

Matemática 9

Matrizes, Determinantes, Sistemas e Progressões

Pré-Vestibular

Teoria e Exercícios Propostos



www.editora.coc.com.br
Editora COC – Empreendimentos Culturais Ltda.
Rua General Celso de Mello Rezende, 301
Tel.: (16) 3603.9700 – CEP 14095-270
Lagoinha – Ribeirão Preto – SP



Capítulo 01. Progressões

1. Seqüências Numéricas	9
1.1. Igualdade	9
1.2. Fórmula do Termo Geral	9
1.3. Lei de Recorrências	10
2. Progressão Aritmética (PA)	10
2.1. Definição	10
2.2. Classificação	11
2.3. Fórmula do Termo Geral	11
2.4. Artíficos de Resolução	11
2.5. Propriedades	12
2.6. Termos Equidistantes dos Extremos	13
2.7. Soma dos n Primeiros Termos de uma PA	14
3. Progressão Geométrica (PG)	15
3.1. Definição	15
3.2. Classificação	16
3.3. Fórmula do Termo Geral	16
3.4. Artíficos de Resolução	17
3.5. Propriedades	17
3.6. Soma dos n Primeiros Termos de uma PG	20
3.7. Série Convergente (PG Convergente)	20

Capítulo 02. Matrizes

1. Definições	24
2. Matrizes Especiais	25
3. Igualdade de Matrizes	27
4. Adição e Subtração de Matrizes	28
4.1. Definição	28
4.2. Propriedades da Adição	28
5. Multiplicação de Matrizes por um Número Real	28
5.1. Definição	28
5.2. Propriedades	28
6. Multiplicação de Matrizes	30
6.1. Definição	31
6.2. Propriedades	32
7. Matriz Inversa	35
7.1. Definição	35
7.2. Propriedades	36

Capítulo 03. Determinantes

1. Definições	39
1.1. Determinante de uma Matriz de Ordem 1	39
1.2. Determinante de uma Matriz de Ordem 2	39
1.3. Determinante de uma Matriz de Ordem 3	39
2. Propriedades	41
2.1. Propriedade 1	41
2.2. Propriedade 2	41
2.3. Consequência da Propriedade 2	41
2.4. Propriedade 3	41
2.5. Consequências da Propriedade 3	41
2.6. Propriedade 4	42
2.7. Propriedade 5 (teorema de Jacobi)	42
2.8. Propriedade 6 (teorema de Binet)	43
3. Teorema de Laplace	44
3.1. Menor Complementar e Co-fator	44
3.2. Determinante de uma Matriz de Ordem n	45
3.3. Definição do Teorema	46
3.4. Observações Importantes	47
3.5. Uma Aplicação	47
4. Determinante de Vandermonde	48
5. Regra de Chió	49

Capítulo 04. Inversão de Matrizes

1. Inversão	52
2. Matriz Inversa	52
3. Obtenção	52
4. Propriedades	54

Capítulo 05. Sistemas Lineares

1. Equações Lineares	56
1.1. Definição e Elementos	56
1.2. Solução de uma Equação Linear	56
1.3. Conjunto Solução	57
1.4. Equação Linear Homogênea	57
1.5. Equações Lineares Especiais	57

índice.matemática 9

2. Sistema Linear 2×2	57
2.1. Definição e Elementos	57
2.2. Resolução de um Sistema 2×2	57
2.3. Sistema Linear 2×2 com Infinitas Soluções	58
2.4. Sistema Linear 2×2 com Nenhuma Solução	58
2.5. Classificação	59
3. Sistema Linear $m \times n$	59
3.1. Definição e Elementos	59
3.2. Solução de um Sistema Linear	60
3.3. Sistema Linear Homogêneo	60
3.4. Classificação de um Sistema Linear	60
3.5. Matriz Incompleta	60
3.6. Forma Matricial	60
4. Regra de Cramer	62
4.1. A Regra para um Sistema 2×2	62
4.2. A Regra para um Sistema $n \times n$	64
5. Resolução de um Sistema por Substituição	65
6. Sistemas Lineares Escalonados	66
7. Escalonamento de um Sistema	68
8. Discussão de Sistemas Lineares	71
8.1. Sistemas com Número de Equações Igual ao Número de Incógnitas	71
8.2. Sistemas com Número de Equações Diferente do Número de Incógnitas	73
8.3. Sistema Linear Homogêneo	74
Exercícios Propostos	81



Capítulo 01. Progressões

1. Sequências Numéricas

Podemos, no nosso dia-a-dia, estabelecer diversas seqüências como, por exemplo, a sucessão de cidades que temos numa viagem de automóvel entre Brasília e São Paulo ou a sucessão das datas de aniversário dos alunos de uma determinada escola. Podemos, também, adotar para essas seqüências uma ordem numérica, ou seja, adotando a_1 para o 1º termo, a_2 para o 2º termo até a_n para o n-ésimo termo. Dizemos que o termo a_n é também chamado termo geral da seqüência, em que n é um número natural diferente de zero. Evidentemente, daremos atenção ao estudo das seqüências numéricas.

As seqüências podem ser finitas, quando apresentam um último termo, ou infinitas, quando não apresentam um último termo. As seqüências infinitas são indicadas por reticências no final.

Exemplos

1º) Seqüência dos números primos positivos: (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...). Notemos que esta é uma seqüência infinita com $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_3 = 5$; $a_4 = 7$; $a_5 = 11$; $a_6 = 13$ etc.

2º) Seqüência dos números ímpares positivos: (1, 3, 5, 7, 9, 11, ...). Notemos que esta é uma seqüência infinita com $a_1=1$; $a_2=3$; $a_3=5$; $a_4=7$; $a_5=9$; $a_6=11$ etc.

3º) Seqüência dos algarismos do sistema decimal de numeração: (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Notemos que esta é uma seqüência finita com $a_1=0$; $a_2=1$; $a_3=2$; $a_4=3$; $a_5=4$; $a_6=5$; $a_7=6$; $a_8=7$; $a_9=8$ e $a_{10}=9$.

1.1. Igualdade

As seqüências são apresentadas com os seus termos entre parênteses colocados de forma ordenada. Sucessões que apresentarem os mesmos termos, porém em ordem diferente, serão consideradas sucessões diferentes. Duas seqüências só poderão ser consideradas iguais se, e somente se, apresentarem os mesmos termos, na mesma ordem.

Exemplo

A seqüência (x, y, z, t) poderá ser considerada igual à seqüência (5, 8, 15, 17) se, e somente se, $x=5$; $y=8$; $z=15$ e $t=17$.

Notemos que as seqüências (0, 1, 2, 3, 4, 5) e (5, 4, 3, 2, 1, 0) são diferentes, pois, embora apresentem os mesmos elementos, eles estão em ordem diferente.

1.2. Fórmula do Termo Geral

Podemos apresentar uma seqüência através de uma fórmula que determina o valor de cada termo a_n em função do valor de n , ou seja, dependendo da posição do termo. Esta fórmula que determina o valor do termo a_n é chamada fórmula do termo geral da sucessão.

Exemplos

1º) Determinar os cinco primeiros termos da seqüência cujo termo geral é igual a:

$$a_n = n^2 - 2n, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

Teremos:

$$a_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 \Rightarrow a_1 = -1$$

$$a_2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$a_3 = 3^2 - 2 \cdot 3 \Rightarrow a_3 = 3$$

$$a_4 = 4^2 - 4 \cdot 2 \Rightarrow a_4 = 8$$

$$a_5 = 5^2 - 5 \cdot 2 \Rightarrow a_5 = 15$$

2º) Determinar os cinco primeiros termos da seqüência cujo termo geral é igual a:

$$a_n = 3 \cdot n + 2, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*.$$

Teremos:

$$a_1 = 3 \cdot 1 + 2 \Rightarrow a_1 = 5$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 + 2 \Rightarrow a_2 = 8$$

$$a_3 = 3 \cdot 3 + 2 \Rightarrow a_3 = 11$$

$$a_4 = 3 \cdot 4 + 2 \Rightarrow a_4 = 14$$

$$a_5 = 3 \cdot 5 + 2 \Rightarrow a_5 = 17$$

3º) Determinar os termos a_{12} e a_{23} da sequência cujo termo geral é igual a:

$$a_n = 45 - 4 \cdot n, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*.$$

Teremos:

$$a_{12} = 45 - 4 \cdot 12 \Rightarrow a_{12} = -3$$

$$a_{23} = 45 - 4 \cdot 23 \Rightarrow a_{23} = -47$$

1.3. Lei de Recorrências

Uma sequência pode ser definida quando oferecemos o valor do primeiro termo e um “caminho” (uma fórmula) que permite a determinação de cada termo conhecendo-se o seu antecedente. Essa forma de apresentação de uma sucessão é dita de recorrências.

Exemplos

1º) Escrever os cinco primeiros termos de uma sequência em que:

$$a_1 = 3 \text{ e}$$

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n - 4, \text{ em que } n \in \mathbb{N}^*.$$

Teremos:

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 2 \cdot a_1 - 4 \Rightarrow a_2 = 2 \cdot 3 - 4 \Rightarrow a_2 = 2$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 - 4 \Rightarrow a_3 = 2 \cdot 2 - 4 \Rightarrow a_3 = 0$$

$$a_4 = 2 \cdot a_3 - 4 \Rightarrow a_4 = 2 \cdot 0 - 4 \Rightarrow a_4 = -4$$

$$a_5 = 2 \cdot a_4 - 4 \Rightarrow a_5 = 2 \cdot (-4) - 4 \Rightarrow a_5 = -12$$

2º) Determinar o termo a_5 de uma sequência em que:

$$a_1 = 12 \text{ e}$$

$$a_{n+1} = a_n - 2, \text{ em que } n \in \mathbb{N}^*.$$

Teremos:

$$a_2 = a_1 - 2 \Rightarrow a_2 = 12 - 2 \Rightarrow a_2 = 10$$

$$a_3 = a_2 - 2 \Rightarrow a_3 = 10 - 2 \Rightarrow a_3 = 8$$

$$a_4 = a_3 - 2 \Rightarrow a_4 = 8 - 2 \Rightarrow a_4 = 6$$

$$a_5 = a_4 - 2 \Rightarrow a_5 = 6 - 2 \Rightarrow a_5 = 4$$

Observação 1

Devemos observar que a apresentação de uma sequência através do termo geral é mais prática, visto que podemos determinar um termo no “meio” da sequência sem a necessidade de determinarmos os termos intermediários, como ocorre na apresentação da sequência através da lei de recorrências.

Observação 2

Algumas sequências não podem, pela sua forma “desorganizada” de se apresentarem, ser definidas nem pela lei das recorrências, nem pela fórmula do termo geral. Um exemplo de uma sequência como esta é a sucessão de números naturais primos que já “destruiu” todas as tentativas de se encontrar uma fórmula geral para seus termos.

2. Progressão Aritmética (PA)

2.1. Definição

PA é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é o anterior somado a uma constante r chamada razão da PA.

$$a_{n+1} = a_n + r$$

com a_1 conhecido e $n \in \mathbb{N}^*$

Exemplos

1º) (0, 3, 6, 9, 12, 15, ...) é uma PA de primeiro termo $a_1 = 0$ e razão $r = 3$.

2º) (11, 9, 7, 5, 3, 1, -1, ...) é uma PA de primeiro termo $a_1 = 11$ e razão $r = -2$.

3º) (5, 5, 5, 5, 5, 5, ...) é uma PA de primeiro termo $a_1 = 5$ e razão $r = 0$.

4º) (0,3; 0,5; 0,7; 0,9; 1,1; 1,3; ...) é uma PA de primeiro termo $a_1 = 0,3$ e razão $r = 0,2$.

Observação

Para determinar a razão de uma PA, basta efetuarmos a diferença entre dois termos consecutivos: o posterior menos o anterior.

$$r = a_{n+1} - a_n$$



2.2. Classificação

As progressões aritméticas são classificadas de acordo com o crescimento dos seus termos. Uma PA é considerada crescente quando seus termos vão aumentando de valor, decrescente quando seus termos diminuem de valor e constante ou estacionária quando seus termos são todos iguais. Podemos reconhecer os tipos de PA observando a sua razão r .

