°} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow$$

$$tg\,15° = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{3+\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\boxed{tg\,15° = 2-\sqrt{3}}$$

04. Sabendo que tg $a = 3$ e tg $b = 2$, calcule cotg $(a - b)$

Resolução

Como a co-tangente de um ângulo corresponde ao inverso de sua tangente, podemos fazer

$$cotg\,(a-b) = \frac{1}{tg\,(a-b)} \Rightarrow$$

$$cotg\,(a-b) = \frac{1+tg\,a \cdot tg\,b}{tg\,a - tg\,b} = \frac{1+3\cdot 2}{3-2} \Rightarrow$$

$$\boxed{cotg\,(a-b) = 7}$$

05. (Mackenzie-SP)

Calcular: $y = \text{sen}\,(123° + a) - \text{sen}\,(57° - a)$

Resolução

$$sen\,(123° + a) = sen\,123°\,cos\,a + sen\,a\,cos\,123°$$

$$sen\,(57° - a) = sen\,57°\,cos\,a - sen\,a\,cos\,57°$$

Como $123° = 180° - 57°$, então $sen\ 123° = sen\ 57°$ e $cos\ 123° = -cos\ 57°$.

Então:

$y = (sen\ 123° - sen\ 57°)\ cos\ a -$

$- (cos\ 123° + cos\ 57°)\ sen\ a$

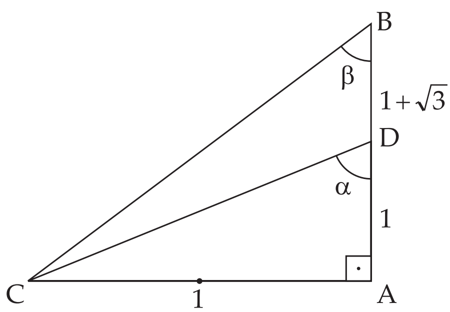
$y = 0 \cdot cos\ a - 0 \cdot sen\ a = 0$

Resposta: $y = 0$

06. (Fuvest-SP)

No triângulo retângulo *ABC*, os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem $2 + \sqrt{3}$ e 1, respectivamente. Seja *D* um ponto de $\overline{AB}$ tal que $AD = AC$. Calcule tg $(\alpha + \beta)$, em que α e β são respectivamente as medidas de $A\hat{D}C$ e $A\hat{B}C$.

Resolução



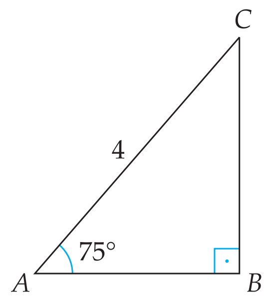
$$tg\,\alpha = \frac{1}{1} = 1 \qquad tg\,\beta = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{1+\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}}{1-1\cdot\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}} = \frac{\dfrac{3+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}{\dfrac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Resposta: $\sqrt{3}$

07. Calcule a área do triângulo abaixo.



Resolução

$$Área = \frac{AB \times BC}{2}$$

$$sen\ 75° = \frac{BC}{4}$$

$BC = 4 \cdot sen\ 75°$

$BC = 4 \cdot sen\ (30° + 45°)$

$BC = 4(sen\ 30° \cdot cos\ 45° + sen\ 45° \cdot cos\ 30°)$

$$BC = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$BC = \sqrt{2} + \sqrt{6}$

$$cos\ 75° = \frac{AB}{4}$$

$AB = 4 \cdot cos\ 75°$

$AB = 4 \cdot cos\ (45° + 30°)$

$AB = 4 \cdot (cos\ 45° \cdot cos\ 30° - sen\ 45° \cdot sen\ 30°)$

$$AB = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$AB = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

$$Área = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Resposta: *Área = 2 u.a.*

4. Arco Duplo

Para deduzirmos seno, co-seno e tangente para o dobro de um arco, utilizaremos as expressões deduzidas para a soma de arcos, fazendo, simplesmente, b = a.

Assim, teremos:

$\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,(a + a) = \text{sen}\,2a \Rightarrow$

$\text{sen}\,2a = \text{sen}\,a \cdot \cos a + \text{sen}\,a \cdot \cos a \Rightarrow$

$$\boxed{\text{sen}\,2a = 2\,\text{sen}\,a \cdot \cos a}$$

$\cos (a + b) = \cos (a + a) = \cos 2a \Rightarrow$

$\cos 2a = \cos a \cdot \cos a - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,a \Rightarrow$

$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2\,a}$$

$\text{tg}\,(a + b) = \text{tg}\,(a + a) = \text{tg}\,2a \Rightarrow$

$$\text{tg}\,2a = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,a}{1 - \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,a}$$

$$\boxed{\text{tg}\,2a = \frac{2\,\text{tg}\,a}{1 - \text{tg}^2\,a}}$$

Resumindo, as expressões que definem seno, co-seno e tangente de um arco duplo são:

1) $\text{sen}\,2a = 2\,\text{sen}\,a \cdot \cos a$

2) $\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2\,a$

3) $\text{tg}\,2a = \dfrac{2\,\text{tg}\,a}{1 - \text{tg}^2 a}\ [\cos 2a \neq 0]$

Observação

Lembrando que $\text{sen}^2\,a + \cos^2 a = 1$, a expressão de número dois pode assumir outras formas.

1) $\cos^2 a = 1 - \text{sen}^2\,a$ e

$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$

Então:

$$\boxed{\cos 2a = 1 - 2\,\text{sen}^2\,a}$$

2) $\text{sen}^2\,a = 1 - \cos^2 a$ e

$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2\,a$

Então:

$$\boxed{\cos 2a = 2\cos^2 a - 1}$$

Exercícios Resolvidos

01. Sabendo-se que um ângulo θ tal que $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ tem seno igual a 0,6, determinar os valores de seno, co-seno e tangente de 2θ.

Resolução

Conhecido sen θ = 0,6, e uma vez que θ é agudo, poderemos calcular cos θ e tg θ através das seguintes identidades:

- $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow$

  $0{,}36 + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow$

  $\cos^2\theta = 0{,}64\ \therefore\ \cos\theta = 0{,}8$

- $\text{tg}\,\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \Rightarrow$

  $\text{tg}\,\theta = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} \Rightarrow \text{tg}\,\theta = 0{,}75$

Utilizando as expressões que deduzimos para o dobro de um ângulo, teremos:

- $\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta = 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 \Rightarrow$

  $\text{sen}\,2\theta = \boxed{0{,}96}$

- $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta \Rightarrow$

  $\cos 2\theta = 0{,}64 - 0{,}36 \Rightarrow$

  $\boxed{\cos 2\theta = 0{,}28}$

- $\text{tg}\,2\theta = \dfrac{2\,\text{tg}\,\theta}{1 - \text{tg}^2\,\theta} \Rightarrow$

  $\text{tg}\,2\theta = \dfrac{2 \cdot 0{,}75}{1 - 0{,}5625} = \dfrac{1{,}5}{0{,}4375} \Rightarrow$

  $\text{tg}\,2\theta \cong 3{,}43$

02. Sendo sen x – cos x = k, determinar sen2x em função de k.

Resolução

Elevando ao quadrado ambos os membros da expressão dada, obtemos:

$$(\text{sen}\,x - \cos x)^2 = k^2 \Rightarrow$$

$$\text{sen}^2\,x - 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x + \cos^2 x = k^2$$

Como $\text{sen}^2\,x + \cos^2 x = 1$*, podemos reescrever a igualdade acima como:*

$$1 - 2\ sen\ x \cdot cos\ x = k^2 \Rightarrow$$

$$-\ sen\ 2x = k^2 - 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{sen\ 2x = 1 - k^2}$$

03. (FGV-SP) Resolva as seguintes equações trigonométricas:

a) $\text{sen } x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, em que $0 \leq x \leq 2\pi$

b) sen x = cos 2x, em que $0 \leq x \leq 2\pi$

Resolução

Para $0 \leq x \leq 2\pi$

a) $sen\,x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ *ou*

$x = \dfrac{3\pi}{4} \rightarrow V = \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right\}$

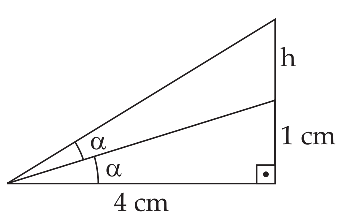
b) $sen\ x = cos\ 2x \Leftrightarrow sen\ x = 1 - 2\ sen^2\ x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\,sen^2 x + sen\,x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} sen\,x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2} \\ ou \\ sen\,x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}\ \ ou\ \ x = \dfrac{5\pi}{6} \end{array} \right.$$

$$V = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

04. Obter a medida *h* da figura.



Resolução

$$tg(2\alpha) = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$tg(2\alpha) = \frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{h+1}{4} = \frac{8}{15} \rightarrow h = \frac{17}{15}$$

5. Transformação em Produto

Em muitas ocasiões, é útil transformar somas algébricas do tipo sen p + sen q , sen p – sen q, cos p + cos q em produtos. Para tanto, retomamos as seguintes fórmulas de adição e subtração:

sen (A + B) = sen A · cos B + sen B · cos A (I)

sen (A – B) = sen A · cos B – sen B · cos A (II)

cos (A + B) = cos A · cos B – sen A · sen B (III)

cos (A – B) = cos A · cos B + sen A · sen B (IV)

Então temos:

I + II:

sen (A + B) + sen (A – B) = 2 sen A · cos B

I – II:

sen (A + B) – sen (A – B) = 2 sen B · cos A

III + IV:

cos (A + B) + cos (A – B) = 2 cos A · sen B

III – IV:

cos (A + B) – cos (A – B) = –2 sen A · cos B

Vamos considerar, agora:

$$\begin{cases} A + B = p \\ A - B = q \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, encontramos:

$$A = \frac{p+q}{2} \text{ e } B = \frac{p-q}{2}$$

Substituindo nas quatro igualdades obtidas, encontramos:

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2\operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

que são as fórmulas de fatoração.

Exemplo

Fatorar:

a) sen 40º + sen 20º

b) sen 20º – sen 10º

c) cos 80º + cos 20º

d) cos 70º – cos 50º

e) cos 50º + sen 80º

f) 1 + cos 20º

Resolução

a) sen 40º + sen 20º =

$$= 2\operatorname{sen}\left(\frac{40^\circ+20^\circ}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{40^\circ-20^\circ}{2}\right)\Rightarrow$$

sen 40º + sen 20º = 2 sen 30º · cos 10º

b) sen 20º – sen 10º =

$$= 2\operatorname{sen}\left(\frac{20^\circ-10^\circ}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{20^\circ+10^\circ}{2}\right)\Rightarrow$$

sen 20º – sen 10º = 2 sen 5º · cos 15º

c) cos 80º + cos 20º =

$$= 2\cos\left(\frac{80^\circ+20^\circ}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{80^\circ-20^\circ}{2}\right)\Rightarrow$$

cos 80º + cos 20º = 2 cos 50º · cos 30º

d) cos 70º – cos 50º =

$$= -2\operatorname{sen}\left(\frac{70^\circ+50^\circ}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{70^\circ-50^\circ}{2}\right)\Rightarrow$$

cos 70º – cos 50º = –2 sen 60º · sen 10º

e) cos 50º + sen 80º =

= cos 50º + cos 10º =

$$= 2\cos\left(\frac{50^\circ+10^\circ}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{50^\circ-10^\circ}{2}\right)\Rightarrow$$

∴ cos 50º + sen 80º = 2 cos 30º · cos 20º

f) 1 + cos 20º = cos 0º + cos 20º =

$$= 2\cos\left(\frac{0^\circ+20^\circ}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{0-20^\circ}{2}\right)\Rightarrow$$

cos 0º + cos 20º = 2 cos 10º · cos(–10º)

mas cos(–10º) = cos 10º

Assim: 1 + cos 20º = 2 cos² 10º

Exercícios Resolvidos

01. Simplificar a expressão.

$$E = \frac{\operatorname{sen} 40^\circ + \operatorname{sen} 10^\circ}{\cos 15^\circ}$$

Resolução

$$E = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{40^\circ+10^\circ}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{40^\circ-10^\circ}{2}\right)}{\cos 15^\circ}$$

$$E = \frac{2\operatorname{sen} 25^\circ\cdot\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}$$

$$\boxed{E = 2\operatorname{sen} 25^\circ}$$

02. Fatorar a expressão.

y = sen a + 2sen 2a + sen 3a

Resolução

$y = \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3a + 2\operatorname{sen} 2a$

$$y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{a+3a}{2}\right)\cos\left(\frac{a-3a}{2}\right) + 2\operatorname{sen} 2a$$

$y = 2\operatorname{sen} 2a\cdot\cos(-a) + 2\operatorname{sen} 2a$

como cos (–a) = cos a, temos:

$y = 2\operatorname{sen} 2a\,(\cos a + 1)$

$y = 2\operatorname{sen} 2a\,(\cos a + \cos 0)$

$$y = 2\operatorname{sen} 2a\left(2\cdot\cos\left(\frac{a+0}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-0}{2}\right)\right.$$

$$\boxed{y = 4\,sen\,2a \cdot cos^2 \frac{a}{2}}$$

03. (FEI-SP)

Simplificando-se $\dfrac{\cos x - \cos(5x)}{\text{sen}(5x) - \text{sen}x}$, tem se:

a) tg x
b) sen x
c) cos x
d) tg 3x
e) nra

Resolução

$$\frac{\cos\, x - \cos(5x)}{sen(5x) - sen\,x} = \frac{-2sen\left(\frac{x+5x}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{x-5x}{2}\right)}{2sen\left(\frac{5x-x}{2}\right)\cdot \cos\left(\frac{5x+x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{-\text{sen}(3x)\cdot\text{sen}(-2x)}{\text{sen}(2x)\cdot\cos(3x)} = \frac{-\text{sen}3x\cdot -\cancel{\text{sen}2x}}{\cancel{\text{sen}2x}\cdot\cos 3x} =$$

$$= \frac{\text{sen}3x}{\cos 3x} = \text{tg}(3x)$$

Resposta: *D*

04. (PUC-SP) Transformando-se em produto a expressão sen 70º + cos 30º, obtém-se:

a) 2 cos 25º cos 5º
b) 2 sen 25º sen 5º
c) 2 sen 25º cos 5º
d) 2 cos 25º sen 5º
e) nra

Resolução

sen 70º = cos 20º, logo:

sen 70º + cos 30º = cos 20º + cos 30º =

$$2cos\left(\frac{20^o + 30^o}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{20^o - 30^o}{2}\right)$$

$$2cos\,25^o \cdot cos(-5)$$

Mas cos (–5) = cos 5, logo:

sen 70º + cos 30º = 2 cos 25º · cos 5º

Resposta: *A*

05. Transformar em produto a expressão abaixo.

$y = \text{sen}^2\, x - \text{sen}^2\, 3x$

Resolução

$y = (sen\ x + sen\ 3x) \cdot (sen\ x - sen\ 3x)$

$$y = 2sen\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x-3x}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot 2\cdot sen\left(\frac{x-3x}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x+3x}{2}\right)$$

$y = 2\ sen\ 2x \cdot cos\ (-x) \cdot 2\ sen\ (-x) \cdot cos\ 2x$

$y = [2\ sen\ 2x \cdot cos\ 2x]\ [2\ sen\ (-x) \cdot cos\ (-x)]$

$y = sen\ 4x \cdot sen\ (-2x)$

como sen (–2x) = – sen (2x), temos:

$$\boxed{y = -\ sen\ 4x \cdot sen\ 2x}$$

Capítulo 05. Trigonometria dos Números Reais

1. Introdução

Já foi visto que, para cada número real $2\pi < x < 2\pi$, podemos associar um ponto do ciclo trigonométrico. No entanto, neste capítulo, ampliaremos esta correspondência para todos os números reais, rompendo a barreira da primeira volta.