$r > 0 \Rightarrow$ PA crescente

$r < 0 \Rightarrow$ PA decrescente

$r = 0 \Rightarrow$ PA constante

2.3. Fórmula do Termo Geral

A definição de PA está sendo apresentada por meio de uma lei de recorrências, no entanto, a fórmula do termo geral é mais prática. Por isso, neste item, procuraremos estabelecer, a partir da lei de recorrências, a fórmula do termo geral da progressão aritmética.

Vamos considerar uma PA de primeiro termo a_1 e razão r . Assim, teremos:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$$

$$a_5 = a_4 + r = a_1 + 4r$$

$$\begin{aligned} & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \end{aligned}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Exemplos

1º) Numa PA de primeiro termo $a_1 = 0$ e razão $r = 3$, temos o termo geral igual a:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = 0 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_n = 3 \cdot n - 3. \end{aligned}$$

Assim, se quisermos determinar o termo a_{23} desta PA, teremos:

$$a_{23} = 3 \cdot 23 - 3 \Rightarrow a_{23} = 66.$$

2º) Numa PA de primeiro termo $a_1 = 11$ e razão $r = -2$, temos o termo geral igual a:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = 11 + (n - 1) \cdot (-2) \\ &\Rightarrow a_n = -2 \cdot n + 13. \end{aligned}$$

Assim, se quisermos determinar o termo a_{12} desta PA, basta fazermos:

$$a_{12} = -2 \cdot 12 + 13 \Rightarrow a_{12} = -11.$$

3º) Numa PA de primeiro termo $a_1 = 0,3$ e razão $r = 0,2$, temos o termo geral igual a:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = 0,3 + (n - 1) \cdot (0,2) \\ &\Rightarrow a_n = 0,2 \cdot n + 0,1. \end{aligned}$$

Assim, se quisermos determinar o termo a_{20} desta PA, faremos:

$$a_{20} = 0,2 \cdot 20 + 0,1 \Rightarrow a_{20} = 4,1.$$

2.4. Artifícios de Resolução

Em diversas situações, quando fazemos uso de apenas alguns elementos da PA, é possível, através de artifícios de resolução, tornarmos o procedimento mais simples:

PA com três termos: $(a - r)$, a e $(a + r)$, razão igual a r .

PA com quatro termos: $(a - 3r)$, $(a - r)$, $(a + r)$ e $(a + 3r)$, razão igual a $2r$.

PA com cinco termos: $(a - 2r)$, $(a - r)$, a , $(a + r)$ e $(a + 2r)$, razão igual a r .

Exemplo

Determinar os números a , b e c cuja soma é igual a 15, o produto é igual a 105 e formam uma PA crescente.

Resolução

Fazendo $a = (b - r)$ e $c = (b + r)$ e sendo $a + b + c = 15$, teremos:

$(b - r) + b + (b + r) = 15 \Rightarrow 3b = 15 \Rightarrow b = 5$. Assim, um dos números, o termo médio da PA, já é conhecido.

Dessa forma a seqüência passa a ser:

$(5 - r)$, 5 e $(5 + r)$, cujo produto é igual a 105, ou seja:

$$\begin{aligned} (5 - r) \cdot 5 \cdot (5 + r) &= 105 \Rightarrow 5^2 - r^2 = 21 \\ \Rightarrow r^2 &= 4 \Rightarrow r = 2 \text{ ou } r = -2. \end{aligned}$$

Sendo a PA crescente, ficaremos apenas com $r = 2$.

Finalmente, teremos $a = 3$, $b = 5$ e $c = 7$.

2.5. Propriedades

P_1 : para três termos consecutivos de uma PA, o termo médio é a média aritmética dos outros dois termos.

Demonstração

Vamos considerar três termos consecutivos de uma PA: a_{n-1} , a_n e a_{n+1} . Podemos afirmar que:

$$(I) a_n = a_{n-1} + r \quad e$$

$$(II) a_n = a_{n+1} - r$$

Fazendo (I) + (II), obteremos:

$$2a_n = a_{n-1} + r + a_{n+1} - r$$

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$$

Portanto:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Portanto, para três termos consecutivos de uma PA, o termo médio é a média aritmética dos outros dois termos.

Exercícios Resolvidos

01. Escreva os cinco primeiros termos das seguintes progressões aritméticas:

- a) PA de primeiro termo 4 e razão 3;
- b) PA de primeiro termo 20 e razão -4.

Resolução

$$a) (4, 7, 10, 13, 16, \dots)$$

$$b) (20, 16, 12, 8, 4, \dots)$$

02. Calcule a razão das seguintes progressões aritméticas:

$$a) (2, 8, 14, \dots)$$

$$b) \left(3, \frac{7}{2}, 4, \dots\right)$$

$$c) (1, 1 - \sqrt{2}, 1 - 2\sqrt{2}, \dots)$$

Resolução

$$a) r = 8 - 2 = 6$$

$$b) r = \frac{7}{2} - 3 = \frac{7-6}{2} = \frac{1}{2}$$

$$c) r = 1 - \sqrt{2} - 1 = -\sqrt{2}$$

03. Calcule o primeiro termo e a razão de uma progressão aritmética cujo termo geral é:

$$a_n = 5 + 2n$$

Resolução

$$a_n = 5 + 2n \Rightarrow a_1 = 5 + 2 = 7$$

$$a_2 = 5 + 4 = 9$$

$$a_3 = 5 + 6 = 11$$

Logo, a PA é $(7, 9, 11, \dots)$, cuja razão é

$$r = 9 - 7 = 2.$$

Resposta: $a_1 = 7$; $r = 2$

04. Determine quantos múltiplos de 8 existem entre 14 e 701.

Resolução

$$14, \underline{16}, 24, 32, \dots, \underline{696}, 701$$

$$a_1 \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ termos}} \quad a_n$$

Cálculo do número de termos:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$696 = 16 + (n - 1) \cdot 8$$

$$696 = 16 + 8n - 8$$

$$696 = 8 + 8n$$

$$696 - 8 = 8n$$

$$8n = 688$$

$$n = 86$$

Resposta: O número de múltiplos é 86.

05. Interpole 4 meios aritméticos entre 14 e 49.

Resolução

$$\begin{array}{c} 14 \text{ --- } 49 \\ \downarrow \quad \underbrace{\hspace{2em}} \quad \downarrow \\ a_1 \quad \quad k=4 \quad \quad a_n \end{array}$$



Interpolair meios aritméticos significa completar a seqüência de tal forma que 14 e 49 sejam os extremos de uma PA; logo, precisamos determinar a razão.

$$\text{Dados: } \begin{cases} a_1 = 14 \\ a_n = 49 \\ n = k + 2 = 4 + 2 = 6 \end{cases}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$49 = 14 + (6 - 1)r$$

$$49 = 14 + 5r$$

$$r = 7$$

Resposta: (14, 21, 28, 35, 42, 49)

06. Três números estão em PA de tal forma que a soma entre eles é 15 e o produto é 80. Calcule os três números.

Resolução

$$\text{Fazendo } \begin{cases} a_1 = x - r \\ a_2 = x \\ a_3 = x + r \end{cases}$$

$$\text{temos: } \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 15 \\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 80 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - r + x + x + r = 15 \\ (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = 80 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 15 \\ x(x^2 - r^2) = 80 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$x = 5 \text{ e } r = \pm 3.$$

para $r = 3$

$$a_1 = 5 - 3 = 2$$

$$a_2 = 5$$

$$a_3 = 5 + 3 = 8$$

para $r = -3$

$$a_1 = 5 - (-3) = 8$$

$$a_2 = 5$$

$$a_3 = 5 - 3 = 2$$

Resposta: 2, 5 e 8

2.6. Termos Equidistantes dos Extremos

Numa seqüência finita, dizemos que dois termos são equidistantes dos extremos se a quantidade de termos que precederem o primeiro deles for igual à quantidade de termos que sucederem ao outro termo. Assim, na sucessão: $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_p, \dots, a_k, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, temos:

a_2 e a_{n-1} são termos equidistantes dos extremos;

a_3 e a_{n-2} são termos equidistantes dos extremos;

a_4 e a_{n-3} são termos equidistantes dos extremos.

Notemos que sempre que dois termos são equidistantes dos extremos, a soma dos seus índices é igual ao valor $n + 1$. Assim sendo, podemos generalizar que, se os termos a_p e a_k são equidistantes dos extremos, então: $p + k = n + 1$.

Propriedade

Numa PA com n termos, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma destes extremos.

Demonstração

Sejam, numa PA de n termos, a_p e a_k dois termos equidistantes dos extremos.

Teremos, então:

$$(I) \ a_p = a_1 + (p - 1) \cdot r \Rightarrow a_p = a_1 + p \cdot r - r$$

$$(II) \ a_k = a_1 + (k - 1) \cdot r \Rightarrow a_k = a_1 + k \cdot r - r$$

Fazendo (I) + (II), teremos:

$$a_p + a_k = a_1 + p \cdot r - r + a_1 + k \cdot r - r$$

$$a_p + a_k = a_1 + a_1 + (p + k - 1 - 1) \cdot r$$

Considerando que $p + k = n + 1$, ficamos com:

$$a_p + a_k = a_1 + a_1 + (n+1-1-1) \cdot r$$

$$a_p + a_k = a_1 + a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$\therefore a_p + a_k = a_1 + a_n$$

Portanto, numa PA com n termos, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma destes extremos.

Observação

Numa PA com n termos, em que n é um número ímpar, o termo médio (a_m) é a média aritmética dos extremos.

$$a_m = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

2.7. Soma dos // Primeiros Termos de uma PA

Vamos considerar a

PA($a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$) e representar por S_n a soma dos seus n termos, ou seja:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

(igualdade I)

Podemos escrever, também:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

(igualdade II)

Somando-se (I) e (II), temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Considerando que todas estas parcelas, colocadas entre parênteses, são formadas por termos equidistantes dos extremos e que a soma destes termos é igual à soma dos extremos, temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) \Rightarrow 2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$$

E, assim, finalmente:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Exercícios Resolvidos

01. Ache a soma dos sessenta primeiros termos da PA (2, 5, 8, ...).

Resolução

$$\text{Dados: } \begin{cases} a_1 = 2 \\ r = 5 - 2 = 3 \end{cases}$$

Cálculo de a_{60} :

$$a_{60} = a_1 + 59r \Rightarrow a_{60} = 2 + 59 \cdot 3$$

$$a_{60} = 2 + 177$$

$$a_{60} = 179$$

Cálculo da soma:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow S_{60} = \frac{(a_1 + a_{60}) \cdot 60}{2}$$

$$S_{60} = \frac{(2 + 179) \cdot 60}{2}$$

$$S_{60} = 5.430$$

Resposta: 5.430

02. Um atleta percorre sempre 500 metros a mais do que no dia anterior. Sabendo que ao final de 15 dias ele correu um total de 67.500 metros, calcule o número de metros percorridos no terceiro dia.

Resolução

A progressão é:

$$(x, x + 500, x + 1.000, \dots)$$

Logo:

$$x + x + 500 + x + 1.000 + \dots = 67.500$$

Cálculo de a_n :

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_n = x + (15 - 1) \cdot 500$$



$$a_n = x + 7.000$$

Cálculo de x :

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow 67.500 = \frac{(x + x + 7.000) \cdot 15}{2}$$

$$135.000 = (2x + 7.000) \cdot 15$$

$$9.000 = 2x + 7.000$$

$$2x = 2.000$$

$$x = 1.000$$

$$\text{Mas: } a_3 = x + 1.000 = 1.000 + 1.000 = 2.000$$

Resposta: 2.000 metros

03. A soma do quarto e oitavo termos de uma PA é 20; e o trigésimo primeiro termo é o dobro do décimo sexto termo. Determine a PA.