Desta forma, sendo x um número real tal que $x \geq 2\pi$ ou $x \leq -2\pi$, para associarmos a x um ponto P do ciclo trigonométrico, tomamos um arco de medida $|x|$ radianos, a partir da origem A, no sentido anti-horário ou horário, conforme $x > 0$ ou $x < 0$, respectivamente.

O ponto P encontrado é chamado extremidade de x no ciclo trigonométrico, e as coordenadas de P são dadas por (cos x, sen x).

Com a associação de um número real x, com um ponto P do ciclo trigonométrico, podemos fazer as seguintes definições:

Cos x = abscissa de P

Sen x = ordenada de P

$$\text{Tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}, \text{ desde que } \cos x \neq 0$$

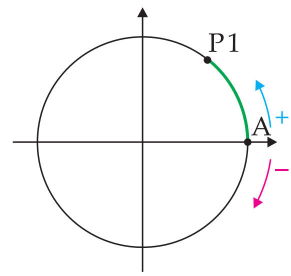
$$\text{Cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}, \text{ desde que sen } x \neq 0$$

$$\text{Sec } x = \frac{1}{\cos x}, \text{ desde que } \cos x \neq 0$$

$$\text{Cosec } x = \frac{1}{\text{sen } x}, \text{ desde que sen } x \neq 0$$

A cada número real x associamos um único ponto do ciclo trigonométrico; no entanto, a cada ponto do ciclo trigonométrico, podemos associar infinitos números reais, que chamamos de determinações de cada ponto.

Exemplo



1º) Ao número real 1 associamos o ponto P do ciclo trigonométrico.

2º) Ao ponto P, associamos os números reais:

1 = 1ª determinação positiva

$1 + 2\pi$ = 2ª determinação positiva

$1 + 4\pi$ = 3ª determinação positiva

$1 + 6\pi$ = 4ª determinação positiva

$1 - 2\pi$ = 1ª determinação negativa

$1 - 4\pi$ = 2ª determinação negativa

$1 - 6\pi$ = 3ª determinação negativa

----

2. O Arco Trigonométrico

Sendo a_0 a medida de um arco $\overset{\frown}{AP}$ **em radianos**, tal que $0 \leq a_0 < 2\pi$, dizemos que a_0 é a primeira determinação positiva de P.

Chamamos de **arco trigonométrico** ao conjunto dos números **a** do tipo:

$$a = a_0 + K \cdot \underbrace{2\pi}_{1 \text{ volta}}, \text{ onde } K \in \mathbb{Z}$$

Assim:

$k = 0 \Rightarrow a = a_0$ (primeira determinação positiva de P)

$k = 1 \Rightarrow a = a_0 + 2\pi$ (segunda determinação positiva de P)

$k = 2 \Rightarrow a = a_0 + 4\pi$ (terceira determinação positiva de P)

$k = -1 \Rightarrow a = a_0 - 2\pi$ (primeira determinação negativa de P)

$k = -2 \Rightarrow a = a_0 - 4\pi$ (segunda determinação negativa de P)

Sendo a_0 a medida de um arco $\overset{\frown}{AP}$ **em graus**, tal que $0° \leq a_0 < 360°$, dizemos que a_0 é a primeira determinação positiva de P.

Chamamos de arco trigonométrico ao conjunto de números **a** do tipo:

$$\boxed{a = a_0 + K \cdot \underbrace{360°}_{1\text{ vista}}, \text{ onde } K \in Z}$$

$k = 0 \Rightarrow a = a_0$ (primeira determinação positiva de P)

$k = 1 \Rightarrow a = a_0 + 360°$ (segunda determinação positiva de P)

$k = 2 \Rightarrow a = a_0 + 720°$ (terceira determinação positiva de P)

$k = -1 \Rightarrow a = a_0 - 360°$ (primeira determinação negativa de P)

$k = -2 \Rightarrow a = a_0 - 720°$ (segunda determinação negativa de P)

Dado um número **a**, sabemos que ele é uma determinação de um ponto P do ciclo trigonométrico; para encontrarmos o ponto **P**, devemos inicialmente descobrir o número de voltas contido em **a** e, assim, achamos a primeira determinação de P.

Exemplos

1. 980°

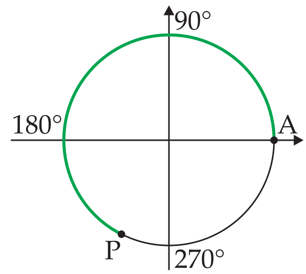
Cada volta do ciclo tem 360°, então:

$$\begin{array}{l|l} 980° & 360° \\ \hline 260° & 2 \end{array} \qquad 980° = 260° + 2 \cdot 360°$$

980° = 3ª determ. positiva de um ponto P.

260° = 1ª determ. positiva de P.

P ∈ 3º quadrante.



2. $\dfrac{27\pi}{4}$ rad

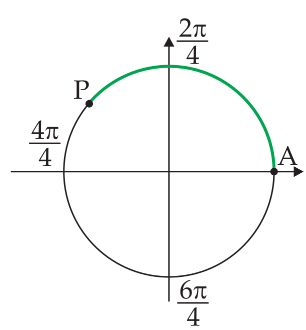
Cada volta do ciclo tem 2π rad $= \dfrac{8\pi}{4}$ rad, então:

$$\begin{array}{l|l} 27 & 8 \\ \hline 3 & 3 \end{array} \qquad \frac{27\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 3 \cdot \frac{8\pi}{4}$$

$\dfrac{27\pi}{4}$ rad = 4ª determinação positiva de um ponto P.

$\dfrac{3\pi}{4}$ rad = 1ª determinação positiva de P.

P ∈ 2ª quadrante.



3. – 2000°

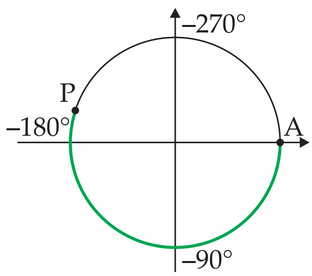
Cada volta do ciclo tem 360°

$$\begin{array}{l|l} 2000 & 360 \\ \hline 200 & 5 \end{array} \qquad -2000° = -200° - 5 \cdot 360°$$

– 2000° = 6ª determinação negativa de um ponto P.

$-200° = 1^a$ determinação negativa de P.

$P \in 2^o$ quadrante



4. $-\dfrac{20\pi}{3}$ rad

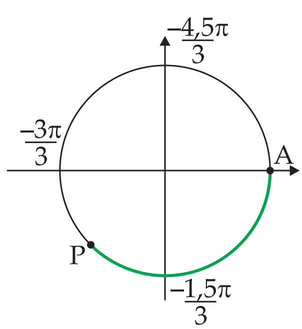
Cada volta do ciclo tem $2\pi \text{ rad} = \dfrac{6\pi}{3} \text{ rad}$.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 6 \\ \hline 2 & 3 \end{array} \qquad -\frac{20\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} - 3 \cdot \frac{6\pi}{3}$$

$-\dfrac{20\pi}{3} = 4^a$ determ. negativa de um ponto P.

$-\dfrac{2\pi}{3} = 1^a$ determ. negativa de P.

$P \in 3^o$ quadrante.

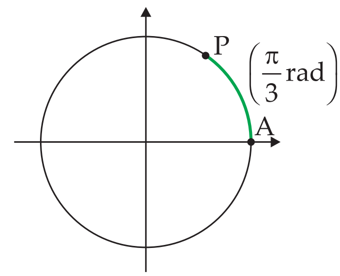


Observações

1) Sendo x_0 um número real, tal que $0 \le x_0 < 2\pi$, dizemos que $x = x_0 + k \cdot 2\pi$, $k \in Z$, é **expressão geral** dos reais associados a um ponto P (extremidade de x_0) do ciclo trigonométrico.

Exemplo

Os números reais associados ao ponto P da figura podem ser expressos por:



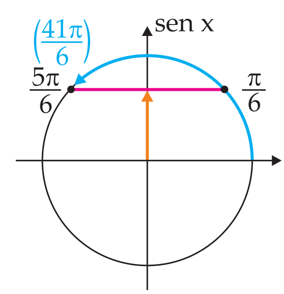
$$\boxed{x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi}$$

2) Quanto temos que calcular uma razão trigonométrica de um número real (arco medido em radianos) maior que 2π ou menor que -2π, devemos inicialmente descobrir a primeira determinação do ponto associado ao número real.

Exemplos

1. Calcular $\operatorname{sen} \dfrac{41\pi}{6}$

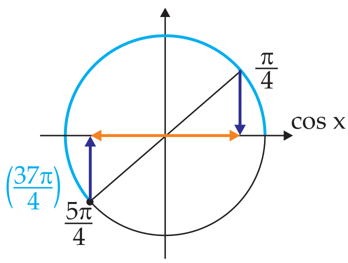
$$\begin{array}{r|l} 41 & 12 \\ \hline 5 & 3 \end{array} \qquad \frac{41\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 3 \cdot \frac{12\pi}{6}$$



$$\operatorname{sen} \frac{41\pi}{6} = \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

2. Calcular $\cos\dfrac{37\pi}{4}$

$$\begin{array}{r|l} 37 & 8 \\ \hline 5 & 4 \end{array} \qquad \frac{37\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 4 \cdot \frac{8\pi}{4}$$

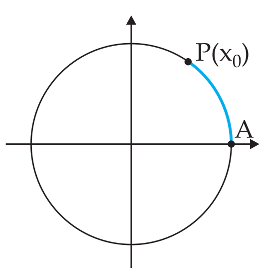


$$\cos\frac{37\pi}{4} = \cos\frac{5\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Expressões gerais

3.1. Expressão Geral dos Reais Associados a um Ponto

Seja o número real x_0 uma primeira determinação (positiva ou negativa) de um ponto P do ciclo trigonométrico.



As outras determinações de P são:

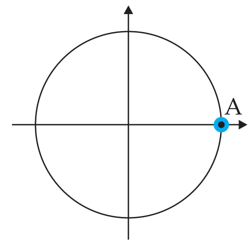
$$\ldots, x_0 - 4\pi, x_0 - 2\pi, x_0, x_0 + 2\pi, x_0 + 4\pi, \ldots$$

Para representarmos todos os termos da progressão aritmética, de razão 2π, formada pelas determinações de P, usamos a expressão:

$$\boxed{x = x_0 + k \cdot 2\pi; k \in Z}$$

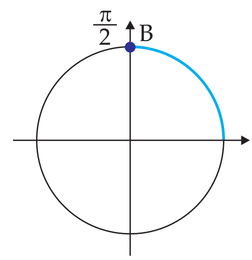
Exemplos

1. Expressão geral dos reais associados ao ponto A:



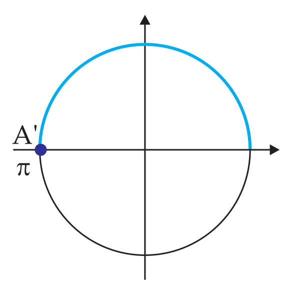
$$\boxed{x = 0 + k \cdot 2\pi, k \cdot \in Z}$$

2. Expressão geral dos reais associados ao ponto B:



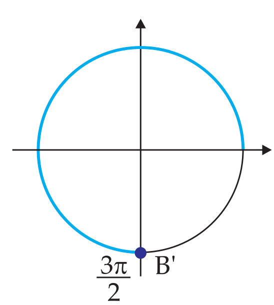
$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in Z}$$

3. Expressão geral dos reais associados ao ponto A':



$$\boxed{x = \pi + k \cdot 2\pi, k \in Z}$$

4. Expressão geral dos reais associados ao ponto B':



$$x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in Z$$

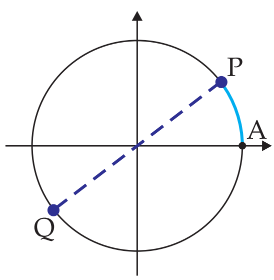
Observação

Também poderia ser

$$x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in Z$$

3.2. Expressão Geral dos Reais Associados a Extremidades de um Diâmetro

Seja o número real x_0, uma primeira determinação (positiva ou negativa) do ponto P ou do ponto Q, extremidades de um diâmetro do ciclo trigonométrico.