Resolução

$$\text{Temos: } \begin{cases} a_4 + a_8 = 20 \\ a_{31} = 2 \cdot a_{16} \end{cases}$$

Escrevendo cada termo em função de a_1 e r , obtemos:

$$\begin{cases} a_1 + 3r + a_1 + 7r = 20 \\ a_1 + 30r = 2(a_1 + 15r) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 10r = 20 \quad (1) \\ a_1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$2a_1 + 10r = 20$$

$$2(0) + 10r = 20$$

$$r = 2$$

Resposta: (0, 2, 4, 6, 8, ...)

04.

a) Determine a soma dos dez primeiros números naturais ímpares.

b) Qual é a soma dos n primeiros números naturais ímpares?

Resolução

a) Cálculo do décimo termo:

PA (1, 3, 5, ...)

$$a_{10} = a_1 + (n - 1)r$$

$$a_{10} = 1 + (10 - 1) \cdot 2$$

$$a_{10} = 1 + 9 \cdot 2$$

$$a_{10} = 1 + 18$$

$$a_{10} = 19$$

Cálculo da soma dos dez termos:

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2}$$

$$S_{10} = \frac{(1 + 19) \cdot 10}{2}$$

$$S_{10} = 100$$

b) Cálculo do n ésimo termo:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2$$

$$a_n = 1 + 2n - 2$$

$$a_n = 2n - 1$$

Cálculo da soma dos n primeiros termos

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$S_n = \frac{(1 + 2n - 1)n}{2}$$

$$S_n = n \cdot n$$

$$S_n = n^2$$

Resposta: a) 100; b) n^2

3. Progressão Geométrica (PG)

3.1. Definição

PG é uma sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo, é o anterior multiplicado por uma constante q chamada razão da PG.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

com a_1 conhecido e $n \in \mathbb{N}^*$

Exemplos

1°) (3, 6, 12, 24, 48, ...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = 3$ e razão $q = 2$.

2º) $\left(-36, -18, -9, -\frac{9}{2}, -\frac{9}{4}, \dots\right)$ é uma PG de

primeiro termo $a_1 = -36$ e razão $q = \frac{1}{2}$.

3º) $\left(15, 5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \dots\right)$ é uma PG de primeiro

termo $a_1 = 15$ e razão $q = \frac{1}{3}$.

4º) $(-2, -6, -18, -54, \dots)$ é uma PG de primeiro termo $a_1 = -2$ e razão $q = 3$.

5º) $(1, -3, 9, -27, 81, -243, \dots)$ é uma PG de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = -3$.

6º) $(5, 5, 5, 5, 5, \dots)$ é uma PG de primeiro termo $a_1 = 5$ e razão $q = 1$.

7º) $(7, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$ é uma PG de primeiro termo $a_1 = 7$ e razão $q = 0$.

8º) $(0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$ é uma PG de primeiro termo $a_1 = 0$ e razão q qualquer.

Observação – Para determinar a razão de uma PG, basta efetuarmos o quociente entre dois termos consecutivos: o posterior dividido pelo anterior.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (a_n \neq 0)$$

3.2. Classificação

As progressões geométricas são classificadas assim:

Crescente: quando cada termo é maior que o anterior. Isto ocorre quando $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou quando $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.

Decrescente: quando cada termo é menor que o anterior. Isto ocorre quando $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou quando $a_1 < 0$ e $q > 1$.

Alternante: quando cada termo apresenta sinal contrário ao do anterior. Isto ocorre quando $q < 0$.

Constante: quando todos os termos são iguais. Isto ocorre quando $q = 1$. Uma PG constante é também uma PA de razão $r = 0$. A PG constante é também chamada de PG estacionária.

Singular: quando o zero é um dos seus termos. Isto ocorre quando $a_1 = 0$ ou $q = 0$.

3.3. Fórmula do Termo Geral

A definição de PG está sendo apresentada por meio de uma lei de recorrências, e nós já aprendemos nos módulos anteriores que a fórmula do termo geral é mais prática. Por isso, estaremos, neste item, procurando estabelecer, a partir da lei de recorrências, a fórmula do termo geral da progressão geométrica.

Vamos considerar uma PG de primeiro termo a_1 e razão q . Assim, teremos:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

$$a_5 = a_4 \cdot q = a_1 \cdot q^4$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Exemplos

1º) Numa PG de primeiro termo $a_1 = 2$ e razão $q = 3$, temos o termo geral a_n igual a:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

Assim, se quisermos determinar o termo a_5 desta PG, faremos:

$$a_5 = 2 \cdot 3^4 \Rightarrow a_5 = 162$$

2º) Numa PG de primeiro termo $a_1 = 15$ e razão $q = \frac{1}{3}$, temos o termo geral a_n igual a:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 15 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Assim, se quisermos determinar o termo a_6 desta PG, faremos:

$$a_6 = 15 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \Rightarrow a_6 = \frac{5}{81}$$



3º) Numa PG de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = -3$, temos o termo geral a_n igual a:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 1 \cdot (-3)^{n-1}$$

Assim, se quisermos determinar o termo a_4 desta PG, faremos:

$$a_4 = 1 \cdot (-3)^3 \Rightarrow a_4 = -27$$

3.4. Artíficos de Resolução

Em diversas situações, quando fazemos uso de apenas alguns elementos da PG, é possível, através de artíficos de resolução, tornarmos o procedimento mais simples.

PG com três termos:

$$\frac{a}{q}; a; aq$$

PG com quatro termos:

$$\frac{a}{q^3}; \frac{a}{q}; aq; aq^3$$

PG com cinco termos:

$$\frac{a}{q^2}; \frac{a}{q}; a; aq; aq^2$$

Exemplo

Considere uma PG crescente formada de três números. Determine esta PG sabendo que a soma destes números é 13 e o produto é 27.

Resolução

Vamos considerar a PG em questão formada pelos termos a , b e c , onde $a = \left(\frac{b}{q}\right)$ e $c = b \cdot q$.

Assim,

$$\left(\frac{b}{q}\right) \cdot b \cdot bq = 27 \Rightarrow b^3 = 27 \Rightarrow b = 3.$$

Temos:

$$\left(\frac{3}{q}\right) + 3 + 3q = 13 \Rightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$q = 3 \text{ ou } q = \frac{1}{3}$$

Sendo a PG crescente, consideramos apenas $q = 3$. E, assim, a nossa PG é dada pelos números: 1, 3 e 9.

3.5. Propriedades

P₁: Para três termos consecutivos de uma PG, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos outros dois.

Demonstração

Vamos considerar três termos consecutivos de uma PG: a_{n-1} , a_n e a_{n+1} . Podemos afirmar que:

$$(I) \ a_n = a_{n-1} \cdot q \quad e$$

$$(II) \ a_n = \frac{a_{n+1}}{q}$$

Fazendo (I) $\cdot$ (II), obteremos:

$$(a_n)^2 = (a_{n-1} \cdot q) \cdot \left(\frac{a_{n+1}}{q}\right) \Rightarrow (a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Portanto:

$$(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Observação – Se a PG for positiva, o termo médio será a média geométrica dos outros dois:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

P₂: Numa PG, com n termos, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto destes extremos.

Demonstração

Sejam, numa PG de n termos, a_p e a_k dois termos eqüidistantes dos extremos.

Teremos, então:

$$(I) \quad a_p = a_1 \cdot q^{p-1}$$

$$(II) \quad a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$$

Multiplicando (I) por (II), ficaremos com:

$$a_p \cdot a_k = a_1 \cdot q^{p-1} \cdot a_1 \cdot q^{k-1}$$

$$a_p \cdot a_k = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{p-1+k-1}$$

Considerando que $p+k=n+1$, ficamos com:

$$a_p \cdot a_k = a_1 \cdot a_n$$

Portanto, numa PG, com n termos, o produto de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual ao produto destes extremos.

Observação – Numa PG positiva, com n termos, onde n é um número ímpar, o termo médio (a_m) é a média geométrica dos extremos ou de 2 termos eqüidistantes dos extremos.

$$a_m = \sqrt{a_1 \cdot a_n}$$

Exercícios Resolvidos

01. Escreva os cinco primeiros termos das seguintes progressões geométricas:

a) $a_1 = 2$ e $q = 5$

b) $a_1 = 80$ e $q = \frac{1}{2}$

c) $a_1 = -1$ e $q = -10$

Resolução

a) $(2, 10, 50, 250, 1.250, \dots)$

b) $(80, 40, 20, 10, 5, \dots)$

c) $(-1, 10, -100, 1.000, -10.000, \dots)$

Resposta

a) $(2, 10, 50, 250, 1.250, \dots)$

b) $(80, 40, 20, 10, 5, \dots)$

c) $(-1, 10, -100, 1.000, -10.000, \dots)$

02. Calcule a razão das seguintes progressões geométricas:

a) $(3, 6, 12, \dots)$

b) $\left(6, -1, \frac{1}{6}, -\frac{1}{36}, \dots\right)$

c) $(a^{n-5}, a^{n-3}, a^{n-1}, \dots)$

Resolução

a) $q = \frac{6}{3} = 2$

b) $q = \frac{-1}{6} = -\frac{1}{6}$

c) $q = \frac{a^{n-3}}{a^{n-5}} = a^{n-3-(n-5)} = a^2$

Resposta

a) 2

b) $-\frac{1}{6}$

c) a^2

03. (Mackenzie-SP) Se o oitavo termo de uma progressão geométrica é $\frac{1}{2}$ e a razão é $\frac{1}{2}$, o primeiro termo dessa progressão é:

a) 2^{-1}

d) 2^8

b) 2

e) $\sqrt[8]{\frac{1}{2}}$

c) 2^6

Resolução

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_8 = a_1 \cdot q^{8-1}$$

$$\frac{1}{2} = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$2^{-1} = a_1 \cdot (2^{-1})^7$$

$$2^{-1} = a_1 \cdot 2^{-7} \Rightarrow$$

$$a_1 = \frac{2^{-1}}{2^{-7}} = \frac{1}{2^{-6}} = 2^6$$

Resposta: C



04. (Osec-SP) O número de termos da PG

$$\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, \dots, 729\right) \text{ é:}$$

- a) 8 d) 81
b) 9 e) 4
c) 10

Resolução

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$729 = \frac{1}{9} \cdot 3^{n-1}$$

$$729 \cdot 9 = 3^{n-1}$$

$$3^{n-1} = 3^8 \Rightarrow n-1=8 \Rightarrow n=9$$

Resposta: B

05. (UGF-RJ) Em uma progressão geométrica, o primeiro termo é 4 e o quinto termo é 324. A razão dessa progressão geométrica é:

- a) 3 d) 2
b) 4 e) $\frac{1}{2}$
c) 5

Resolução

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$324 = 4 \cdot q^{5-1}$$

$$\frac{324}{4} = q^4$$

$$q^4 = 81 = 3^4 \Rightarrow q = 3$$

Resposta: A

06. (PUC-SP) Se a seqüência $(4x, 2x+1, x-1)$ é uma PG, então o valor de x é:

- a) $-\frac{1}{8}$ d) 8
b) -8 e) $\frac{1}{8}$
c) -1

Resolução

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow \frac{2x+1}{4x} = \frac{x-1}{2x+1}$$

$$(2x+1)^2 = (x-1) \cdot 4x$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 - 4x$$

$$8x = -1$$

$$x = -\frac{1}{8}$$

Resposta: A

07. (UFES) Qual a razão de uma PG de três termos, em que a soma dos termos é 14 e o produto 64?