As determinações de P ou Q são dadas por:

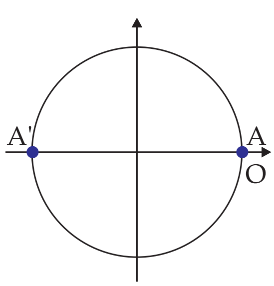
$$\dots, x_0 - 3\pi, x_0 - 2\pi, x_0 - \pi, x_0, x_0 + 2\pi, x_0 + 3\pi, \dots$$

Para representarmos todos os termos da progressão aritmética, de razão π, formada pelas determinações de P ou Q, usamos a expressão:

$$x = x_0 + k \cdot \pi, k \in Z$$

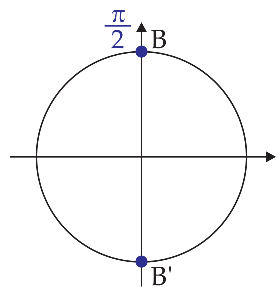
Exemplos

1. Expressão geral dos reais associados aos pontos A ou A′:



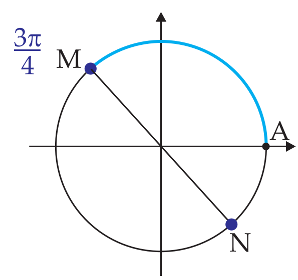
$$x = 0 + k \cdot \pi, k \in Z$$

2. Expressão geral dos reais associados aos pontos B ou B′:



$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in Z$$

3. Expressão geral dos reais associados aos pontos M ou N, sabendo que AM tem medida $\frac{3\pi}{4}$ rad.



$$x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi, k \in Z$$

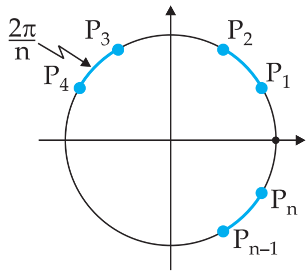
Observação

Também poderia ser $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

3.3. Expressão Geral dos Reais Associados a Pontos que Dividem a Circunferência em Partes Iguais

Consideremos os pontos P_1, P_2, P_3, ..., P_n que dividem o ciclo trigonométrico em n partes iguais.

Seja o número real x_0 uma primeira determinação (positiva ou negativa) de um dos n pontos considerados.



As determinações dos pontos são:

$$\ldots x_0 - 3\cdot\frac{2\pi}{n}, x_0 - 2\cdot\frac{2\pi}{n}, x_0 - \frac{2\pi}{n}, x_0,$$

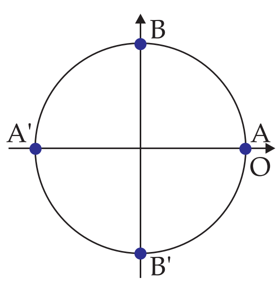
$$x_0 + \frac{2\pi}{n}, x_0 + 2\cdot\frac{2\pi}{n}, x_0 + 3\cdot\frac{2\pi}{n}, \ldots$$

Para representarmos todos os termos da progressão aritmética, de razão $\frac{2\pi}{n}$, formada pelas determinações dos pontos, usamos a expressão:

$$\boxed{x = x_0 + k\cdot\frac{2\pi}{n}, k \in Z}$$

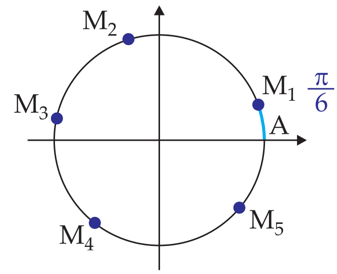
Exemplos

1. Expressão geral dos reais associados aos pontos A, B, A′ ou B′:



$$\boxed{x = 0 + k\cdot\frac{2\pi}{4}, k \in Z}$$

2. Expressão geral dos reais associados aos pontos M_1, M_2, M_3, M_4 ou M_5, vértices de um pentágono regular, sabendo que AM_1 tem medida $\frac{\pi}{6}$ rad:



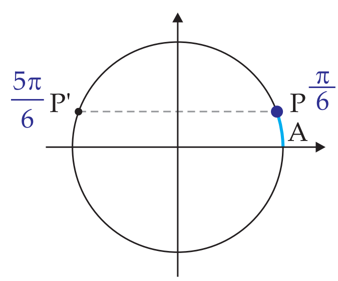
$$\boxed{x = \frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{2\pi}{5}, k \in Z}$$

Observação

Existem outras expressões gerais que podem ser utilizadas, no entanto preferimos ignorá-las, substituindo-as por uma união de expressões aqui representadas.

Exemplo

Expressão geral dos reais associados aos pontos P e P′, aritméticos em relação ao eixo dos senos, sabendo que AP tem medida $\frac{\pi}{6}$ rad.



Poderia ser usada a expressão:

$$x = \frac{\pi}{6} + (-1)^k\,\frac{\pi}{6}, k \in Z$$

No entanto, usamos:

$$x = \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi, k \in Z$$

Exercícios Resolvidos

01. Dê a primeira determinação positiva dos arcos

a) 1200°

b) –1020°

c) $\dfrac{37\pi}{3}$

Resolução

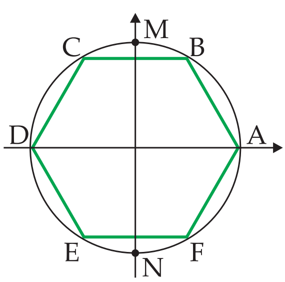
a) $1\,200° \,\underline{|\,360°}$ $\Rightarrow$ *1ª determinação positiva: 120°*
$\quad 120° \quad 3$

b) $-1\,200° \,\underline{|\,360°}$ $\Rightarrow -300° + 360° = 60°$;
$\quad -300° \quad -2$
1ª determinação positiva: 60°

c) $\dfrac{37\pi}{3} \,\underline{|\,2\pi} \Rightarrow \dfrac{37\pi}{3} \,\underline{|\,\dfrac{6\pi}{3}}$
$\quad \pi/3 \quad 6$

1ª determinação positiva: $\pi/3$

02. Considerando a figura abaixo (ABCDEF é um hexágono regular),



dar a expressão geral dos reais associados aos pontos:

a) A

Resolução $(k \in Z): k \cdot 2\pi$

b) M

Resolução $(k \in Z): \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$

c) C

Resolução $(k \in Z): \dfrac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$

d) A ou D

Resolução $(k \in Z): k\pi$

e) B ou E

Resolução $(k \in Z): \dfrac{\pi}{3} + k\pi$

f) B ou F

Resolução $(k \in Z): \pm\dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$

g) A ou M ou D ou N

Resolução $(k \in Z): \dfrac{k\pi}{2}$

h) A ou B ou C ou D ou E ou F

Resolução $(k \in Z): \dfrac{k\pi}{3}$

02. O número de elementos do conjunto

$$A = \left\{x \,/\, x = \text{sen}\,\frac{k\pi}{6}, k \in Z\right\} \text{ é}$$

a) 6

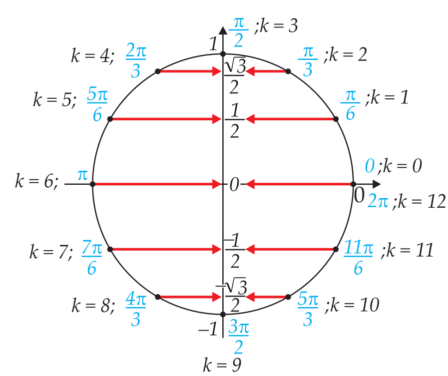
b) 7

c) 8

d) 9

e) 10

Resolução



$$A = \left\{-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right\}$$

Resposta: B

03. Se $a = 840°$ e $b = \dfrac{28\pi}{3}$, calcular:

a) sen (a + b)

b) tg (a – b)

Resolução

$$\begin{array}{l|l} 840° & 360° \\ \hline 120° & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} \frac{28\pi}{3} & \frac{6\pi}{3} \\ \hline \frac{4\pi}{3} & 4 \end{array} \qquad \frac{4\pi}{3} = 240°$$

a) sen (a + b) = sen (120° + 240°) = sen 360° = = sen 0° = 0

b) tg (a – b) = tg (120° – 240°) = tg (–120°) = = tg 240° = tg 60° = $\sqrt{3}$

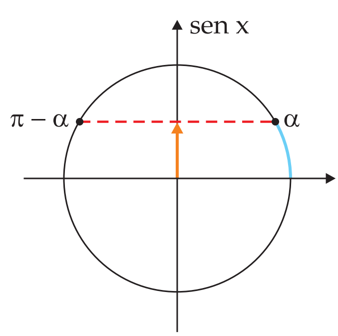
4. Equações Trigonométricas com Solução em R

4.1 Introdução

Já estudamos equações trigonométricas buscando as soluções na primeira volta do ciclo trigonométrico. Agora que sabemos representar todos os números reais associados a um ou mais pontos do ciclo trigonométrico, podemos ampliar o universo das equações para todo o conjunto R.

4.2. Equação da Forma sen x = sen α

Os números x e α apresentam o mesmo seno se, e somente se, suas imagens no ciclo trigonométrico são coincidentes ou simétricas em relação ao eixo das ordenadas.



Dessa forma, concluímos:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k\cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + k\cdot 2\pi,\ k\in Z \end{cases}$$

Exemplos

1. Resolver em R: sen 3x = $\frac{1}{2}$

Resolução

$$\operatorname{sen}3x = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}3x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$$

Então:

$$3x = \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi$$

ou

$$3x = \pi - \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi$$

Assim:

$$x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\cdot 2\pi}{3}$$

ou

$$x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}, k \in Z$$

2. Resolver em R: sen 8x = sen 4x

Resolução

$8x = 4x + k \cdot 2\pi$

ou

$8x = \pi - 4x + k \cdot 2\pi$

Assim:

$$x = k\cdot\frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{12} + k\cdot\frac{\pi}{6}$$

3. Resolver para $0 \le x < 2\pi$: sen 2x = sen x

Resolução:

$2x = x + k \cdot 2\pi \Rightarrow x = k \cdot 2\pi$ (I)

ou

$$2x = \pi - x + k\cdot 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\cdot\frac{2\pi}{3} \text{ (II)}$$

Fazendo k = ...,–1, 0, 1, 2, ... na expressão (I), temos:

x = ..., –2π, 0, 2π, 4π, ...

Fazendo k = ..., –1, 0, 1, 2, 3, ... na expressão (II), temos:

$$x = \ldots, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \ldots$$

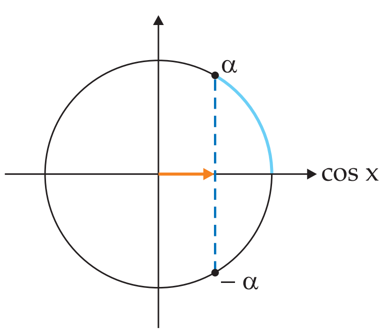
Buscando as soluções no intervalo $0 \le x < 2\pi$ temos:

$$S = \{0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\}$$

Observação:
No exemplo, embora o universo da equação seja restrito à **1ª volta**, para encontrarmos **todas as soluções** precisamos achar **inicialmente a solução geral em R.**

4.3. Equação da Forma cos x = cos α

Os números x e α apresentam o mesmo co-seno se, e somente se, suas imagens no ciclo trigonométrico são coincidentes ou simétricas em relação ao eixo das abscissas.



Dessa forma, concluímos:

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k\cdot 2\pi, k \in Z$$

Exemplos

1. Resolver em R: 2 cos (3x) + 1 = 0

Resolução

$$2\cos(3x) + 1 = 0 \Rightarrow \cos(3x) = -\frac{1}{2}$$

como $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, podemos escrever:

$$\cos(3x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

Assim:

$$3x = \pm\frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi \Rightarrow x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{k\cdot 2\pi}{3}$$

$$S = \{x \in R \,/\, x = \pm\frac{2\pi}{3} + \frac{k\cdot 2\pi}{3}, k \in Z\}$$

2. Resolver em R: cos (3x) = sen (2x)

Resolução

Como sen (2x) = cos $\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$, podemos escrever:

$$\cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

Assim:

$$3x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + k\cdot 2\pi$$

ou seja:

$$3x = \frac{\pi}{2} - 2x + k\cdot 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{10} + k\cdot\frac{2\pi}{5}$$

ou

$$3x = -\frac{\pi}{2} + 2x + k\cdot 2\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi$$

$$S = \{x \in R \,/\, x = \frac{\pi}{10} + k\cdot\frac{2\pi}{5} \text{ ou}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi, k \in Z\}$$

3. Resolver em R: cos (3x) + sen x = 0

Resolução

cos (3x) + sen x = 0 ⇒ cos (3x) = –sen x

Lembrando que sen (–x) = –sen x, temos:

cos (3x) = sen (–x)

No entanto: $\text{sen}(-x) = \cos[\frac{\pi}{2} - (-x)] =$

$$= \cos[\frac{\pi}{2} + x]$$

Assim, podemos escrever:

$$\cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

Então:

$$3x = \pm\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + k \cdot 2\pi$$

ou seja:

$$3x = \frac{\pi}{2} + x + k \cdot 2\pi \Rightarrow x\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$$

ou

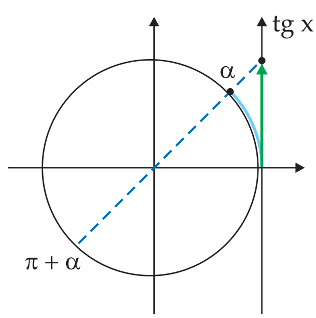
$$3x = -\frac{\pi}{2} - x + k \cdot 2\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$$

$$S = \{x \in R \,/\, x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou}$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z\}$$

4.4. Equação da Forma tg x = tg α

Os números x e α apresentam mesma tangente se, e somente se, suas imagens no ciclo trigonométrico são coincidentes ou simétricas em relação à origem dos eixos coordenados (diametralmente opostas).



Dessa forma, concluímos:
tg x = tg $\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\,\pi,\ k \in Z$

Exemplos

1. Resolver em R: $\text{tg}(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Resolução

Como $\text{tg}\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, podemos escrever:

$$tg(2x) = \text{tg}\left(\frac{5\pi}{6}\right), \text{ então:}$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$$

$$S = \{x \in R \,/\, x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z$$

2. Resolver em R: tg (x) – tg $\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

Resolução

$$\text{tg}\,(x) - \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \text{tg}(g) = \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Assim:

$$x = \frac{x}{2} + k\pi \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi$$

ou seja x = 2 k π

S = {x ∈ R/ x = 2 k π, k ∈ Z}

Exercícios Resolvidos

01. Cesgranrio-RJ
As soluções reais da equação

$$\text{sen}\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \text{ são:}$$

a) π/6 + 2kπ ou 5π/6 + 2kπ; k ∈ Z
b) π/2 + 2kπ ou 5π/6 + 2kπ; k ∈ Z
c) π/3 + 2kπ ou 5π/3 + 2kπ; k ∈ Z
d) π/12 + 2kπ ou 11π/12 + 2kπ; k ∈ Z
e) 5π/12 + 2kπ ou 7π/12 + 2kπ; k ∈ Z

Resolução

$$sen\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) = sen(\pi/6) \Rightarrow$$

$$2x - 5\pi/6 = \pi/6 + 2k\pi \text{ ou}$$

$$2x - \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 2x - \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$2x = \pi + 2k\pi \quad ou \quad 2x = \frac{10\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ou \quad x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$$

Resposta: *B*

02. UEL-PR

As soluções reais da equação $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ são:

a) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $\frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ com $k \in Z$

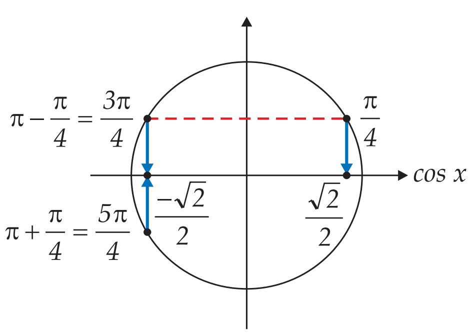
b) $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $\frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ com $k \in Z$

c) $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ com $k \in Z$

d) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ com $k \in Z$

e) $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ com $k \in Z$

Resolução



$$\cos x = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \quad ou \quad \cos x = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad ou \quad x = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ com } k \in Z$$

Resposta: *C*

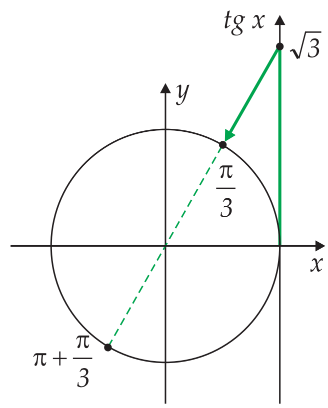
Obs.– Uma resposta bem mais elegante seria

$$x = \pm\frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi ; k \in Z$$

03. Resolver: $tg(3x) = \sqrt{3}$

Resolução

$tg\,(3x) = tg\,(\pi/3)$



$$3x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}$$

$$S = \{x \in R \,/\, x = \frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{\pi}{3} ; k \in Z\}$$

04. Mackenzie-SP

Dê a expressão geral dos arcos x para os quais 2 (cos x + sec x) = 5:

a) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

b) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

c) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

d) $k\pi + \frac{\pi}{6}$

e) n.r.a.

Resolução

$2\,(\cos x + \sec x) = 5$

$$2\left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right) = 5$$

$$2\left(\frac{\cos^2 x+1}{\cos x}\right)=5$$

2 cos²x – 5 cos x + 2 = 0

$\cos x = y \Rightarrow 2y^2 - 5y + 2 = 0$

$y = 2$ *ou* $y = 1/2$

$$\cos x=\frac{1}{2} \text{ ou } \cos x=2 \text{ (não convém)}$$

$$\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$S=\{x\in R \,/\, x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi \,/\, k\in Z\}$$

Resposta: *A*

05. Vunesp-SP

Uma equipe de agrônomos coletou dados da temperatura (em ºC) do solo em uma determinada região, durante três dias, a intervalos de 1 hora. A medição da temperatura começou a ser feita às três horas da manhã do primeiro dia (t = 0) e terminou 72 horas depois (t = 72). Os dados puderam ser aproximados pela função $H(t)=15+5\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{3\pi}{2}\right)$, em que t indica o tempo (em horas) decorrido após o início da observação e H(t) a temperatura (em ºC) no instante t.

a) Resolva a equação $\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{3\pi}{2}\right)=1$, para $t\in[0,24]$.

b) Determine a temperatura máxima atingida e o horário em que essa temperatura ocorreu no primeiro dia da observação.

Resolução

a) Temos:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{3\pi}{2}\right)=\text{sen}\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{12}t+\frac{3\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow t=24k-12; k\in Z.$$

Como $t\in[0,24]$, $V=\{12\}$.

b)Para o primeiro dia, o valor máximo da função $H(t)=15+5\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{3\pi}{2}\right), t\in N$*, ocorre quando* $\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{3\pi}{2}\right)=1\Rightarrow t=12.$

Assim, a temperatura máxima atingida foi de 15 + 5 · = 20 ºC e ocorreu às 3 + 12 = 15h.

06. PUC-SP

O conjunto solução da equação

sen (2x) + sen (2x – π/4) = 0 para 0 < x < π é:

a) $\left\{\frac{\pi}{16};\frac{9\pi}{16}\right\}$

b) $\varnothing$

c) $\left\{x\in R \,/\, x=\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{12}; k\in Z\right\}$

d) $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

e) $\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right\}$

Resolução

$$\text{sen}(2x)+\text{sen}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0\Rightarrow$$

$$\text{sen}(2x)=-\text{sen}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow \text{sen}(2x)=\text{sen}\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$2x=-2x+\frac{\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } 2x=\pi-\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi$$

$$4x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } 0x=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi \text{ (impossível)}$$

$$x=\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}$$

$k = 0 \Rightarrow x = \pi/16$

$k = 1 \Rightarrow x = 9\pi/16$

$k = 2 \Rightarrow x = 17\pi/16 > \pi \, (n.c.)$

$$S=\left\{\frac{\pi}{16},\frac{9\pi}{16}\right\}$$

Resposta: *A*

Capítulo 06. Inequações Trigonométricas

1. Inequações Trigonométricas na Primeira Volta

As inequações trigonométricas assemelham-se, em sua apresentação, às equações trigonométricas: envolvem a incógnita em razões como seno, co-seno e tangente, ou outras razões que podem facilmente ser expressas em função daquelas.

Porém, o que distingue uma inequações das equações é o comparecimento de desigualdades (< ou >) no estabelecimento das relações.

Estudaremos, a partir de agora, os casos principais de inequações trigonométricas, nos quais todas as demais poderão ser expressas após desenvolvimentos adequados.

1.1. Inequações do Tipo sen x < a ou sen x > a

Pelo valor a, no eixo das ordenadas (ou dos senos), pertencente ao intervalo [–1, 1], traçamos uma reta paralela ao eixo das abscissas (vide figura 1).

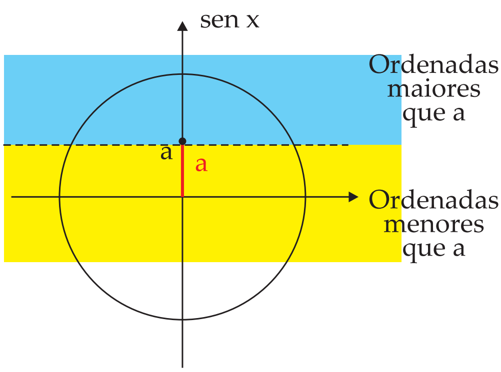


Fig. 1

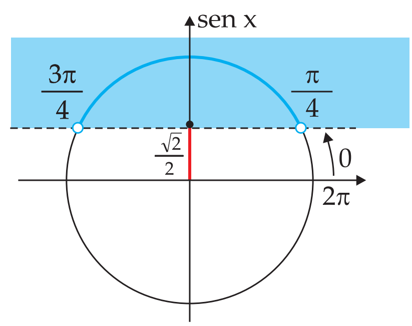
Após isso, destacamos os pontos do ciclo cujas ordenadas são maiores (ou menores, dependendo da inequação fornecida) que a.

A resposta é dada pelo(s) intervalo(s) de arcos definidos no ciclo, lido(s) no sentido anti-horário a partir da origem dos arcos.

Exemplos

1. Resolver a inequação $\operatorname{sen} x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, com $0 \leq x < 2\pi$.

Resolução



A partir das indicações feitas no ciclo, temos como solução o conjunto:

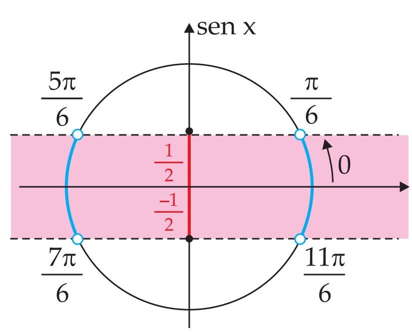
$$S = \left\{ x \in R \,/\, \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \right\}$$

2. Para $0 \leq x < 2\pi$, definir o conjunto solução da inequação $|\operatorname{sen} x| \leq \frac{1}{2}$.

Resolução

A inequação apresentada pode ser desenvolvida como mostramos a seguir:

$$|\operatorname{sen} x| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \operatorname{sen} x \leq \frac{1}{2}$$



A partir do ciclo ilustrado acima, podemos dizer que o conjunto solução da inequação enunciada é:

$$S = \{x \in R \,/\, 0 \le x \le \frac{\pi}{6} \text{ ou }$$

$$\frac{5\pi}{6} \le x \le \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} \le x < 2\pi\}$$

ou então:

$$S = [0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}] \cup [\frac{11\pi}{6}, 2\pi[$$

1.2. Inequações do Tipo cos x < a ou cos x > a

No eixo das abscissas (ou dos co-senos), localizamos o valor a ($a \in [-1, 1]$), e por ele traçamos uma reta paralela ao eixo das ordenadas, como apresentamos na figura 2.

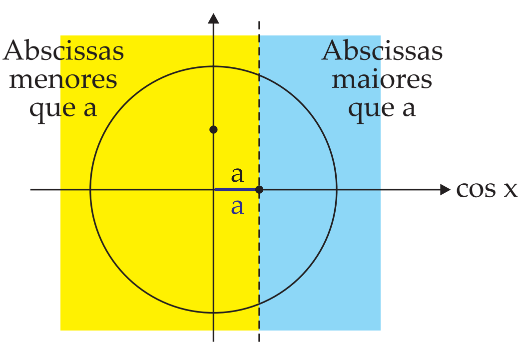


Fig. 2

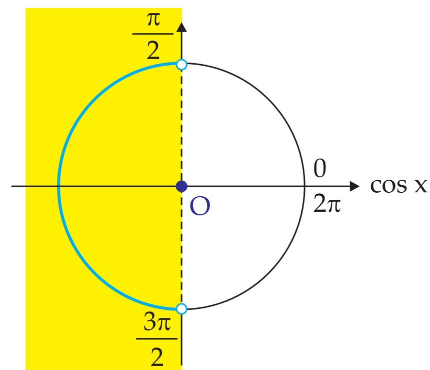
Em seguida, destacamos os pontos do ciclo cujas abscissas são maiores (ou menores) que a.

No sentido anti-horário, a partir da origem dos arcos, anotamos o(s) intervalo(s) que compreendem os pontos do ciclo que conformarão a resposta.

Exemplos

1. Para $0 \le x < 2\pi$, resolver a inequação $\cos x < 0$.

Resolução

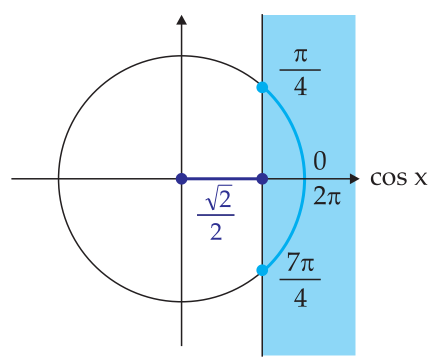


Do ciclo trigonométrico acima, obtemos o conjunto solução:

$$\boxed{S = [x \in R \,/\, \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}]}$$

2. Resolver $\cos x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$, sendo que $0 \le x < 2\pi$.

Resolução



Segundo o ciclo trigonométrico ilustrado acima, percorrendo os intervalos nele definidos no sentido anti-horário a partir da origem dos arcos, temos:

$$\boxed{S = \{x \in R \,/\, 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} \le x < 2\pi\}}$$

1.3. Inequações do Tipo tg x < a ou tg x > a

Identificamos, no eixo das tangentes, o ponto de ordenada a, conforme exibimos na figura 3.

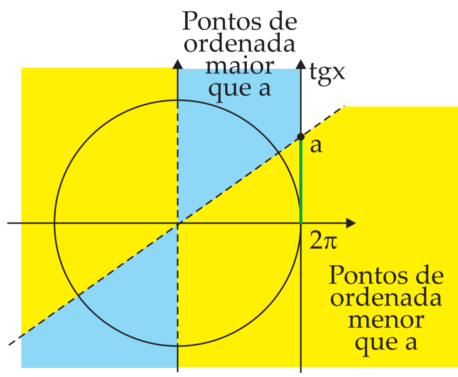


Fig. 3

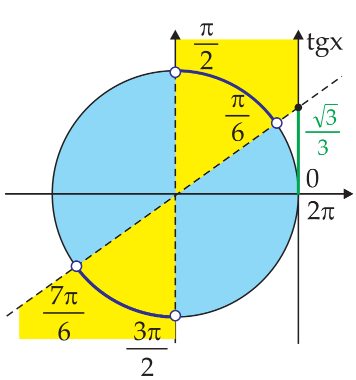
Em seguida, traçamos a reta que passa por esse ponto e pelo centro do ciclo trigonométrico, identificando, no ciclo, a região cujos pontos, ligados ao centro, determinam retas que interceptam o eixo das tangentes em valores maiores (ou menores) que **a**.

Após isso, sempre no sentido anti-horário a partir da origem dos arcos, anotamos o(s) intervalo(s) que formará(ão) a resposta.

Exemplos

1. Para $0 \leq x < 2\pi$, resolver $\text{tg } x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Resolução

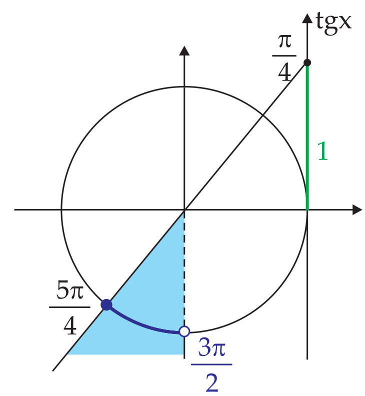


Conforme observamos no ciclo acima, temos:

$$S = \{x \in R \,/\, 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\}$$

2. Resolver $\text{tg } x \geq 1$, para $\pi < x < 2\pi$.

Resolução



Pelo que vemos nas indicações feitas no ciclo trigonométrico acima ilustrado, podemos dizer que:

$$S = \{x \in R \,/\, \frac{5\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{2}\}$$

3. Para arcos x tais que $0 \leq x < 2\pi$, resolver a inequação $\text{tg}^2 x - \sqrt{3} \cdot \text{tg } x < 0$.

Resolução

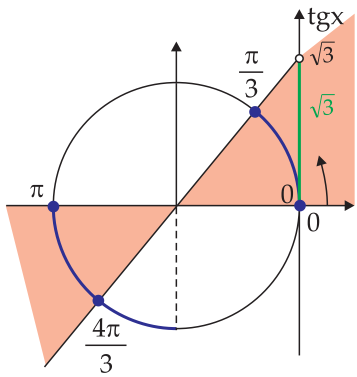
Fazendo $y = \text{tg } x$, podemos reescrever a inequação enunciada como:

$$y^2 - \sqrt{3} \cdot y < 0$$

A expressão de 2º grau $(y^2 - \sqrt{3} \cdot y)$ tem raízes dadas por $y = 0$ ou $y = \sqrt{3}$. Além disso, o coeficiente de y^2 é positivo. Portanto:

$$y^2 - \sqrt{3} \cdot y < 0 \Rightarrow 0 < y < \sqrt{3}$$

Uma vez que $y = \text{tg } x$, deveremos resolver a inequação $0 < \text{tg } x < \sqrt{3}$.