- a) $q = 4$ d) $q = 4$ ou $q = 1$
b) $q = 2$ e) nda
c) $q = 2$ ou $q = \frac{1}{2}$

Resolução

Representando a PG por $\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{q} + x + x \cdot q = 14 \quad (1) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{q} \cdot x \cdot x \cdot q = 64 \quad (2) \end{array} \right.$$

De (2), obtemos:

$$x^3 = 64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} \Rightarrow x = 4$$

Substituindo $x = 4$ na equação (1), temos:

$$\frac{4}{q} + 4 + 4 \cdot q = 14 \Rightarrow 4q^2 - 10q + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow q' = 2 \\ \searrow q'' = \frac{1}{2} \end{array}$$

3.6. Soma dos // Primeiros Termos de uma PG

Vamos considerar a PG $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, com q diferente de 1 e representar por S_n a soma dos seus n termos, ou seja:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

(igualdade I)

Podemos escrever, multiplicando-se, membro a membro, a igualdade (I) por q :

$$q \cdot S_n = q \cdot a_1 + q \cdot a_2 + q \cdot a_3 + \dots + q \cdot a_{n-2} + q \cdot a_{n-1} + q \cdot a_n$$

Utilizando a fórmula do termo geral da PG, ou seja, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, teremos:

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_1 \cdot q^n$$

(igualdade II)

Subtraindo-se a equação I da equação II, teremos:

$$q \cdot S_n - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1 \Rightarrow S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot (q^n - 1)$$

E assim:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Se tivéssemos efetuado a subtração das equações em ordem inversa, a fórmula da soma dos termos da PG ficaria:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

Evidentemente que por qualquer um dos “caminhos” o resultado final é o mesmo. É somente uma questão de forma de apresentação.

Observação

Para $q = 1$, teremos $S_n = n \cdot a_1$

3.7. Série Convergente (PG Convergente)

Dada a seqüência $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, chamamos de série a seqüência $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, \dots, S_{n-2}, S_{n-1}, S_n$, tal que:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

.

.

.

$$S_{n-2} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{n-2}$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Vamos observar, como exemplo, numa PG com primeiro termo $a_1 = 4$ e razão $q = \frac{1}{2}$, a série que ela vai gerar.

Os termos que vão determinar a progressão geométrica são: $\left(4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \dots\right)$



E, portanto, a série correspondente será:

$$S_1 = 4$$

$$S_2 = 4 + 2 = 6$$

$$S_3 = 4 + 2 + 1 = 7$$

$$S_4 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$$

$$S_5 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{31}{4} = 7,75$$

$$S_6 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{63}{8} = 7,875$$

$$S_7 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{127}{16} = 7,9375$$

$$S_8 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{255}{32} = 7,96875$$

$$S_9 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{511}{64} = 7,984375$$

$$S_{10} = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} = \frac{1.023}{128} = 7,9921875$$

Devemos notar que a cada novo termo calculado, na PG, o seu valor numérico cada vez mais se aproxima de zero. Dizemos que esta é uma progressão geométrica **convergente**.

Por outro lado, na série, é cada vez menor a parcela que se acrescenta. Desta forma, o último termo da série vai tendendo a um valor que parece ser o **limite** para a série em estudo. No exemplo numérico, estudado anteriormente, nota-se claramente que este valor limite é o número 8.

Bem, vamos dar a esta discussão um caráter matemático.

É claro que, para a PG ser convergente, é necessário que cada termo seja, em valor absoluto, inferior ao anterior a ele. Assim, temos que:

$$PG \text{ convergente} \Leftrightarrow |q| < 1$$

ou

$$PG \text{ convergente} \Leftrightarrow -1 < q < 1$$

Resta estabelecermos o limite da série, que é o S_n para quando n tende ao infinito, ou seja, estabelecermos a soma dos infinitos termos da PG convergente.

Vamos partir da soma dos n primeiros termos da PG:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

Estando q entre os números -1 e 1 e, sendo n um expoente que tende a um valor muito grande, pois estamos somando os infinitos termos desta PG, é fácil deduzir que q^n vai apresentando um valor cada vez mais próximo de zero. Para valores extremamente grandes de n não constitui erro considerar que q^n é igual a zero. E, assim, teremos:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

Observação

Quando a PG é não-singular (seqüência com termos não-nulos) e a razão q é de tal forma que $|q| \geq 1$, a série é **divergente**. Séries divergentes não apresentam soma finita.

Exercícios Resolvidos

01. (Fesp-SP) A soma dos seis primeiros termos da PG $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \dots\right)$ é:

a) $\frac{12}{33}$

d) $\frac{21}{32}$

b) $\frac{15}{32}$

e) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{21}{33}$

Resolução

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow$$

$$S_6 = \frac{\frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^6 - 1 \right]}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$S_6 = \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{64} - 1 \right)}{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-63}{64} \right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{+21}{64} \cdot 2$$

$$S_6 = \frac{21}{32}$$

Resposta: D

02. Seja s a soma dos n primeiros termos da PG $(1, 3, 9, 27, \dots)$. A soma dos n primeiros

termos da PG $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots\right)$ em função de s é:

a) $\frac{3s}{2s+1}$

d) $\frac{2s+1}{3s}$

b) $\frac{2s}{s-1}$

e) $\frac{s}{2}$

c) $5s$

Resolução

Para a PG $(1, 3, 9, 27, \dots)$, temos:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$s = \frac{1(3^n - 1)}{3 - 1}$$

$$3^n = 2s + 1 \quad (1)$$

Para a PG $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots\right)$, temos:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_n = \frac{1 \left[\left(\frac{1}{3} \right)^n - 1 \right]}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{\frac{1}{3^n} - 1}{-\frac{2}{3}}$$

$$S_n = \frac{3 \cdot (3^n - 1)}{2 \cdot 3^n} \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$S_n = \frac{3s}{2s+1}$$

Resposta: A

03. (UEPA-PA) A soma da série infinita

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots \text{ é:}$$

a) $\frac{6}{5}$

d) 2

b) $\frac{7}{5}$

e) $\frac{7}{4}$

c) $\frac{5}{4}$

Resolução

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{5}}{1} = \frac{1}{5}$$

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

$$S_n = \frac{1}{\frac{4}{5}}$$



$$S_n = \frac{5}{4}$$

Resposta: C

04. A soma dos termos de uma PG infinita é 3. Sabendo-se que o primeiro termo é igual a 2, então o quarto termo dessa PG é:

a) $\frac{2}{27}$

d) $\frac{1}{27}$

b) $\frac{1}{4}$

e) $\frac{3}{8}$

c) $\frac{2}{3}$

Resolução

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

$$3 = \frac{2}{1-q} \Rightarrow 3(1-q) = 2$$

$$3 - 3q = 2$$

$$3q = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^{4-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow a_4 = \frac{2}{27}$$

Resposta: A

05. (PUC-RS) O limite da soma dos termos da progressão geométrica $\left(1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \dots\right)$, em que $x > 1$, é 4. Então, o valor de x é:

a) $\frac{4}{3}$

d) $\frac{8}{3}$

b) $\frac{5}{3}$

e) $\frac{10}{3}$

c) $\frac{7}{3}$

Resolução

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

$$4 = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \Rightarrow$$

$$4\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$$

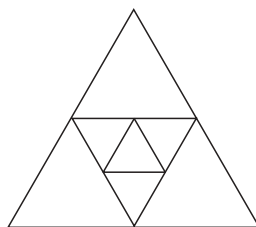
$$4 - \frac{4}{x} = 1$$

$$\frac{4}{x} = 3 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

Resposta: A

06. A medida do lado de um triângulo equilátero é 10. Unindo-se os pontos médios de seus lados, obtém-se um segundo triângulo equilátero. Unindo-se os pontos médios dos lados deste novo triângulo equilátero, obtém-se um terceiro, e assim por diante, indefinidamente. Calcule a soma dos perímetros de todos esses triângulos.

Resolução



Temos: perímetro do 1º triângulo = 30

perímetro do 2º triângulo = 15

perímetro do 3º triângulo = $\frac{15}{2}$

$\vdots$

Logo, devemos calcular a soma dos termos da PG

infinita $\left(30, 15, \frac{15}{2}, \dots\right)$ na qual $a_1 = 30$ e $q = \frac{1}{2}$.

$$S = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S = \frac{30}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{30}{\frac{1}{2}} = 60$$

Resposta: 60

Capítulo 02. Matrizes

A tabela seguinte mostra a situação das equipes no Campeonato Paulista de Basquete masculino.

Campeonato Paulista – Classificação		
Time		Pontos
1º	Tilibra/Copimax/Bauru	20
2º	COC/Ribeirão Preto	20
3º	Unimed/Franca	19
4º	Hebraica/Blue Life	17
5º	Uniará/Fundesport	16
6º	Pinheiros	16
7º	São Caetano	16
8º	Rio Pardo/Sadia	15
9º	Valtra/UBC	14
10º	Unisanta	14
11º	Leitor/Casa Branca	14
12º	Palmeiras	13
13º	Santo André	13
14º	Corinthians	12
15º	São José	12

Fonte: FPB (Federação Paulista de Basquete)

Folha de S. Paulo - 23/10/01

Observando a tabela, podemos tirar conclusões por meio de comparações das informações apresentadas, por exemplo:

→ COC/Ribeirão lidera a classificação com 20 pontos juntamente com Tilibra/Bauru.

→ Essa informação encontra-se na 2ª linha e 3ª coluna.

Vamos construir uma outra tabela somente com os três primeiros colocados.

		PG	PP	C3
1º	Tilibra	20	5	12
2º	COC	20	6	15
3º	Unimed	19	8	11

PG = Pontos Ganhos

PP = Pontos Perdidos

C3 = Cestas de 3 pontos

A consulta à tabela, certamente, nos dará várias informações. Tente!

O matemático inglês James Joseph Sylvester (1814 – 1897) usou, pela primeira vez, esta forma de trabalhar com um conjunto de informações, dispostas em linhas e colunas em uma tabela.

Sylvester chamou de *matrizes* as tabelas montadas dessa forma; a tabela acima é uma matriz 3×3 (3 por 3), isto é, possui 3 linhas e 3 colunas e é representada por:

$$\begin{bmatrix} 20 & 5 & 12 \\ 20 & 6 & 15 \\ 19 & 8 & 11 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 20 & 5 & 12 \\ 20 & 6 & 15 \\ 19 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

As matrizes, como instrumento de trabalho matemático, geraram um novo campo de estudo (a Álgebra Linear), além de serem utilizadas em outras áreas de estudo e pesquisa.

1. Definições

Chamamos de **matriz** $m \times n$ ($m \in \mathbb{N}^*$ e $n \in \mathbb{N}^*$) qualquer tabela formada por $m \cdot n$ elementos (informações) dispostos em m linhas e n colunas.



Exemplos

1º) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2×4

2º) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz 3×3

3º) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz 1×3

4º) $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2×1

O nome de uma matriz é dado utilizando letras maiúsculas do alfabeto latino, A , por exemplo, enquanto os elementos da matriz são indicados por letras latinas minúsculas, a mesma do nome de matriz, afetadas por dois índices, que indicam a linha e a coluna que o elemento ocupa na matriz.

Assim, um elemento genérico da matriz A é representado por a_{ij} .

O primeiro índice, i , indica a linha que esse elemento ocupa na matriz, e o segundo índice, j , a coluna desse elemento.

$$A = \begin{bmatrix} & & & \\ & a_{ij} & & \\ & & & \end{bmatrix} \leftarrow i\text{-ésima linha}$$

$\uparrow$
 $j\text{-ésima}$
 coluna

Exemplo

Na matriz B de ordem 2×3 temos:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = 1; b_{12} = 0; b_{13} = 3; b_{21} = 2;$$

$$b_{22} = -1; b_{23} = 4$$

Observação

O elemento b_{23} , por exemplo, lemos assim:

“b dois três”

De uma forma geral, a matriz A , de ordem $m \times n$, é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou com a notação abreviada:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

2. Matrizes Especiais

Apresentamos aqui a nomenclatura de algumas matrizes especiais:

I. Matriz Linha

É a matriz que possui uma única linha.

Exemplos

1º) $A = [-1, 0]$

2º) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

II. Matriz Coluna

É a matriz que possui uma única coluna.

Exemplos

1º) $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

2º) $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

III. Matriz Nula

É a matriz que possui todos os elementos iguais a zero.

Exemplos

1º) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2º) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

IV. Matriz Quadrada

É a matriz que possui o número de linhas igual ao número de colunas.

Exemplos

1º) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ é a matriz quadrada de ordem 2.

2º) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz quadrada de ordem 3.

Observações

1ª) Quando uma matriz não é quadrada, ela é chamada de **retangular**.

2ª) Dada uma matriz quadrada de ordem n , chamamos de **diagonal principal** da matriz ao conjunto dos elementos que possuem índices iguais.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}\}$ é a diagonal principal da matriz A .

3ª) Dada a matriz quadrada de ordem n , chamamos de **diagonal secundária** da matriz ao conjunto dos elementos que possuem a soma dos dois índices igual a $n + 1$.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$\{a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}\}$ é a diagonal secundária da matriz A .

V. Matriz Diagonal

É a matriz quadrada que apresenta todos os elementos, não pertencentes à diagonal principal, iguais a zero.

Exemplos

$$1^\circ) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2^\circ) B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

VI. Matriz Identidade

É a matriz diagonal que apresenta todos os elementos da diagonal principal iguais a 1.

Representamos a matriz identidade de ordem n por I_n .

Exemplos

$$1^\circ) I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2^\circ) I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observação

Para uma matriz identidade $I_n = (a_{ij})_{n \times n}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

VII. Matriz Transposta

Dada uma matriz A , chamamos de matriz transposta de A a matriz obtida de A trocando-se, "ordenadamente", suas linhas por colunas. Indicamos a matriz transposta de A por A^t .



Exemplos

$$1^{\circ}) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \text{ então } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$2^{\circ}) B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ então } B^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Observação

Se uma matriz A é de ordem $m \times n$, a matriz A^t , transposta de A , é de ordem $n \times m$.

3. Igualdade de Matrizes

Sendo A e B duas matrizes de mesma ordem, dizemos que um elemento de matriz A é **correspondente** a um elemento de B quando eles ocupam a mesma posição nas respectivas matrizes.

Exemplo

Sendo A e B duas matrizes de ordem 2×2 ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

São elementos correspondentes de A e B , os pares:

$$a_{11} \text{ e } b_{11}; a_{12} \text{ e } b_{12}; a_{21} \text{ e } b_{21}; a_{22} \text{ e } b_{22}.$$

Definição

Duas matrizes A e B são **iguais** se, e somente se, têm a mesma ordem e os elementos correspondentes são iguais.

Indica-se:

$$A = B$$

Então:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \text{ e } B = (b_{ij})_{p \times q}$$

$$A = B \Rightarrow \begin{cases} m = p \text{ e } n = q \\ e \\ a_{ij} = b_{ij} \end{cases} \begin{cases} \forall i, 1 \leq i \leq m \\ \forall j, 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Exemplo

Determine x e y , sabendo-se que

$$\begin{pmatrix} x + y \\ 3x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Resolução

Devemos ter:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $x = 3$ e $y = 4$.

Observações

1ª) Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, dizemos que uma matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$ é **oposta de A** quando $b_{ij} = -a_{ij}$ para todo i , $1 \leq i \leq m$, e todo j , $1 \leq j \leq n$.

Indicamos que $B = -A$.

Exemplos

$$1^{\circ}) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$2^{\circ}) B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow -B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

2ª) Dizemos que uma matriz quadrada

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ é **simétrica** quando $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i , $1 \leq i \leq m$, e para todo j , $1 \leq j \leq n$. Isto é, $A = A^t$.

3ª) Dizemos que uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é **anti-simétrica** quando $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i , $1 \leq i \leq m$, e para todo j , $1 \leq j \leq n$. Isto é, A é **anti-simétrica** quando $A^t = -A$.

Exemplos

$$1^{\circ}) A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2^{\circ}) B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Adição e Subtração de Matrizes

4.1. Definição

Dadas duas matrizes A e B, de mesma ordem $m \times n$, denominamos **soma** da matriz A com a matriz B à matriz C, de ordem $m \times n$, cujos elementos são obtidos quando somamos os elementos correspondentes das matrizes A e B. Indicamos:

$$C = A + B$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 3+1 & 4+1 \\ 2+3 & 1+2 & -2+3 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2. Propriedades da Adição

Sejam A, B e C matrizes $m \times n$ e O a matriz nula $m \times n$, valem as seguintes propriedades.

- 1ª) $A + B = B + A$ (comutativa)
- 2ª) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativa)
- 3ª) $A + O = O + A = A$ (elemento neutro)
- 4ª) $A + (-A) = (-A) + A = O$ (elemento oposto)
- 5ª) $(A + B)^t = A^t + B^t$

Definição

Consideremos duas matrizes A e B, ambas de mesma ordem $m \times n$. Chamamos de **diferença** entre A e B (indicamos com $A - B$) a soma de A com a oposta de B.

$$A - B = A + (-B)$$

Exemplo

$$\text{Sendo } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ então:}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 3+(-4) & 2+(-5) \\ 1+2 & -2+(-1) \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Observação

Na prática, para obtermos a subtração de matrizes de mesma ordem, basta subtrairmos os elementos correspondentes.

5. Multiplicação de Matrizes por um Número Real

5.1. Definição

Consideremos uma matriz A, de ordem $m \times n$, e um número real α . O **produto** de α por A é uma matriz B, de ordem $m \times n$, obtida quando multiplicamos cada elemento de A por α . Indicamos:

$$B = \alpha \cdot A$$

Exemplo

$$\text{Sendo } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \text{ temos}$$

$$2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

5.2. Propriedades

Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$ e os números reais α e β . Valem as seguintes propriedades:

- 1ª) $1 \cdot A = A$
- 2ª) $(-1) \cdot A = -A$
- 3ª) $\alpha \cdot O = O$
- 4ª) $0 \cdot A = O$



$$5^a) \alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \beta) \cdot A$$

$$6^a) \alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$$

$$7^a) (\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

Exercícios Resolvidos

01. Construa a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ sabendo-se que $a_{ij} = 3i - j + 1$.

Resolução

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 3(1) - 1 + 1 = 3$$

$$a_{12} = 3(1) - 2 + 1 = 2$$

$$a_{13} = 3(1) - 3 + 1 = 1$$

$$a_{21} = 3(2) - 1 + 1 = 6$$

$$a_{22} = 3(2) - 2 + 1 = 5$$

$$a_{23} = 3(2) - 3 + 1 = 4$$

Assim:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

02. Represente a matriz $B = (b_{ij})_{2 \times 2}$ tal que

$$b_{ij} = \begin{cases} i + j, & \text{se } i \neq j \\ i^2, & \text{se } i = j \end{cases}$$

Resolução

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = 1^2 = 1$$

$$b_{12} = 1 + 2 = 3$$

$$b_{21} = 2 + 1 = 3$$

$$b_{22} = 2^2 = 4$$

Assim:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

03. Dada a matriz $C = (c_{ij})_{3 \times 3}$ definida por $c_{ij} = 2i + j$, determine:

a) a soma dos elementos da diagonal principal;

b) a soma dos elementos da diagonal secundária.

Resolução

a) os elementos da diagonal principal têm $i = j$, então $c_{ii} = 2i + i = 3i$

$$c_{11} = 3 \quad c_{22} = 6 \quad c_{33} = 9$$

$$\text{SOMA} = 3 + 6 + 9 = 18$$

b) os elementos da diagonal secundária na matriz 3×3 têm $i + j = 4 \Rightarrow j = 4 - i$, então $2i + 4 - i = i + 4$

$$c_{13} = 5 \quad c_{22} = 6 \quad c_{31} = 7$$

$$\text{SOMA: } 5 + 6 + 7 = 18$$

Outra solução é escrever a matriz:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = 3 \quad c_{21} = 5 \quad c_{31} = 7$$

$$c_{12} = 4 \quad c_{22} = 6 \quad c_{32} = 8$$

$$c_{13} = 5 \quad c_{23} = 7 \quad c_{33} = 9$$

$$\text{a) } 3 + 6 + 9 = 18$$

$$\text{b) } 5 + 6 + 7 = 18$$

04. Determine $b \in \mathbb{R}$, para que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2b \\ b^2 & b \end{bmatrix} \text{ seja simétrica.}$$

Resolução

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2b \\ b^2 & b \end{bmatrix}, \quad A^t = \begin{bmatrix} 3 & b^2 \\ 2b & b \end{bmatrix} \text{ e } A = A^t$$

Devemos ter:

$$3 = 3 \quad b = b$$

$$2b = b^2$$

$$b^2 - 2b = 0$$

$$b(b - 2) = 0$$

$$b = 0 \text{ ou } b = 2$$

Resposta: $b = 0$ ou $b = 2$

05. Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 6 & 9 & -1 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 0 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine a matriz $A - 6B - 2C$.

Resolução

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -5 \\ -6 & -9 & +1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -5 & 1 & 0 \\ -7 & -8 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -18 & -18 & -18 \\ -18 & 0 & -30 \\ -36 & -54 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -8 & -8 \\ -10 & 2 & 0 \\ -14 & -16 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -24 & -24 & -24 \\ -26 & 3 & -33 \\ -49 & -70 & 8 \end{bmatrix}$$

6. Multiplicação de Matrizes

Consideremos inicialmente o problema abaixo:

A aprovação de um aluno de um determinado colégio, sem a necessidade de fazer os exames finais em uma disciplina, é determinada quando o total de pontos que o aluno consegue é igual ou superior a 50 pontos. Para obter esses pontos, as notas dos quatro bimestres devem ser multiplicadas respectivamente por 1, 2, 2 e 3 (pesos), e em seguida os produtos são somados. Assim, por exemplo, se as notas de um aluno, em Português, foram 7, 6, 5 e 8, o total de pontos será:

$$\text{Total} = 7 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 8 \cdot 3 = 53$$

Consideremos agora a tabela das notas de um determinado aluno e analisemos a situação desse aluno quanto à dispensa ou não dos exames finais.

Disciplinas	Notas por bimestre			
	1º	2º	3º	4º
Português	8	9	6	6
Matemática	7	5	5	7
Ciências	5	4	6	8
História	8	5	6	7
Geografia	6	7	7	6
Inglês	4	8	7	6

Essa tabela de notas é a matriz N .

$$\text{Assim: } N = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 6 & 6 \\ 7 & 5 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 7 & 6 \\ 4 & 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Consideremos agora a tabela dos pesos atribuídos às notas de cada disciplina ao longo dos 4 bimestres do ano.

Bimestres	Pesos
1º	1
2º	2
3º	2
4º	3

Vamos chamar essa tabela de pesos de matriz P .

Assim:

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



Ao final do ano, os totais de pontos em cada uma das disciplinas são:

Português: $8 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 56$

Matemática: $7 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 48$

Ciências: $5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 8 \cdot 3 = 49$

História: $8 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 51$

Geografia: $6 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 52$

Inglês: $4 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 52$

Dessa forma, obtemos a matriz T dos totais de pontos.

$$T = \begin{bmatrix} 56 \\ 48 \\ 49 \\ 51 \\ 52 \\ 52 \end{bmatrix}$$

Ao analisarmos a matriz T , concluímos que o aluno não está dispensado do exame final nas disciplinas de Matemática e Ciências.

Observemos agora que cada elemento da matriz T foi obtido pela multiplicação ordenada dos elementos de uma linha da matriz N pelos elementos que formam a coluna da matriz P .

Dessa forma, indicamos:

$$N \cdot P = T$$

Esquematicamente, temos:

$$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 6 & 6 \\ 7 & 5 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 7 & 6 \\ 4 & 8 & 7 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \\ 7 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 3 \\ 5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 8 \cdot 3 \\ 8 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 \\ 6 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \\ 4 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 6 & 6 \\ 7 & 5 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 7 & 6 \\ 4 & 8 & 7 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 \\ 48 \\ 49 \\ 51 \\ 52 \\ 52 \end{bmatrix}$$

6.1. Definição

O produto (linha por coluna) de uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times p}$ por uma matriz $B = (b_{ij})_{p \times n}$ é uma matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, de modo que cada elemento c_{ij} é obtido multiplicando-se ordenadamente os elementos da **linha i** de A pelos elementos da **coluna j** de B , e somando-se os produtos assim obtidos. Indicamos:

$$C = A \cdot B$$

Esquematicamente:

$$\begin{matrix} m \times p & p \times n & m \times n \\ A & \cdot & B = C \end{matrix}$$

Em que: $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj}$

Da definição, decorre que:

1. Só existe o produto de uma matriz A por uma matriz B se o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B .

$$A_{m \times p} \quad B_{p \times n}$$

2. A matriz C , produto de $A_{m \times p}$ por $B_{p \times n}$, é do tipo $m \times n$.

$$A_{m \times p} \quad C_{m \times n} \quad B_{p \times n}$$

6.2. Propriedades

Sendo A uma matriz de ordem $m \times n$, B e C matrizes convenientes e $\alpha \in R$, são válidas as seguintes propriedades.