Conforme as indicações feitas na ilustração acima, temos como conjunto solução

$S = \{x \in R / 0 < x < \frac{\pi}{3}$

ou

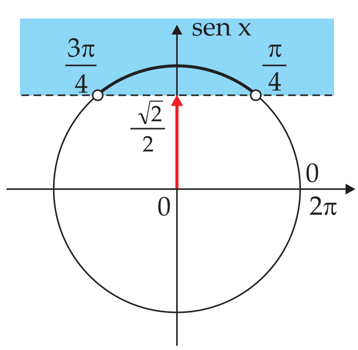
$\pi < x < \frac{4\pi}{3}\}$

2. Inequações Trigonométricas em R

Para resolver inequações trigonométricas em R, primeiro determinamos as soluções no intervalo [0; 2π] conforme foi visto, depois acrescentamos 2 kπ para incluir as demais soluções.

Exemplos:

1. Resolver $\text{sen } x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

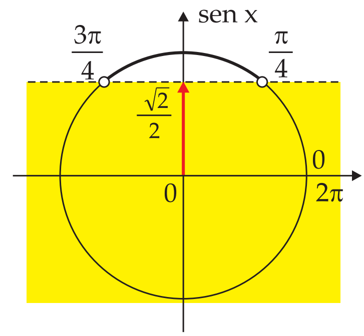


No intervalo [0; 2π] a solução é $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$.

A solução geral é:

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi\, x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z$$

2. Resolver $\text{sen } x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.



No intervalo [0; 2π] a solução é:

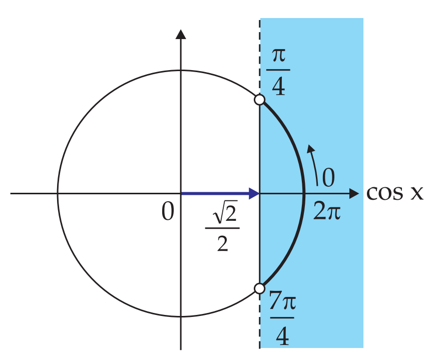
$$0 \le x < \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{3\pi}{4} < x \le 2\pi$$

A solução geral é:

$$2k\pi \le x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou}$$

$$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x \le 2\pi + 2k\pi, k \in Z$$

3. Resolver $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.



No intervalo [0; 2π] a solução é:

$$0 \le x < \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{7\pi}{4} < x \le 2\pi$$

A solução geral é:

$$2k\pi \le x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou}$$

$$\frac{7\pi}{4} + 2k\pi < x \le 2\pi + 2k\pi$$

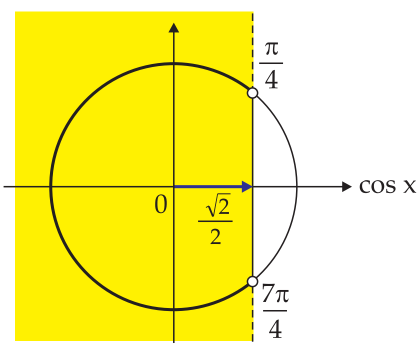
que pode também ser representada por:

$$\frac{7\pi}{4} + 2k\pi < x < \left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$$

ou ainda por:

$$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z$$

4. Resolver $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

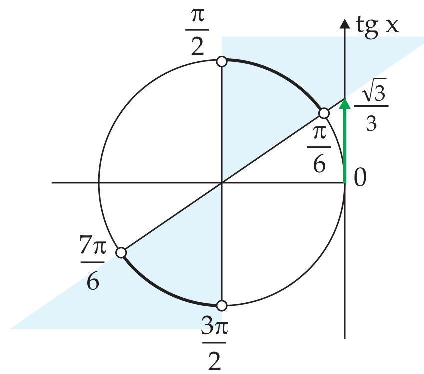


No intervalo $[0; 2\pi]$ a solução é: $\frac{\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$.

A solução geral é:

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z$$

5. Resolver $\operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$.



No intervalo $[0; 2\pi]$ a solução é:

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{7\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}$$

A solução geral é:

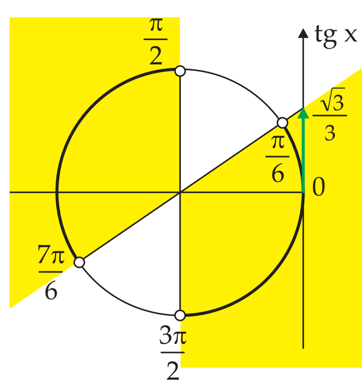
$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou}$$

$$\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$$

Esta solução pode ser resumida por:

$$\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$$

6. Resolver $\operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.



No intervalo [0; 2π] a solução é:

$$0 \le x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{6} \text{ ou}$$

$$\frac{3\pi}{2} < x \le 2\pi$$

A solução geral é:

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou}$$

$$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < \left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, k \in Z$$

Podemos resumir colocando:

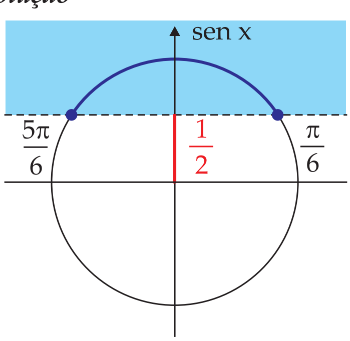
$$\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{7\pi}{6} + k\pi, k \in Z$$

Exercícios Resolvidos

01. (UEL-PR) A inequação $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \ge \frac{1}{2}$, onde $0 \le x \le 2\pi$, é verdadeira se, e somente se:

a) $3\pi / 4 \le x \le 2\pi$
b) $\pi / 2 \le x \le 4\pi / 3$
c) $\pi / 3 \le x \le 5\pi / 3$
d) $\pi / 4 \le x \le 3\pi / 4$
e) $\pi / 6 \le x \le \pi / 2$

Resolução



$$\frac{\pi}{6} \le \frac{x}{2} \le \frac{5\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{5\pi}{3}$$

Resposta: *C*

02. (FGV-SP) Resolvendo-se a inequação $2 \cos x \le 1$ no intervalo [0; 2π] obtém-se:

a) $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{3}$

b) $x \ge \frac{\pi}{3}$

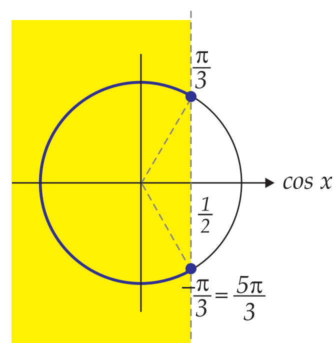
c) $\frac{\pi}{3} \le x \le \pi$

d) $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{5\pi}{3}$

e) $x \le \frac{1}{2}$

Resolução

$$2 \cos x \le 1 \Rightarrow \cos x \le \frac{1}{2}$$



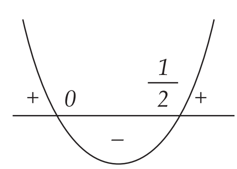
$$s = \left\{x \in R \mid \frac{\pi}{3} \le x < \frac{5\pi}{3}\right\}$$

Resposta: *D*

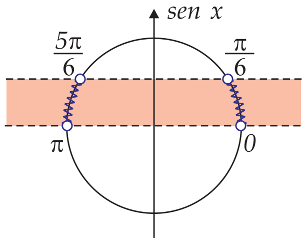
03. Resolva a inequação $2\,\text{sen}^2 x < \text{sen}\, x$; $x \in R$

Resolução

$$2\,\text{sen}^2\, x - \text{sen}\, x < 0$$



$$0 < sen\ x < \frac{1}{2}$$



$$S = \left\{ x \in R \ / \ 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \ ou \right.$$

$$\left. \frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi ; k \in Z \right\}$$

04. (FCMSC-SP) A equação $x^2 + \sqrt{2}\,x +$ $+ \cos\theta = 0$ com $0 \le \theta \le \pi$ não admite raízes reais se, e somente se:

a) $0 \le \theta < \dfrac{\pi}{3}$

b) $\dfrac{\pi}{3} < \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

c) $\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$

d) $\dfrac{\pi}{6} < \theta < \dfrac{2\pi}{3}$

e) $\dfrac{\pi}{6} \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$

Resolução

$$x^2 + \sqrt{2}x + \cos\theta = 0$$

$$\Delta = (\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot \cos\theta$$

$$\Delta = 2 - 4\cos\theta$$

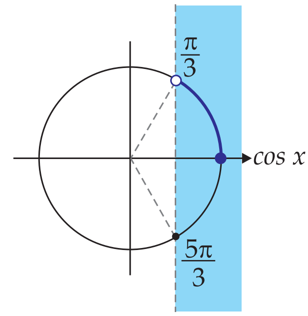
Para não admitir raízes reais, temos $\Delta < 0$, logo:

$$2 - 4\cos\theta < 0 \Rightarrow -4\cos\theta < -2(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cos\theta > 2 \Rightarrow \cos\theta > \frac{1}{2}$$

No intervalo $0 \le \theta \le \pi$, temos:

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$$

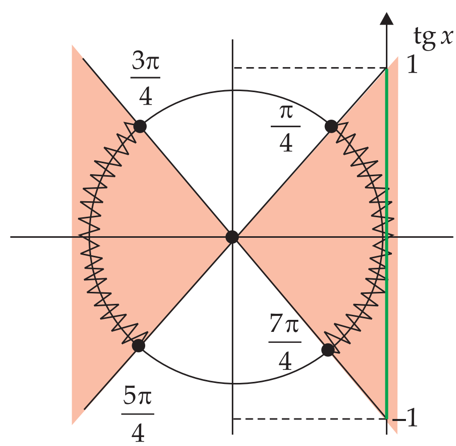


Resposta: *A*

05. Resolva a inequação $|\,tg\,x\,| \le 1$ para $x \in R$.

Resolução

$$|\,tg\,x\,| \le 1 \Rightarrow -1 \le tg\,x \le 1$$



$$S = \left\{ x \in R \ / \ 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right.$$

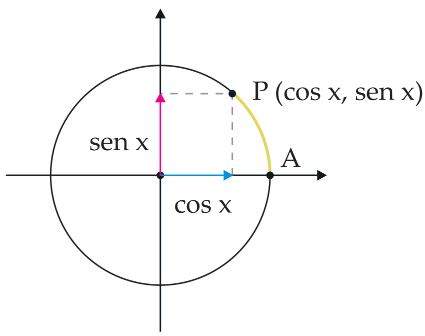
$$ou\ \ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\left. ou\ \ \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \le x \le 2\pi + 2k\pi ; k \in Z \right\}$$

Capítulo 07. Funções Trigonométricas

1. Introdução

Vimos que, dado um número real x, podemos associar um ponto P do ciclo trigonométrico e a este ponto é associado um único valor para o seno e o co-seno, que chamamos de sen x e cos x.



A partir dessa idéia, vamos definir as funções trigonométricas com domínios no conjunto dos números reais e imagens obtidas com o auxílio do ciclo trigonométrico.

2. Função Seno

Função Elementar f(x) = sen x

Denominamos **função seno** a função que associa a cada número real x o número y = sen x.

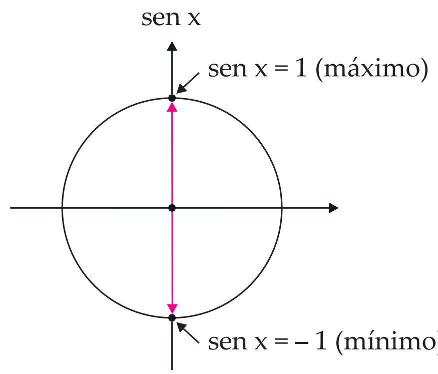
I. **Domínio**

Como sen x é definido para todo x real, dizemos que o domínio de f(x) = sen x é o conjunto R.

$$\boxed{D = R}$$

II. **Conjunto Imagem**

Sabemos que o sen x assume valor máximo igual a 1, quando x é um número real que representa um arco com primeira determinação $\frac{\pi}{2}$, e valor mínimo igual a –1, quando x representa um arco com primeira determinação $\frac{3\pi}{2}$.



Assim, o conjunto imagem de f(x) = sen x é:

$$\boxed{Im = [-1, 1]}$$

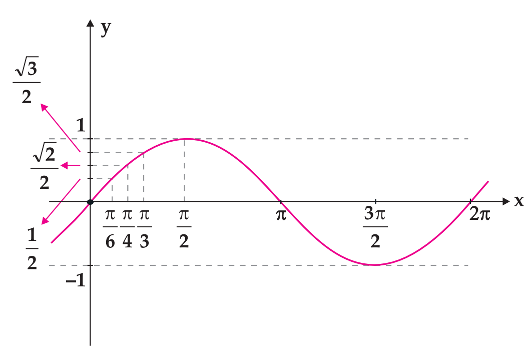
III. **Gráfico**

Para construirmos o gráfico da função definida por f(x) = sen x, vamos montar uma tabela para os arcos notáveis e, usando as propriedades de simetria, teremos o gráfico para todo conjunto dos reais.

Assim:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0

Localizando no plano cartesiano os pares (x, sen x), temos:



Observação

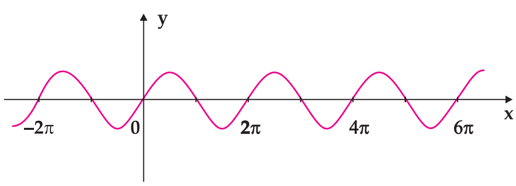
A curva do gráfico correspondente ao intervalo de 0 a 2π é chamada de **senóide** e o gráfico da função f(x) = sen x para x ∈ R é uma sucessão de senóides.