1ª) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (associativa)

2ª) $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$ (distributiva pela esquerda)

3ª) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (distributiva pela direita)

4ª) $A \cdot I_n = I_m \cdot A = A$ (elemento neutro)

5ª) $(\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B) = \alpha \cdot (A \cdot B)$

6ª) $A \cdot O_{n \times p} = O_{m \times p}$ e $O_{p \times m} \cdot A = O_{p \times n}$

7ª) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Observação

Para a multiplicação de matrizes não vale a propriedade comutativa ($A \cdot B \neq B \cdot A$). Esta propriedade só é verdadeira em situações especiais, quando dizemos que as matrizes são comutáveis.

Devemos levar em consideração os fatos seguintes:

1º) $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, pois $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

2º) $(A \cdot B)^t \neq A^t \cdot B^t$, pois, pela 7ª propriedade, devemos ter $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Exercícios Resolvidos

01. Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

verifique se existe AB e, em caso afirmativo, calcule esse produto.

$$A_{3 \times 2} \cdot B_{2 \times 2} = C_{3 \times 2}$$

Resolução

O produto AB existe e C é de ordem 3×2 , ou seja:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8$$

$$c_{12} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = -1 + 0 = -1$$

$$c_{21} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 6 + 0 = 6$$

$$c_{22} = 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = -3 + 0 = -3$$

$$c_{31} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8$$

$$c_{32} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = -1 + 0 = -1$$

Assim:

$$C = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 6 & -3 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$



02. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e

$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, obter os produtos AB e BA , caso existam.

Resolução

$A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 3} \Rightarrow \exists A \cdot B$
e será $AB = C_{2 \times 3}$.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) = -2 - 3 = -5$$

$$c_{12} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 1 + 9 = 10$$

$$c_{13} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 2 + 0 = 2$$

$$c_{21} = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) = -4 - 1 = -5$$

$$c_{22} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 2 + 3 = 5$$

$$c_{23} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 4 + 0 = 4$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 2 \\ -5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$B_{2 \times 3} \cdot A_{2 \times 2} \Rightarrow \nexists B \cdot A$

Observa-se que: dadas duas matrizes A e B , o produto $A \cdot B$ pode existir e o produto $B \cdot A$ pode não existir.

03. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e

$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, obter AB e BA , caso existam.

Resolução

$A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 2}$ existe AB e BA .

$B_{2 \times 2} \cdot A_{2 \times 2}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Note que a multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, pode existir AB e BA e ainda $AB \neq BA$.

Caso aconteça $AB = BA$, dizemos que A e B são matrizes comutáveis.

04. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, obter os produtos AB e BA .

Resolução

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

A e B são comutáveis.

05. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e

$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, obter $A \cdot B$

Resolução

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

Observação

O produto de duas matrizes não-nulas pode resultar numa matriz nula.

Portanto, se A e B são matrizes e $A \cdot B = O$, nem sempre é verdade que $A = O$ ou $B = O$.

06. Dadas as matrizes, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, obter $A \cdot B$ e $A \cdot C$, caso existam.

Resolução

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -10 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -10 \end{bmatrix}$$

Note que $A \cdot B = A \cdot C$, mas $B \neq C$.

Observação

A lei de cancelamento para a multiplicação nem sempre é válida para as matrizes. Assim, $A \cdot B = A \cdot C$ não significa que $B = C$.

07. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ obter:

a) $(A+B)^2$

b) $A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$

c) $A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2$

Resolução

a) $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 8 \\ 40 & 21 \end{bmatrix}$$

b) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -7 \\ 14 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 & 14 \\ 18 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -7 \\ 14 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2 = \begin{bmatrix} 28 & 9 \\ 35 & 14 \end{bmatrix}$$

c) $B \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 14 & 4 \end{bmatrix}$

$$A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 14 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -7 \\ 14 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2 = \begin{bmatrix} 21 & 8 \\ 40 & 21 \end{bmatrix}$$

Observação: Note que

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2, \text{ pois}$$

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2$$

08. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ obter:

a) $(A \cdot B)^t$

b) $A^t \cdot B^t$

c) $B^t \cdot A^t$

Resolução

a) $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$

$$(A \cdot B)^t = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

b) $A^t \cdot B^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

c) $B^t \cdot A^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

Observação:

Note que $(A \cdot B)^t \neq A^t \cdot B^t$ e $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$, conforme a 7ª propriedade.



7. Matriz Inversa

No conjunto dos números reais, para todo $a \neq 0$, existe um número b , denominado inverso de a , satisfazendo a condição:

$$a \cdot b = b \cdot a = 1$$

Normalmente indicamos o inverso de a por $\frac{1}{a}$ ou a^{-1} .

Analogamente para as matrizes temos o seguinte:

7.1. Definição

Uma matriz A , quadrada de ordem n , diz-se **inversível** se, e somente se, existir uma matriz B , quadrada de ordem n , tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

A matriz B é denominada inversa de A e indicada por A^{-1} .

Exemplos

1º) Verifique que a matriz $B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ é a

inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Resolução

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $A \cdot B = B \cdot A = I_2$, a matriz B é a inversa de A , isto é, $B = A^{-1}$.

Observação

É bom observarmos que, de acordo com a definição, a matriz A também é a inversa de B , isto é, $A = B^{-1}$, ou seja, $A = (A^{-1})^{-1}$.

2º) Encontre a matriz inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ se existir.}$$

Resolução

Supondo que $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é a matriz inver-

sa de A , temos:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3a + c & 3b + d \\ 2a + c & 2b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$\begin{cases} 3a + c = 1 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3b + d = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas, encontramos:

$$a = 1, b = -1, c = -2 \text{ e } d = 3.$$

$$\text{Assim, } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Por outro lado:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz A é inversível e sua inversa é a matriz:

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Observação

Quando uma matriz é inversível, dizemos que ela é uma matriz não-singular; caso a matriz não seja inversível, dizemos que ela é uma matriz singular.

7.2. Propriedades

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n e inversíveis, temos as seguintes propriedades:

$$1^a) (A^{-1})^{-1} = A$$

$$2^a) (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

$$3^a) (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

4^a) Dada A , se existir A^{-1} , então A^{-1} é única.

Exemplos

1º) Sendo A , B e X matrizes inversíveis de ordem n , isolar X em $(X \cdot A)^{-1} = B$.

Resolução

$$(X \cdot A)^{-1} = B \Rightarrow A^{-1} \cdot X^{-1} = B$$

Multiplicando os dois membros à esquerda por A , encontramos:

$$A \cdot A^{-1} \cdot X^{-1} = A \cdot B$$

Como $A \cdot A^{-1} = I_n$, então:

$$I_n \cdot X^{-1} = A \cdot B$$

Como I_n é elemento neutro na multiplicação de matrizes, temos:

$$X^{-1} = A \cdot B$$

Elevando os dois membros da igualdade, ao expoente -1 , temos:

$$(X^{-1})^{-1} = (A \cdot B)^{-1}$$

Assim, $X = (A \cdot B)^{-1}$, ou então

$$X = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

2º) Dada as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$, determinar a matriz X na equação $A \cdot X = B$.

Resolução

1º modo:

$$\begin{array}{ccc} A \cdot X & = & B_{2 \times 1} \Rightarrow m = 2 \text{ e } n = 1 \\ \begin{array}{cc} 2 \times 2 & m \times n \end{array} & & \end{array}$$


$$\text{Então, } X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Assim, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x + 3y \\ 2x + 5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{Então: } \begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos: $x = 1$ e $y = 1$

$$\text{Portanto, } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2º modo:

Sendo A uma matriz inversível, temos:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$\text{Sendo } A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ temos:}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a + 3c & b + 3d \\ 2a + 5c & 2b + 5d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 3c = 1 \\ 2a + 5c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b + 3d = 0 \\ 2b + 5d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas, temos:

$$a = -5, b = 3, c = 2 \text{ e } d = -1.$$

$$\text{Então, } A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$X = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Assim, } X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Exercícios Resolvidos

01. Obter a matriz inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolução:

Seja $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ devemos ter:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2x+z & 2y+t \\ x+z & y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x+z=1 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow x=1 \text{ e } z=-1$$

$$\begin{cases} 2y+t=0 \\ y+t=1 \end{cases} \Rightarrow y=-1 \text{ e } t=2$$

$$\text{Então } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Verificação

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

02. Obter a matriz inversa da matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolução

Seja $B^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ devemos ter:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2x+z & 2y+t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta igualdade é impossível, então não existe matriz inversa da matriz B, dizemos que B é uma matriz singular.

03. Verificar as propriedades abaixo para

a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) $(A^{-1})^{-1} = A$

b) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

Resolução:

a) Inicialmente vamos obter A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a+c=1 \\ 2a+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=1 \\ c=-2 \end{matrix} \quad \begin{cases} 3b+d=0 \\ 2b+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b=-1 \\ d=3 \end{matrix}$$

$$\text{Assim } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Obteremos agora $(A^{-1})^{-1}$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } (A^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x-z & y-t \\ -2x+3z & -2y+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x-z=1 \\ -2x+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=3 \\ z=2 \end{matrix} \quad \begin{cases} y-t=0 \\ -2y+3t=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y=1 \\ t=1 \end{matrix}$$

$$\text{Assim } (A^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Logo } (A^{-1})^{-1} = A \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 3e+2g & 3f+2h \\ e+g & f+h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) No item a já obtivemos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ então } (A^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 3e+2g=1 \\ e+g=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} e=1 \\ g=-1 \end{matrix} \quad \begin{cases} 3f+2h=0 \\ f+h=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} f=-2 \\ h=3 \end{matrix}$$

vamos obter agora $(A^t)^{-1}$

$$\text{Assim } (A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } (A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$\text{Logo } (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$



Capítulo 03. Determinantes

Chamamos de determinante a teoria desenvolvida por matemáticos dos séculos XVII e XVIII, como Leibniz e Seki Shinsuke Kowa, que procuravam uma fórmula para determinar as soluções de um “sistema linear”, assunto que estudaremos a seguir.

Esta teoria consiste em associar a cada matriz quadrada A , um único número real que denominamos **determinante de A** e que indicamos por **det A** ou colocamos os elementos da matriz A entre duas barras verticais, como no exemplo abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

1. Definições

1.1. Determinante de uma Matriz de Ordem 1

Seja a matriz quadrada de ordem 1:

$$A = [a_{11}]$$

Chamamos **determinante** dessa matriz o número:

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}$$

Exemplos

$$1^\circ) A = [-2] \rightarrow \det A = -2$$

$$2^\circ) B = [5] \rightarrow \det B = 5$$

$$3^\circ) C = [0] \rightarrow \det C = 0$$

1.2. Determinante de uma Matriz de Ordem 2

Seja a matriz quadrada de ordem 2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Chamamos de **determinante** dessa matriz o número:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Para facilitar a memorização desse número, podemos dizer que o determinante é a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Esquemáticamente:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Exemplos

$$1^\circ) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot 3 - 5 \cdot 2 = -7$$

$$2^\circ) B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det B = 2 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 8$$

$$3^\circ) C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det C = 0 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -6$$

1.3. Determinante de uma Matriz de Ordem 3

Seja a matriz quadrada de ordem 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Chamamos determinante dessa matriz o número:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Para memorizarmos a definição de determinante de ordem 3, usamos a regra prática denominada **Regra de Sarrus**:

1º) Repetimos a 1ª e a 2ª colunas à direita da matriz.

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

2º) Multiplicando os termos entre si, seguindo os traços em diagonal e associando o sinal indicado dos produtos, temos:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Observação

A regra de Sarrus também pode ser utilizada repetindo a 1ª e 2ª linhas, ao invés de repetirmos a 1ª e 2ª colunas.