IV. **Período**

Antes de estudarmos o período da função $f(x) = \text{sen } x$, vamos ver a definição de função periódica:

> Uma função $y = f(x)$, definida no domínio D, é chamada função periódica se existe um número positivo p que satisfaz a igualdade de $f(x + p) = f(x)$ para todo $x \in D$. O menor valor de p que verifica essa condição é chamado de período da função.

Sabemos que $\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x$, então o **período da função $f(x) = \text{sen } x$ é 2π**. Isto explica o fato de o gráfico ser uma repetição de senóides de 2π em 2π.



V. **Paridade**

Antes de estudarmos a paridade da função $f(x) = \text{sen } x$, vamos ver as definições de função par e função ímpar.

> Uma função $y = f(x)$, definida no domínio D, é chamada **função par** se $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in D$, e é chamada **função ímpar** se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in D$.

Sabemos que $\text{sen }(-x) = -\text{sen }(x)$, então a função **$f(x) = \text{sen } x$ é uma função ímpar.**

3. Função Co-seno

Função Elementar f(x) = cos x

Denominamos **função co-seno** a função que associa a cada número real x o número $y = \cos x$.

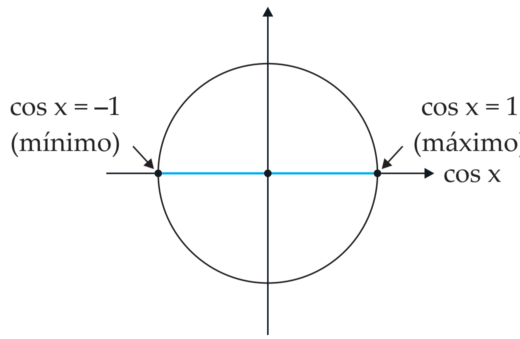
I. **Domínio**

Como cos x é definido para todo x real, dizemos que o domínio de $f(x) = \cos x$ é o conjunto R.

$$\boxed{D = \mathbb{R}}$$

II. **Conjunto Imagem**

Sabemos que o sen x assume valor máximo igual a 1, quando x é um número real que representa um arco com primeira determinação 0 (zero), e valor mínimo igual a –1, quando x representa um arco com primeira determinação π.



Assim, o conjunto imagem de $f(x) = \cos x$ é:

$$\boxed{Im = [-1, 1]}$$

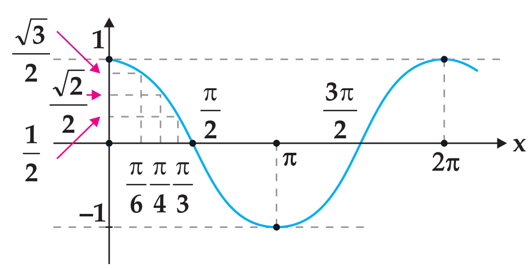
III. **Gráfico**

Para construirmos o gráfico da função definida por $f(x) = \cos x$, vamos montar uma tabela para os arcos notáveis e, usando as propriedades de simetria, teremos o gráfico para todo conjunto dos reais.

Assim:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

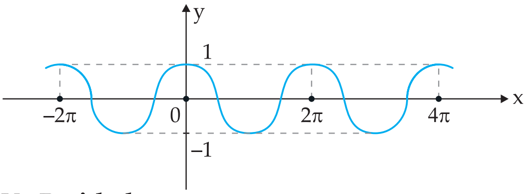
Localizando no plano cartesiano os pares (x, cos x), temos:



> **Observação**
>
> A curva do gráfico correspondente ao intervalo de 0 a 2π é chamada de **co-senóide** e o gráfico da função $f(x) = \cos x$ para $x \in \mathbb{R}$ é uma sucessão de co-senóides.

IV. Período

Sabemos que $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, então o período de $f(x) = \cos x$ é 2π. Isso explica o fato de o gráfico ser uma repetição de co-senóides de 2π em 2π.



V. Paridade

Sabemos que $\cos(-x) = \cos(x)$, então a função **$f(x) = \cos x$ é uma função par.**

4. Função Tangente

Função Elementar f(x) = tg x

Sabemos que a tangente de um número real é a razão entre o seno e o co-seno desse real.

Assim: $\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$, $\cos x \neq 0$

Dessa forma, para todo real x, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in R$, a tangente existe e é única.

Então, podemos definir a função:

$$f: \{x \in R \,/\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in R\} \rightarrow$$
$$\rightarrow R \text{ tal que } f(x) = \text{tg } x$$

I. Domínio

Como tg x existe quando $\cos x \neq 0$, então o domínio da função $f(x) = \text{tg } x$ é:

$$D = \{x \in R \,/\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in R\}$$

II. a_2) Imagem

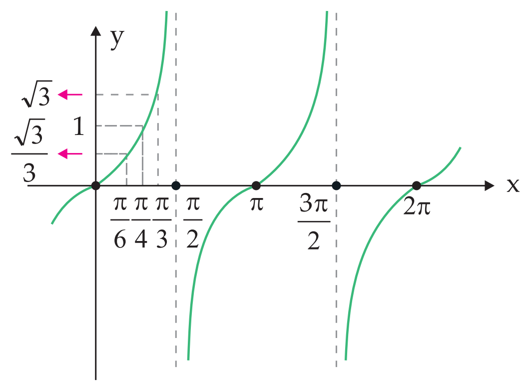
Como sabemos, a tangente de um número real pode assumir qualquer valor real.
Assim:

$$\text{Im} =]-\infty, \infty[$$

III. Gráfico

O gráfico da função $f(x) = \text{tg } x$ pode ser obtido a partir de uma tabela com os arcos notáveis e, por propriedades de simetria, obtemos a curva para todo x pertencente ao domínio.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0



Observações

1) O gráfico não tem imagens para $x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ etc., ..., isto é, para $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

2) A curva compreendida entre $x = 0$ e $x = \pi$ é uma tangentóide e o gráfico de $f(x) = \text{tg } x$ é obtido pela repetição sucessiva de tangentóides de π em π.

IV. Período

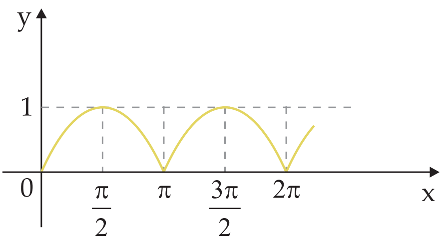
Como $\text{tg}(x + \pi) = \text{tg } x$, para qualquer x pertencente ao domínio, o período da função $f(x) = \text{tg } x$ é $p = \pi$.

V. Paridade

Como $f(x) = \text{tg } x$ e $f(-x) = \text{tg}(-x) = -\text{tg}(x)$, então $f(-x) = -f(x)$. Dessa forma, a função $f(x) = \text{tg } x$ é ímpar.

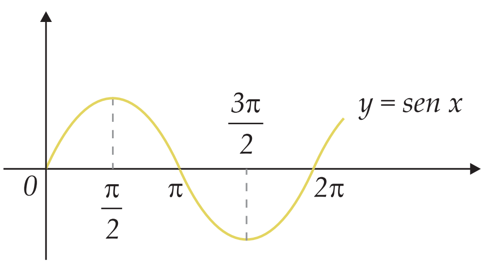
Exercícios Resolvidos

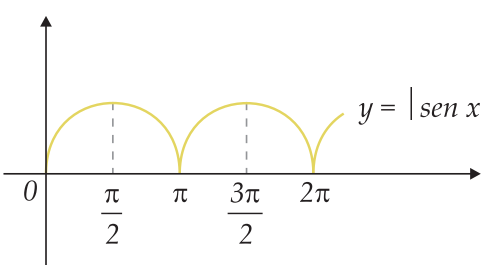
01. (FGV-SP) O gráfico abaixo representa a função:



a) y = | tg x |
b) y = | sen x |
c) y = | sen x | + | cos x |
d) y = sen 2x
e) y = 2 sen x

Resolução



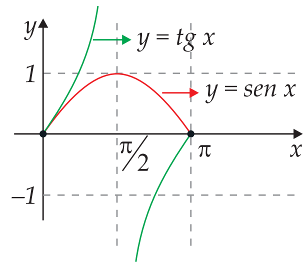


Resposta: *B*

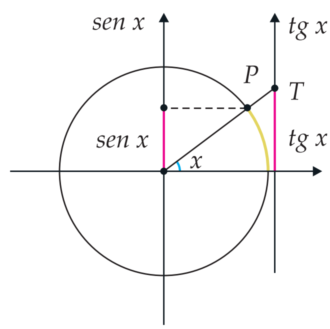
02. (Mackenzie-SP) A intersecção dos gráficos das funções seno e tangente para $0 < x < \pi$.

a) é vazia.
b) contém um, e um só ponto.
c) contém o ponto de abscissa $\frac{\pi}{4}$.
d) contém mais de um ponto.
e) depende da escala usada.

Resolução



Lembre-se de que para $0 < x < \frac{\pi}{2}$



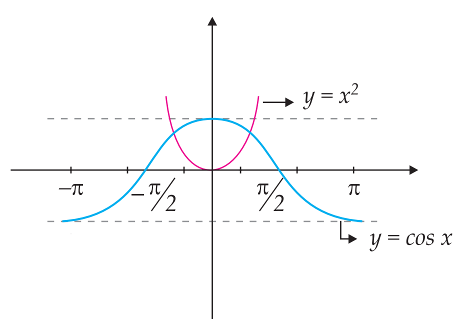
sen x é ordenada do ponto P e tg x é ordenada de T ∴ tg x > sen x.

Resposta: *A*

03. (Fuvest-SP) Dadas as curvas $y = x^2$ e $y = \cos x$, assinale a afirmação verdadeira.

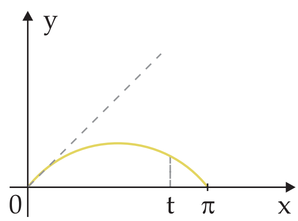
a) Elas não se interceptam.
b) Internceptam-se numa infinidade de pontos.
c) Interceptam-se em 2 pontos.
d) Interceptam-se em um único ponto.
e) Interceptam-se em 3 pontos.

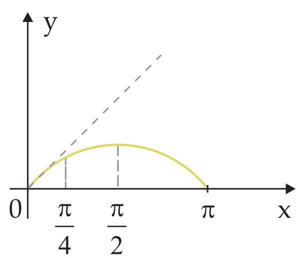
Resolução



Resposta: *C*

04. (FAAP-SP) Para cada $t \in [0, \pi]$, $A(t) = 1 - \cos t$, representa a área sob o gráfico de f (acima do eixo dos x) dada por $f(x) = \text{sen } x$ (vide figura 1). Baseado nisso, a área sob o gráfico de f (acima do eixo dos x) com $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ (vide figura 2).





vale:

a) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) 1

d) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução

A área pedida, segundo as informações do enunciado, é dada por:

$$Área = A\left(\frac{\pi}{2}\right) - A\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Área = 1 - cos\frac{\pi}{2} - \left(1 - cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$Área = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resposta: *E*

5. Gráficos de Funções Trigonométricas

5.1. Função f(x) = a + sen x

O número a, adicionado ao sen x, altera a paridade e a imagem da função y = sen x.

Assim, sendo $a \neq 0$ função f(x) = a + sen x fica sem **paridade** (nem par e nem ímpar), pois $a + \text{sen } x \neq a + \text{sen }(-x)$ e $-(a + \text{sen } x) \neq a + \text{sen }(-x)$.

Quanto ao conjunto imagem, cada uma das imagens de y = sen x deve ser acrescida de **a** e o conjunto imagem de f(x) = a + sen x é

$$Im = [-1 + a,\ 1 + a]$$

Assim, o gráfico de f(x) = a + sen x pode ser obtido deslocando-se o gráfico de y = sen x de **a** unidades, **para cima** ou **para baixo**, conforme o valor de **a** seja positivo ou negativo.

Exemplos

1. Analisar a função f(x) = 2 + sen x quanto ao domínio, imagem, gráfico, período e paridade.

Resolução

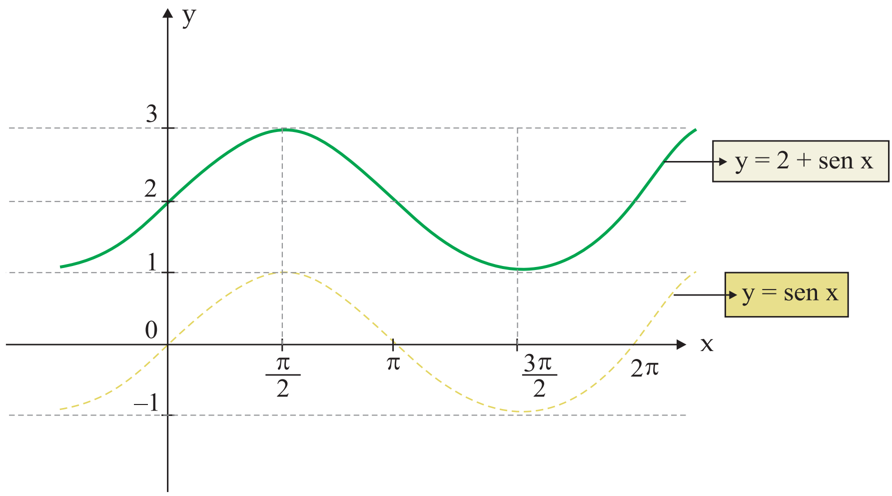
Domínio: D = R

Imagem : Im = [–1 + 2, 1 + 2] $\Rightarrow$ Im = [1, 3]

Gráfico: abaixo

Paridade: sem paridade

Período: $p = 2\pi$



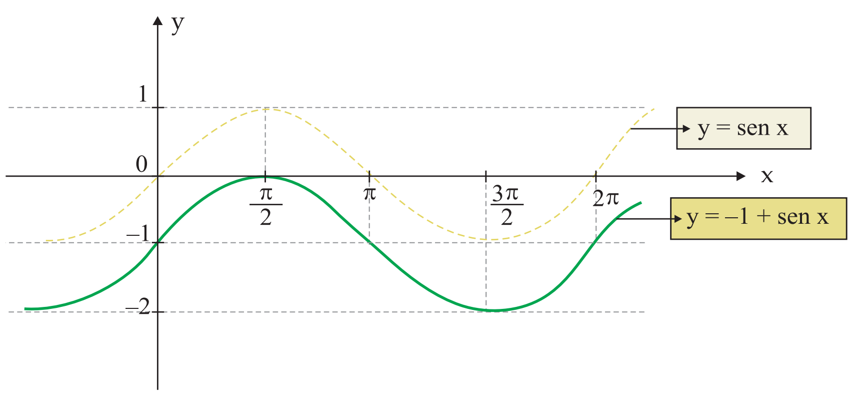
2. Analisar a função f(x) = –1 + sen x quanto ao domínio, imagem, gráfico, período e paridade.