Exercícios Resolvidos

01. Calcule o determinante da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Resolução

Utilizando a regra de Sarrus, teremos:

a) Repetir a 1ª e a 2ª colunas:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ \oplus & \oplus & \oplus & \ominus & \ominus & \ominus \end{array}$$

$$\det A = 1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 4 - 0 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\det A = 8 + 4 + 0 - 16 - 0 - 24$$

Resposta: $\det A = -28$

b) Repetir a 1ª e a 2ª linhas:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & & \\ 3 & 2 & 1 & & \\ 2 & 0 & 4 & & \\ \oplus & \oplus & \oplus & \ominus & \ominus & \ominus \end{array}$$

$$\det A = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 4$$

$$\det A = 4 + 0 + 8 - 16 - 0 - 24$$

Resposta: $\det A = -28$

02. Resolver em R:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Resolução

$$\begin{array}{ccccc} x & 1 & 3 & x & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \oplus & \oplus & \oplus & \ominus & \ominus & \ominus \end{array}$$

$$x \cdot 3 \cdot 0 + 1 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \cdot 3 - 0 \cdot 4 \cdot x - 0 \cdot 2 \cdot 1 = 0 + 8 + 0 - 18 - 0 - 0 = -10$$

$$2 \cdot 4 - 1 \cdot x = 8 - x$$

$$\text{Teremos: } -10 = 8 - x \rightarrow$$

$$x = 8 + 10 \rightarrow \boxed{x = 18}$$

Resposta: $x = 18$



2. Propriedades

Apresentamos, a seguir, algumas propriedades que visam a simplificar o cálculo dos determinantes:

2.1. Propriedade 1

O determinante de uma matriz A é igual ao de sua **transposta** A^t .

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \det A = ad - bc \\ \det A^t = ad - bc \end{array} \right\} \Rightarrow \det A^t = \det A$$

2.2. Propriedade 2

Se B é a matriz que se obtém de uma matriz quadrada A , quando trocamos entre si a posição de duas **filas paralelas**, então:

$$\det B = -\det A$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

B foi obtida trocando-se a 1ª pela 2ª linha de A .

$$\det A = ad - bc$$

$$\det B = bc - ad = -(ad - bc) = -\det A$$

Assim,

$$\det B = -\det A$$

2.3. Consequência da Propriedade 2

Uma matriz A que possui duas filas paralelas “iguais” tem determinante igual a zero.

Justificativa

A matriz que obtemos de A , quando trocamos entre si as duas filas (linha ou coluna) “iguais”, é igual a A . Assim, de acordo com a propriedade 2, escrevemos que $\det A = -\det A$

$$\text{Assim: } \det A = 0$$

2.4. Propriedade 3

Sendo B uma matriz que obtemos de uma matriz quadrada A , quando **multiplicamos** uma de suas filas (linha ou coluna) por uma constante k ,

$$\text{então } \det B = k \cdot \det A$$

2.5. Consequências da Propriedade 3

1ª) Ao calcularmos um determinante, podemos “colocar em evidência” um “fator comum” de uma fila (linha ou coluna).

Exemplo

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

2ª) Sendo A uma matriz quadrada de ordem n , a matriz $k \cdot A$ é obtida multiplicando todos os elementos de A por k , então:

$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow k \cdot A = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{bmatrix}$$

$$\det(k \cdot A) = \begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{vmatrix} = k \cdot k \cdot k \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Assim:

$$\det(k \cdot A) = k^3 \cdot \det A$$

2.6. Propriedade 4

Se A , B e C são matrizes quadradas de mesma ordem, tais que os elementos correspondentes de A , B e C são iguais entre si, exceto os de uma fila, em que os elementos de C são iguais às somas dos seus elementos correspondentes de A e B , então

$$\det C = \det A + \det B$$

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} a & b & x \\ c & d & y \\ e & f & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & r \\ c & d & s \\ e & f & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & x+r \\ c & d & y+s \\ e & f & z+t \end{vmatrix}$$

Exercícios Resolvidos

01. Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Obter $\det A$, $\det B$ e $\det C$.

Resolução

Note que:

- A , B e C têm a 1ª coluna igual;
- a 2ª coluna de C é a soma das segundas colunas de A e B . Teremos:

$$\det A = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3$$

$$\det B = -4 - 3 = -7$$

$$\det C = -4 - 6 = -10$$

$$\Rightarrow \det C = \det A + \det B$$

02. Dada a matriz

$$D = \begin{bmatrix} a & r & a+r \\ b & r & b+r \\ c & r & c+r \end{bmatrix} \text{ mostre que } \det D = 0$$

Resolução

Pela propriedade 4:

$$D = \underbrace{\begin{bmatrix} a & r & a \\ b & r & b \\ c & r & c \end{bmatrix}}_{D_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} a & r & r \\ b & r & r \\ c & r & r \end{bmatrix}}_{D_2}$$

D_1 tem duas filas paralelas iguais, então $D_1 = 0$

D_2 tem duas filas paralelas iguais, então $D_2 = 0$.

Assim: $D = D_1 + D_2 = 0 + 0$

$$\boxed{D = 0}$$

2.7. Propriedade 5 (Teorema de Jacobi)

O determinante não se altera quando adicionamos uma fila qualquer com outra fila paralela multiplicada por um número.

Exemplo

$$\text{Considere o determinante } \det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Somando a 3ª coluna com a 1ª multiplicada por m , teremos:

$$\begin{vmatrix} a & b & c+ma \\ d & e & f+md \\ g & h & i+mg \end{vmatrix} \stackrel{(P4)}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & ma \\ d & e & md \\ g & h & mg \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c+ma \\ d & e & f+md \\ g & h & i+mg \end{vmatrix} = \det A + m \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ g & h & g \end{vmatrix}}_{\text{igual a zero}}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c+ma \\ d & e & f+md \\ g & h & i+mg \end{vmatrix} = \det A$$

Exemplo

Vamos calcular o determinante D abaixo.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D = 8 + 0 + 0 - 60 - 0 - 0 = -52$$

Em seguida vamos multiplicar a 1ª coluna por 2, somar com a 3ª coluna e calcular:



$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & -5 \\ 5 & 0 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -5 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 12 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_1 = 48 + 0 + 0 - 100 - 0 - 0 = -52$$

Observe que $D_1 = D$, de acordo com a propriedade.

Consequência

Quando uma fila de um determinante é igual à soma de múltiplos de filas paralelas (combinação linear de filas paralelas), o determinante é igual a zero.

Exemplo

$$\text{Seja } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 12 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

Observe que cada elemento da 3ª coluna é igual à 1ª coluna multiplicada por 2 somada com a 2ª coluna multiplicada por 3.

$$8 = 2(1) + 3(2) = 2 + 6$$

$$12 = 2(3) + 3(2) = 6 + 6$$

$$5 = 2(4) + 3(-1) = 8 - 3$$

Portanto, pela consequência da propriedade 5, $D = 0$.

Use a regra de Sarrus e verifique.

2.8. Propriedade 6 (Teorema de Binet)

Seja A e B matrizes quadradas de mesma ordem, então

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = -2$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A \cdot B) = -6$$

Logo, $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Consequências

1ª) Sendo A uma matriz quadrada e $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$\det(A^n) = (\det A)^n$$

2ª) Sendo A uma matriz inversível, temos

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Justificativa

Seja A matriz inversível.

$$A^{-1} \cdot A = I$$

$$\det(A^{-1} \cdot A) = \det I$$

$$\det A^{-1} \cdot \det A = \det I$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

uma vez que $\det I = 1$, onde I é a matriz identidade.

Exercícios Resolvidos

01. Calcular o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 8 & 4 & 80 \\ 1 & 0 & -25 \end{vmatrix}$$

Resolução

• Colocando 4 em evidência na 2ª linha:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 8 & 4 & 80 \\ 1 & 0 & -25 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 2 & 1 & 20 \\ 1 & 0 & -25 \end{vmatrix}$$

• Colocando 5 em evidência na 3ª coluna:

$$4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 2 & 1 & 20 \\ 1 & 0 & -25 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

• Aplicando Sarrus no determinante 3×3 , teremos:

$$4 \cdot 5 \cdot 35 = 700$$

Resposta: O valor do determinante é 700.

02. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ calcular o número real m , tal que:
 $\det(A - mB) = 0$

Resolução

$$A - mB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4m & 2m \\ 3m & -m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 - 4m & 1 - 2m \\ 3 - 3m & 4 + m \end{pmatrix}$$

Como $\det(A - mB) = 0$, devemos ter:

$$(2 - 4m)(4 + m) - (3 - 3m)(1 - 2m) = 0$$

$$-10m^2 - 5m + 5 = 0 \Leftrightarrow 2m^2 + m - 1 = 0, \text{ daí}$$

$$m = -1 \text{ ou } m = \frac{1}{2}.$$

3. Teorema de Laplace

3.1. Menor Complementar e Co-fator

Dada uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ($n \geq 2$), chamamos **menor complementar** do elemento a_{ij} , e indicamos por M_{ij} , o determinante da matriz quadrada de ordem $n - 1$, que se obtém suprimindo a linha i e a coluna j da matriz A .

Exemplo

$$\text{Sendo } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ temos:}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Chamamos **co-fator** do elemento a_{ij} , e indicamos com A_{ij} , o número $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, em que M_{ij} é o menor complementar de a_{ij} .

Exemplo

$$\text{Sendo } A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \text{ temos:}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

Observação

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$, com $n \geq 2$, chamamos **matriz co-fatora de A** a matriz cujos elementos são os co-fatores dos elementos de A ; indicamos a matriz co-fatora por **cof A**. A transposta da matriz co-fatora de A é chamada de **matriz adjunta de A**, que indicamos por **adj A**.

Exemplo

$$\text{Sendo } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ temos:}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -7$$



$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

Assim:

$$\text{cof } A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & -7 & 10 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -5 & -7 & 3 \\ 2 & 10 & -3 \end{bmatrix}$$

3.2. Determinante de uma Matriz de Ordem n

Vimos até aqui a definição de determinante para matrizes quadradas de ordem 1, 2 e 3.

Seja A uma matriz quadrada de ordem n .

Então:

1º) Para $n = 1$

$$A = [a_{11}] \Rightarrow \det A = a_{11}$$

2º) Para $n \geq 2$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot A_{1j}$$

ou seja:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \dots + a_{1n} \cdot A_{1n}$$

Então o determinante de uma matriz quadrada de ordem n , $n \geq 2$, é a soma dos produtos dos elementos da primeira linha da matriz pelos respectivos cofatores.

Exemplos:

1º) Sendo $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, temos:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12}, \text{ onde:}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |a_{22}| = a_{22}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |a_{21}| = -a_{21}$$

Assim:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot (-a_{21})$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Nota:

Observamos que este valor coincide com a definição vista anteriormente.

2º) Sendo $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, temos:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}, \text{ onde:}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{31} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{33}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23}) + \\ &+ a_{12} \cdot (a_{31} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{33}) + \\ &+ a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22}) \end{aligned}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{31} \cdot a_{23} + \\ + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + \\ - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Nota:

Observamos que este valor coincide com a definição vista anteriormente.

$$3^{\circ}) \text{ Sendo } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \text{ temos:}$$

$\det A = 2 \cdot A_{11} + (-3) \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{13} + 5 \cdot A_{14}$ onde:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -14$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = +17$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = +18$$

Assim:

$$\det A = 2 \cdot (-14) + (-3) \cdot (+17) + 2 \cdot (-5) + \\ + 5 \cdot (+18)$$

$$\det A = 1$$

$$4^{\circ}) \text{ Sendo } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 23 & 5 & 4 & 3 \\ -9 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ temos:}$$

$$\det A = 3 \cdot A_{11} + \underbrace{0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14}}_{\text{zero}}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -11$$

Assim:

$$\det A = 3 \cdot (-11) \Rightarrow \det A = -33$$

Nota:

Observamos que quanto mais “zeros” aparecerem na primeira linha, mais o cálculo é facilitado.