Resolução

Domínio: D = R

Imagem: Im = [–1–1, 1–1] ⇒ Im = [–2, 0]

Gráfico:



Paridade: sem paridade

Período: p = 2π

5.2. Função f(x) = b sen x

O número **b** ($b \neq 0$), multiplicado ao sen x, altera a imagem da função y = sen x. Cada uma das imagens de y = sen x deve ser multiplicada por **b** e o conjunto imagem de f(x) = b sen x é:

$$Im = [-b, b]$$

Assim, o gráfico de f(x) = b sen x continuará sendo uma senóide, porém de **amplitude alterada** para o intervalo [–b, b].

É importante acrescentar que, quando o valor de **b** é **negativo**, todas as imagens ficarão invertidas, isto é, a **senóide ficará invertida**, conforme podemos observar no 2º exemplo a seguir.

Exemplo

Analisar a função f(x) = 3 sen x quanto ao domínio, imagem, gráfico, período e paridade.

Resolução

Domínio: D = R

Imagem : Im = [–3, 3]

Gráfico: a seguir

Paridade:

f(–x) = 3 sen (–x) = –3 sen x = –f(x).

Assim, f(x) é ímpar.

Período: $p = 2\pi$

5.3. Função f(x) = sen (mx)

O número **m**, multiplicado ao arco x, altera o **período** da função y = sen x.

Assim,

$mx = 0 \Rightarrow x = 0$ (início de uma senóide)

$mx = 2\pi \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{m}$ (final de uma senóide)

Como **m** pode ser negativo, dizemos que o período de f(x) = sen (mx) é $p = \dfrac{2\pi}{|m|}$

Exemplos

1. Analisar a função f(x) = sen (2x) quanto ao domínio, imagem, gráfico, período e paridade.

Resolução

Domínio: D = R

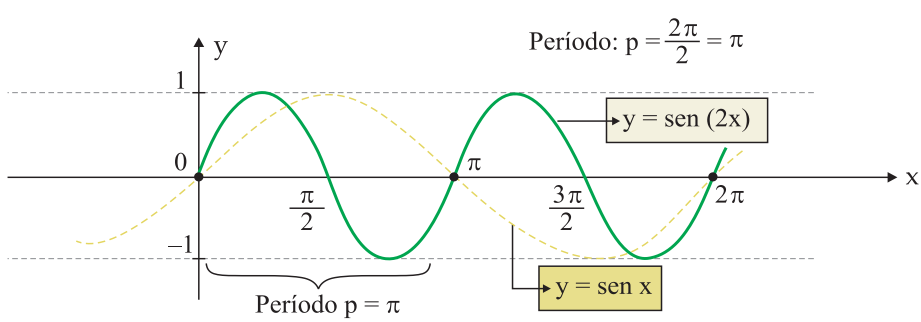
Imagem : Im = [–1, 1]

Gráfico: abaixo

Paridade:

f(–x) = sen (–2x) = –sen (2x) = –f(x), assim, f(x) é ímpar.

Período: $p = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$



2. Analisar a função $f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ quanto ao domínio, imagem, grágico,período e paridade.

Resolução

Domínio: D = R

Imagem : Im = [–1, 1]

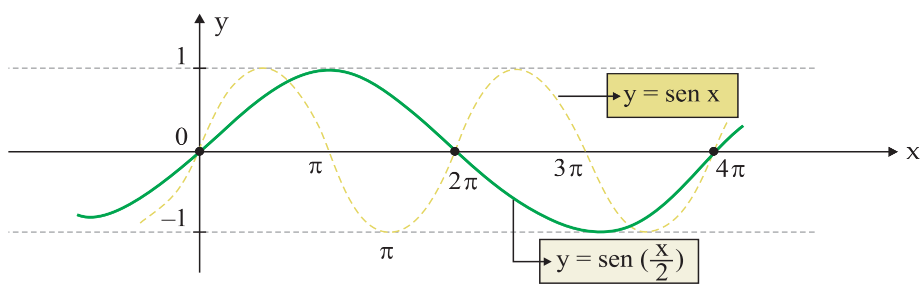
Gráfico: abaixo

Paridade:

$$f(-x) = \text{sen}\left(\frac{-x}{2}\right) = -\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$\therefore$ $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ é ímpar.

Período: $p = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$



5.4. Função f(x) = sen (x + n)

O número n, acrescido ao arco x, altera o gráfico da função y = sen x, **deslocando** todos os seus pontos, **para a esquerda** ou **para a direita**,conforme o valor de n seja positivo ou negativo.

Exemplos

1. Analisar a função $f(x)=\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ quanto ao domínio, imagem, gráfico, período e paridade.

Resolução

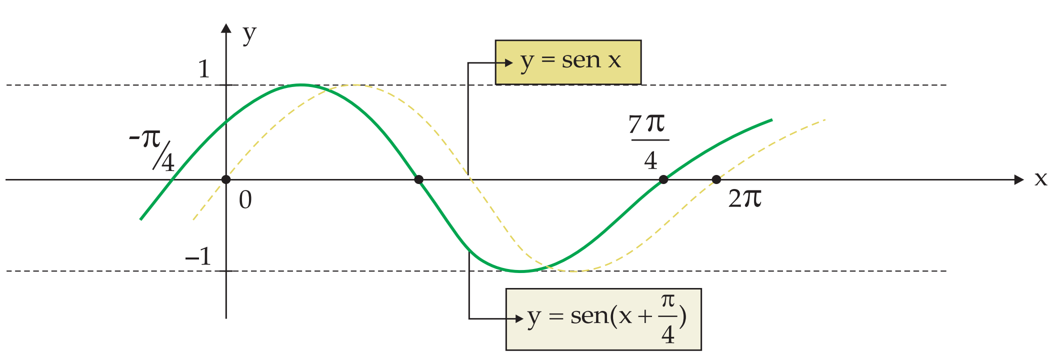
Domínio: D = R

Imagem : Im = [–1, 1]

Gráfico:

$x+\frac{\pi}{4}=0 \Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}$ (início de uma senóide)

$x+\frac{\pi}{4}=2\pi \Rightarrow x=\frac{7\pi}{4}$ (final de uma senóide)



Paridade:

$$\text{sen}\left(-x+\frac{\pi}{4}\right) \neq \text{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \text{e}$$

$$\text{sen}\left(-x+\frac{\pi}{4}\right) \neq -\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Então f não tem paridade.

Período: $p = 2\pi$

2. Analisar a função $f(x) = \text{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ quanto ao domínio, imagem, gráfico, período e paridade.

Resolução

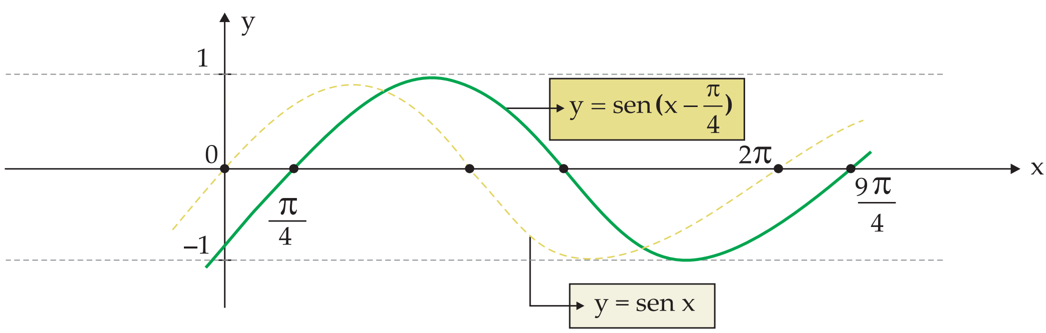
Domínio: $D = \mathbb{R}$

Imagem: Im = [–1, 1]

Gráfico:

$$x-\frac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{(início de uma senóide)}$$

$$x-\frac{\pi}{4} = 2\pi \Rightarrow x = \frac{9\pi}{4} \text{(final de uma senóide)}$$



Período: $p = 2\pi$

Paridade: $\text{sen}\left(-x-\frac{\pi}{4}\right) \neq \text{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

e $\text{sen}\left(-x-\frac{\pi}{4}\right) \neq -\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, então, f não tem paridade.

5.5. Função f(x) = a + b sen (mx + n) (b? ≠ 0 e m ≠ 0)

Após o estudo dos subitens B, C, D e E, concluímos que, para a função

$f(x) = a + b\,\text{sen}\,(mx + n)$, temos:

Domínio: $D = \mathbb{R}$

Imagem: Im = [–b + a, b + a]

Gráfico:

$$mx + n = 0 \Rightarrow x = -\frac{n}{m} \text{(começo da senóide)}$$

$$mx + n = 2\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{m} - \frac{n}{m} \text{(final da senóide)}$$

Devemos lembrar que a amplitude da senóide fica determinada pelo conjunto imagem da função e não podemos esquecer que, se $b < 0$, a senóide ficará invertida.

Paridade:

devemos calcular f(–x) e comparar com f(x):

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ função par

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ função ímpar

$f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x) \Rightarrow$ função sem paridade.

Período: $p = \dfrac{2\pi}{|m|}$

Exemplos

1. Analisar a função f(x) = 1 + 2 sen (2x) quanto ao domínio, imagem, gráfico, período e paridade.

Resolução

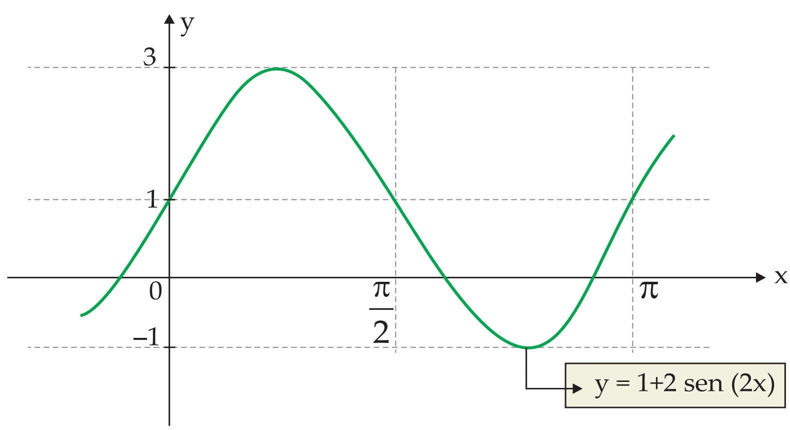
Domínio: D = R

Imagem: Im = [–2 + 1, 2 + 1] $\Rightarrow$ Im = [–1, 3]

Gráfico:

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$ (começo da senóide)

$2x = 2\pi \Rightarrow x = \pi$ (final da senóide)



Paridade: não tem paridade

$$\begin{cases} f(x) = 1 + \text{sen}\,(2x) \\ f(-x) = 1 - \text{sen}\,(2x) \end{cases}$$

Período: $p = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

2. Analisar a função

$f(x) = -1-2\ \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ quanto ao domínio, imagem, gráfico, período e paridade.

Resolução

Domínio : D = R

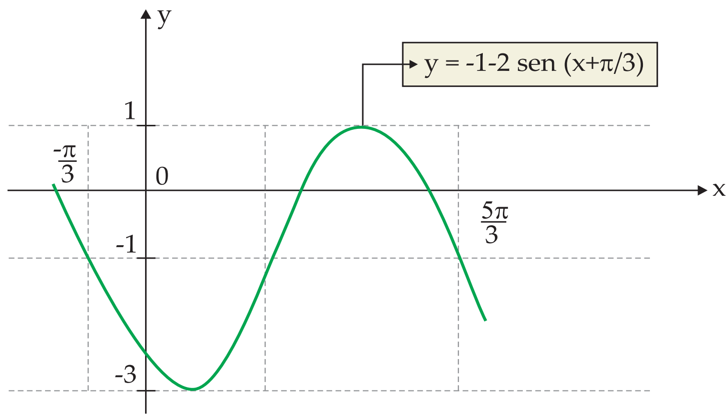
Imagem:

$$\left.\begin{array}{l} -b + a = 2 - 1 = 1 \\ b + a = -2 - 1 = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Im} = [-3, 1]$$

Gráfico:

$x + \dfrac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{3}$ (começo da senóide)

$x + \dfrac{\pi}{3} = 2\pi \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{3}$ (final da senóide)



Paridade: não tem paridade

$$\begin{cases} f(x) = -1 - \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \\ f(-x) = -1 - 2\operatorname{sen}\left(-x + \dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Período: $p = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$

5.6. Função f(x) = a + b cos (mx + n) (b ≠ 0 e m ≠ 0)

Após um estudo análogo feito com a função seno nos subitens B, C, D e E do item anterior, concluímos que, para a função

f(x) = a + b cos (mx + n), temos:

Domínio: D = R

Imagem: Im = [–b + a, b + a]

Gráfico:

$$mx + n = 0 \Rightarrow x = -\frac{n}{m} \text{(começo da cossenóide)}$$

$$mx + n = 2\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{m} - \frac{n}{m}$$ (final da cossenóide)

Devemos lembrar que a amplitude da cossenóide fica determinada pelo conjunto imagem da função e não podemos esquecer que, se b < 0, a cossenóide ficará invertida.

Paridade:

devemos calcular f(–x) e comparar com f(x):

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ função par

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ função ímpar

$f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x) \Rightarrow$ função sem paridade.

Período: $p = \dfrac{2\pi}{|m|}$

Exemplo

Analisar a função f(x) = 3 + 2 cos(2x–π) quanto ao domínio, imagem, período e gráfico.

Resolução

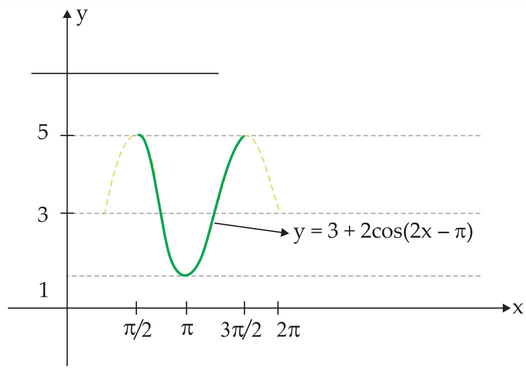
Domínio: D = R

Imagem: Im = [–2 + 3, 2 + 3] = [1, 5]

Período: $p = \dfrac{2\pi}{|m|} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

Gráfico:

$$\begin{cases} 2x - \pi = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \text{(começo da cossenóide)} \\ \dfrac{\pi}{2} + \pi = \dfrac{3\pi}{2} \text{(final do cossenóide)} \end{cases}$$



5.7. Função f(x) = a + b tg (mx + n)

$(b \neq 0 \text{ e } m \neq 0)$

Domínio:

Para que exista f(x), é preciso que $\cos(mx + n) \neq 0$.

Isto acontece quando:

$$mx + n \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$$

Assim,

$$D = \left\{ x \in R \,/\, mx + n \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\}$$

Período:

As funções do tipo f(x) = a + b tg (mx + n) têm como gráfico uma sucessão de tangentóides.

Assim,

$$mx + n = 0 \Rightarrow x = \frac{-n}{m} \text{(início da tangentóide)}$$

$$mx + n = \pi \Rightarrow x = \frac{-n}{m} + \frac{\pi}{m}$$

(final da tangentóide)

Então, o período p será:

$$p = \left| \left(\frac{-n}{m} + \frac{\pi}{m} \right) - \left(\frac{-n}{m} \right) \right| = \left| \frac{\pi}{m} \right|,$$

ou seja,

$$p = \frac{\pi}{|m|}$$

Exemplos

1. Dada a função definida por f(x) = 1 + 2 tg 2x, determinar:

a) domínio

b) período

Resolução

a) $2x \neq \frac{\pi}{2} k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

Assim,

$$D = \left\{ x \in R \,/\, x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z \right\}$$

b) $p = \frac{\pi}{|m|} = \frac{\pi}{2}$

2. Dada a função definida por

$f(x) = -3 - 2 \text{ tg}\left(x + \frac{\pi}{2} \right)$, determinar:

a) domínio

b) período

Resolução

a) $x + \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq k\pi$

Assim,

$$D = \{ x \in R \,/\, x \neq k\pi, k \in Z \}$$

b) $p = \dfrac{\pi}{|m|} = \dfrac{\pi}{1} \Rightarrow p = \pi$

3. Dada a função definida por

f(x) = tg $\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ determinar:

a) domínio
b) período
c) gráfico

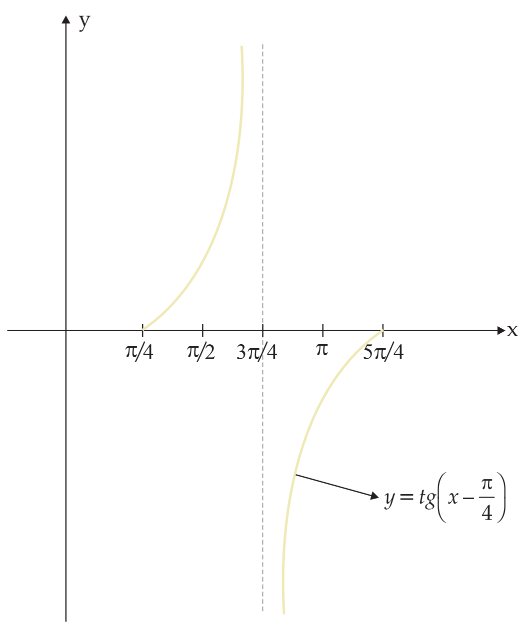
Resolução

a) $x - \dfrac{\pi}{4} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \dfrac{3\pi}{4} + k\pi; k \in Z$

$D = \left\{x \in R \,/\, x \neq \dfrac{3\pi}{4} + k\pi, k \in Z\right\}$

b) $p = \dfrac{\pi}{|m|} = \dfrac{\pi}{1} \Rightarrow p = \pi$

$$\text{gráfico}\begin{cases} \textit{início}: x - \dfrac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} \\ \textit{final}: \dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$$



5.8 Outras Funções

I. Função f(x) = a + b cotg (mx + n) (b ≠ 0 e m ≠ 0)

Estudaremos o domínio e o período das funções dedfinidas por f(x) = a + b cotg (mx + n), com b ≠ 0 e m ≠ 0.

Domínio:

Como cotg (mx + n) = $\dfrac{\cos(mx+n)}{\text{sen}(mx+n)}$, devemos ter sen (mx + n) ≠ 0, ou seja, mx + n ≠ k π

Assim,

D = {x ∈ R / mx + n ≠ k π, k ∈ Z}

Período:

O período de f(x) = a + b cotg (mx + n) é

$p = \dfrac{\pi}{|m|}$

II. Função f(x) = a + b sec (mx + n) (b ≠ 0 e m ≠ 0)

Estudaremos o domínio e o período das funções definidas por f(x) = a + b sec (mx + n) com b ≠ 0 e m ≠ 0.

Domínio:

Como $\sec(mx + n) = \dfrac{1}{\cos(mx+n)}$, devemos ter cos (mx + n) ≠ 0, ou seja,

$$mx + n \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi.$$

Assim,

$$D = \{x \in R \,/\, mx + n \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi,\ k \in Z\}$$

Período:

O período de f(x) = a + b sec (mx + n) é p.

III. Função f(x) = a + b cosec (mx + n) (b ≠ 0 e m ≠ 0)

Estudaremos o domínio e o período das funções definidas por f(x) = a + b cosec (mx + n), com b ≠ 0 e m ≠ 0.

Domínio:

Como $\operatorname{cosec}(mx + n) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(mx+n)}$, devemos ter cosec (mx + n) ≠ 0, ou seja, mx + n ≠ k π

Assim,

$$D = \{x \in R \,/\, mx + n \neq k\,\pi,\ k \in Z\}$$

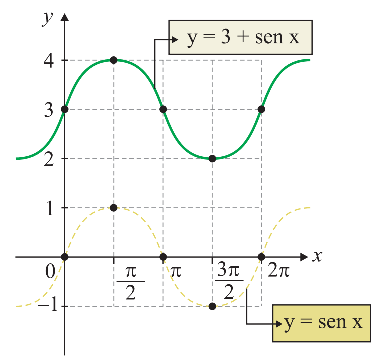
Exercícios Resolvidos

01. Esboçar o gráfico e dar o domínio, a imagem e o período das funçoes:

a) sen x

b) y = 3 + sen x

Resolução



a) D = R

Im = [–1; 1]

p = 2π

b) D = R

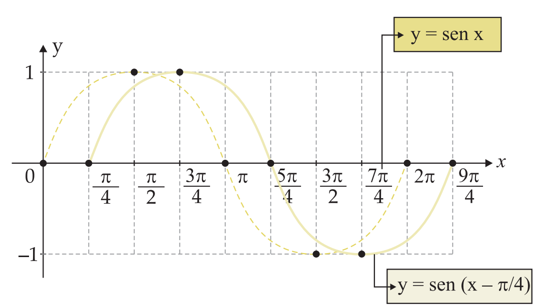
Im = [2, 4]

p = 2π

02. Esboçar o gráfico e dar o domínio, a imagem e o período da função:

$$y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Resolução



D = R

Im = [–1; 1]

p = 2π

03. (Mackenzie–SP) O período da função dada por $y = \text{sen}\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ é:

a) π

b) 2π

c) $\dfrac{\pi}{4}$

d) $\dfrac{\pi}{2}$

e) $\dfrac{\pi}{8}$

Resolução

$y = \text{sen}\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

k = 2 (coeficiente de x*), logo,*

$p = \dfrac{2\pi}{|k|} \Rightarrow p = \dfrac{2\pi}{2} \Rightarrow p = \pi$

Resposta: *A*

04. (UPF–RS) O conjunto imagem da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2 \text{ sen } x - 3$, é o intervalo:

a) [–1; 1]

b) [–5; 5]

c) [–5; 1]

d) [–1; 5]

e) [–5; –1]

Resolução

a = –3; b = 2

Im = [–b + a, b + a] = [–2 + (–3); 2 + (–3)]=
=[–5, –1]

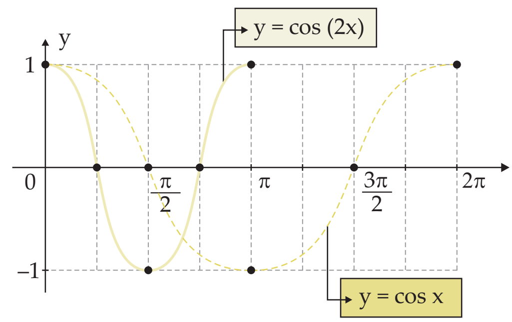
Resposta*: A*

05. Obter o domínio, a imagem e o período das funções e esboçar seu gráfico

a) cos x

b) y = cos (2x)

Resolução



a) D = R; Im = [–1; 1]; p = 2π

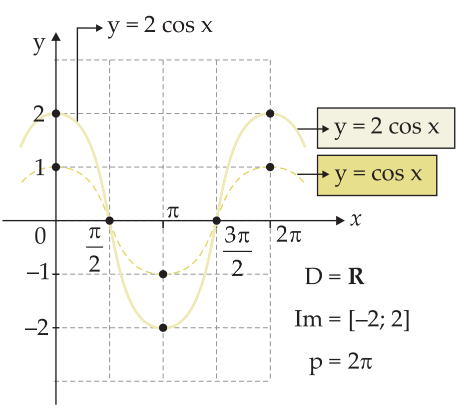
b) D = R; Im = [–1; 1]; p = π

06.

Esboçar o gráfico e dar o domínio, a imagem e o período da função:

$y = 2 \cdot \cos x$

Resolução



07. (Ufes–ES) O período da função: $f(x) = 4\cos\left(\dfrac{1}{4}x + 3\right)$ é:

a) 8 π

b) 7 π

c) 6 π

d) 3 π

e) 2 π

Resolução

$f(x) = 4\cos\left(\dfrac{1}{4}x + 3\right)$

$k = \dfrac{1}{4}$ *(coeficiente de x), logo,*

$$p = \frac{2\pi}{|k|} \Rightarrow p = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} \Rightarrow p = 8\pi$$

Resposta: *A*

08. (FCMSC-SP) Seja a função f de R em R definida por $f\,(x) = 1 + 4 \cos x$. O conjunto imagem dessa função é o intervalo:

a) [–3; 5]
b) [3; 5]
c) [–3; 4]
d) [3; 4]
e) [–1; 1]

Resolução

$a = 1$

$b = 4$

$Im = [-b + a;\ b + a] = [-3, 5]$

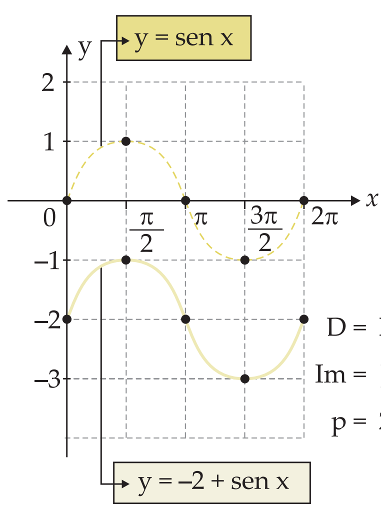
Resposta: *A*

09.

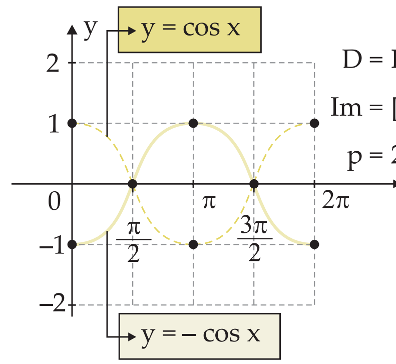
Esboçar o gráfico das funções abaixo, dar seu domínio, imagem e período.

a) $y = -2 + \text{sen}\ x$
b) $y = -\cos x$

Resolução



D = **R**
Im = [–3; –1]
p = 2π



D = **R**
Im = [–1; 1]
p = 2π

10.(Mackenzie-SP) O domínio e o conjunto imagem da função definida por y = tg 2 x, sendo D o domínio e I o conjunto imagem, são representados por:

a) $D = \left\{x \in R \mid x \neq \dfrac{\pi}{4}\right\}$ e $I = R^*$

b) $D = \left\{x \in R \mid x \neq \dfrac{\pi}{4} \text{ e } x \neq \dfrac{3\pi}{4}\right\}$ *e* $I = R^*$

c) D = R e I = R

d) $D = \left\{\ \in R \mid \ \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in Z\right\}$ *e* $I = R$

e) D = R* e I = R

Resolução

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \text{ com } k \in Z$$

Logo, $D = \left\{x \in R / x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in Z\right\}$

$I = R$

11. Obter o domínio da função $y = \dfrac{1}{tg(3x)}$

Resolução

$tg\ (3x) \neq 0$

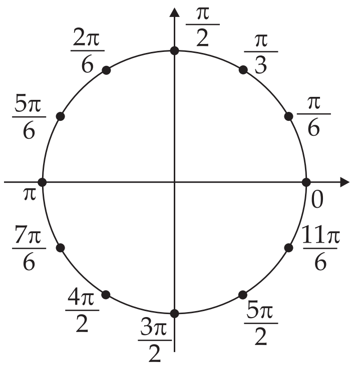
$3x \neq k\pi$

$x \neq \dfrac{k\pi}{3}$

Existência da tangente

$$3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$$



Reunindo as duas frases em $\frac{k\pi}{6}$

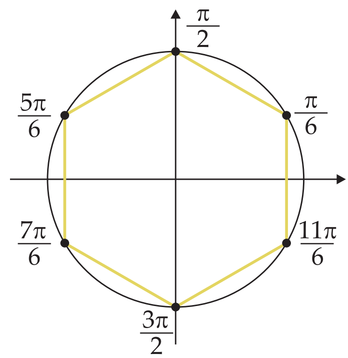
$$D = R - \left\{\frac{k\pi}{6}\right\};\ k \in Z$$

12.
Dar o domínio da função y = 3–2 tg (3x)

Resolução

$$3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$$



Notar que a função não existirá nos vértices deste hexágono.

$$D = \left\{x \in R \,/\, x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3},\ k \in Z\right\}$$