3.3. Definição do Teorema

Seja A uma matriz quadrada de ordem n , $n \geq 2$, seu determinante é a soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) qualquer pelos respectivos co-fatores.

Exemplos

$$1^{\circ}) \text{ Sendo } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando a 2ª linha para a aplicação do teorema de Laplace, temos:

$$\det A = \underbrace{0 \cdot A_{21}}_{\text{zero}} + 2 \cdot A_{22} + \underbrace{0 \cdot A_{23}}_{\text{zero}} + \underbrace{0 \cdot A_{24}}_{\text{zero}}$$

Notamos que a escolha feita leva-nos ao cálculo de apenas 1 co-fator; se utilizássemos a 1ª linha, deveríamos calcular 4 co-fatores:

Assim:

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 35$$

$$\det A = 2 \cdot 35 = 70$$

$$2^{\circ}) \text{ Sendo } A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$



Devemos escolher a 4ª coluna para a aplicação do teorema de Laplace, pois, neste caso, teremos que calcular apenas um co-fator.

Assim:

$$\det A = 2 \cdot A_{14} + 0 \cdot A_{24} + 0 \cdot A_{34} + 0 \cdot A_{44}$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = +21$$

$$\det A = 2 \cdot 21 = 42$$

3.4. Observações Importantes

- 1ª) No cálculo do determinante de uma matriz de ordem n , recaímos em determinantes de matrizes de ordem $n-1$, e no cálculo destes, recaímos em determinantes de ordem $n-2$, e assim sucessivamente, até recairmos em determinantes de matrizes de ordem 3, que calculamos com a regra de Sarrus, por exemplo.
- 2ª) O cálculo de um determinante fica mais simples quando escolhemos uma fila com a maior quantidade de zeros.

3ª) A aplicação sucessiva e conveniente do teorema de Jacobi pode facilitar o cálculo do determinante pelo teorema de Laplace.

Exemplo

$$\text{Calcule } \det A \text{ sendo } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

A 1ª coluna ou 2ª linha tem a maior quantidade de zeros. Nos dois casos, se aplicarmos o teorema de Laplace, calcularemos ainda três co-fatores.

Para facilitar, vamos “fazer aparecer zero” em $A_{31} = -2$ e $A_{41} = 3$ multiplicando a 1ª linha por 2 e somando com a 3ª e multiplicando a 1ª linha por -3 e somando com a 4ª linha; fazendo isso, teremos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora, aplicamos o teorema de Laplace na 1ª coluna:

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 4 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 4 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

Aplicamos a regra de Sarrus,

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 4 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \swarrow & \searrow & \swarrow \\ -1 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 4 \\ -2 & -3 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} \swarrow & \searrow & \swarrow \\ -1 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 4 \\ -2 & -3 & 0 \end{matrix}$$

- - - + + +

$$\det A = (0 - 16 - 21) - (-14 + 12 + 0)$$

$$\det A = 0 - 16 - 21 + 14 - 12 - 0 = -49 + 14$$

$$\det A = -35$$

3.5. Uma Aplicação

Seja A uma **matriz triangular**, o seu determinante é o produto dos elementos da diagonal principal; podemos verificar isto desenvolvendo o determinante de A através da 1ª coluna, se ela for triangular superior, e através da 1ª linha, se ela for triangular inferior. Assim:

1ª) A é triangular superior

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$$

2ª) A é triangular inferior

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$$

Lembrando que a **matriz identidade** é triangular, temos:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det I_n = 1$$

Exercício Resolvido

01. Calcular o determinante

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Vamos colocar 2 em evidência na 2ª linha (consequência da P3)

$$\det A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Vamos multiplicar a 2ª linha por -3 e somar com a 3ª linha (teorema de Jacobi)

$$\det A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Aplicando o teorema de Laplace na 1ª coluna:

$$\det A = 2 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det A = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Aplicando novamente o teorema de Laplace na 1ª coluna:

$$\det A = -2 \cdot 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 \cdot 17 = -68$$

Portanto

$$\det A = -68$$

4. Determinante de Vandermonde

Um determinante de ordem $n \geq 2$ é chamado **determinante de Vandermonde** ou **determinante das potências** se, e somente se, na 1ª linha (coluna) os elementos forem todos iguais a 1; na 2ª, números quaisquer; na 3ª, os seus quadrados; na 4ª, os seus cubos e assim sucessivamente.

Exemplos

1ª) Determinante de Vandermonde de ordem 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

2ª) Determinante de Vandermonde de ordem 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

Os elementos da 2ª linha são denominados **elementos característicos**.



Propriedade

Um determinante de Vandermonde é igual ao produto de todas as diferenças que se obtém subtraindo-se de cada um dos elementos característicos os elementos precedentes, independente da ordem do determinante.

Exemplos

1º) Calcule o determinante abaixo.

$$\det V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$$

Observe:

- 1ª linha – todos os elementos são iguais a 1.
- 2ª linha – 2, 3, 4, 5
- 3ª linha – $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$ e $5^2 = 25$
- 4ª linha – $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$ e $5^3 = 125$

Verificamos tratar-se de um determinante de Vandermonde, logo os seus elementos característicos são 2, 3, 4 e 5.

As diferenças possíveis são:

$(3-2)$, $(4-2)$, $(4-3)$, $(5-2)$, $(5-3)$ e $(5-4)$

Então, podemos escrever:

$$\det V = (3-2) \cdot (4-2) \cdot (4-3) \cdot (5-2) \cdot (5-3) \cdot (5-4)$$

$$\det V = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow \det V = 12$$

2º) Calcule o determinante:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 7 & 49 \end{vmatrix}$$

Sabemos que $\det A = \det A^t$, então:

$$\det A^t = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \\ 4 & 16 & 49 \end{vmatrix}$$

que é um determinante de Vandermonde de ordem 3, então:

$$\det A = (4-2) \cdot (7-2) \cdot (7-4) = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$$

5. Regra de Chió

Esta regra é uma aplicação direta do teorema de Jacobi; permite abaixar a ordem de um determinante para simplificar o seu cálculo. Para poder aplicar a regra de Chió, precisamos de uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$, com $a_{ij} = 1$.

Seguem as etapas:

- **1ª etapa:** eliminamos da matriz dada a linha i e a coluna j do elemento $a_{ij} = 1$;
- **2ª etapa:** subtraímos de cada um dos elementos restantes de A o produto dos elementos eliminados que se encontram na sua linha e na sua coluna, obtendo assim uma matriz B de ordem $n-1$;
- **3ª etapa:** o determinante de A é igual a $(-1)^{i+j} \cdot \det B$.

Exemplo

Calcule o determinante da matriz A .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- Vamos aplicar a regra de Chió a partir do elemento $a_{24} = 1$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

A partir daqui teremos:

$$B = \begin{bmatrix} 2 - (1 \cdot 0) & 3 - (4 \cdot 0) & -1 - (2 \cdot 0) \\ 3 - (1 \cdot 0) & 2 - (4 \cdot 0) & 2 - (2 \cdot 0) \\ -1 - (1 \cdot 2) & 2 - (4 \cdot 2) & 3 - (2 \cdot 2) \end{bmatrix}$$

$$\text{Então: } B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$\det A = (-1)^{2+4} \cdot \det B = 23 \text{ confira!}$$

Observações

- 1ª) Para facilitar, quando aplicamos a regra de Chió para o elemento igual a 1, usamos a linha ou coluna com maior quantidade de zeros.
- 2ª) Quando a matriz não apresenta elemento igual a 1, podemos forçar o aparecimento usando o teorema de Jacobi.

Exemplo

Calcule o determinante de A .

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

- Para aplicar a regra de Chió, vamos fazer aparecer 1 em a_{32} ; para isso vamos multiplicar a 1ª linha por -1 e somar com a 3ª linha, obtendo a matriz B .

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Agora aplicamos a regra de Chió ao elemento $a_{32} = 1$ na matriz B .

$$\begin{aligned} \det B &= \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5 - (-3) \cdot 2 & 3 - 2 \cdot 2 \\ 4 - (-3) \cdot 2 & 0 - 2 \cdot 2 \end{vmatrix} = \\ &= -1 \cdot \begin{vmatrix} 11 & -1 \\ 10 & -4 \end{vmatrix} = -1(-44 + 10) = 34 \end{aligned}$$

Assim, obtemos $\det B = 34 = \det A$.

Exercícios Resolvidos

01. Calcule o determinante da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 9 & 25 & 49 \\ 1 & 27 & 125 & 343 \end{bmatrix}$$

Resolução

A matriz A é uma matriz de Vandermonde, logo:

$$\det A = (3-1) \cdot (5-1) \cdot (5-3) \cdot (7-1) \cdot (7-3) \cdot (7-5)$$

$$\det A = 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 768$$

Resposta: $\det A = 768$

02. Resolver a equação:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x+1 & 2x+1 \\ x^2 & (x+1)^2 & (2x+1)^2 \end{vmatrix} = 0$$

Resolução

Para esse determinante de Vandermonde, teremos:

$$[(x+1)-x] \cdot [(2x+1)-x] \cdot [(2x+1)-(x+1)] = 0$$

$$[x+1-x] \cdot [2x+1-x] \cdot [2x+x-x-x] = 0$$

$$1 \cdot [x+1] \cdot [x] = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0$$

Assim, teremos $x = 0$ ou $x = -1$

Logo: $S = \{-1, 0\}$

03. Usando a regra de Chió, calcule o determinante da matriz abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Resolução

Não tem elemento igual a 1; vamos provocar o seu aparecimento na posição a_{11} com a ajuda do teorema de Jacobi.

Vamos somar à primeira linha a segunda linha multiplicada por -1 . Teremos:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -4 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -8 & -8 & -3 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$



Usando a regra de Chió:

$$\det A = \begin{vmatrix} \textcircled{1} & -8 & -8 & -3 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 - 2 \cdot (-8) & 4 - 2 \cdot (-8) & 3 - 2 \cdot (-3) \\ 0 - (-4) \cdot (-8) & 2 - (-4) \cdot (-8) & -2 - (-4) \cdot (-3) \\ 3 - (-5) \cdot (-8) & 0 - (-5) \cdot (-8) & -4 - (-5) \cdot (-3) \end{vmatrix}$$

$$\text{Assim: } \det A = \begin{vmatrix} 21 & 20 & 9 \\ -32 & -30 & -14 \\ -37 & -40 & -19 \end{vmatrix}$$

Resolvendo com a regra de Sarrus:

$\det A = -60$ (que é a resposta)

Capítulo 04. Inversão de Matrizes

1. Inversão

Na álgebra dos números reais, um número n é chamado de **inverso** de um número m e é indicado por m^{-1} se, e somente se, $m \cdot n = n \cdot m = 1$.

Assim, $\frac{3}{5}$ é inverso de $\frac{5}{3}$, pois

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1$$

Todo número real $m \neq 0$ é invertível em relação à multiplicação, ou seja, sempre existe o número $\frac{1}{m}$ tal que:

$$m \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m} \cdot m = 1$$

O conceito de inversão é usado para resolver equações do tipo $ax + b = 0$.

Observe o exemplo abaixo:

$$4x = 12$$

Multiplicando-se ambos os membros pelo inverso de 4:

$$\frac{1}{4} \cdot (4x) = 12 \cdot \frac{1}{4}$$

Pela propriedade associativa:

$$\left(\frac{1}{4} \cdot 4\right)x = 3$$

Pela definição de inverso:

$$1 \cdot x = 3$$

Pela propriedade do elemento neutro:

$$x = 3$$

A necessidade de resolver equações matriciais do tipo $AX = B$, em que A , X e B são matrizes, fez com que se estendesse a teoria de inversão de números reais para as matrizes.

2. Matriz Inversa

Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Uma matriz B é chamada inversa de A se, e somente se,

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

em que:

B é a matriz inversa de A : $B = A^{-1}$

I_n é a matriz identidade de ordem n .

Assim, por exemplo, a matriz $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

é inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, pois:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

ou seja:

$$AB = BA = I_n$$

3. Obtenção

1º modo: a partir da definição.

Exemplo

Obter a matriz inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ se existir.}$$

Resolução

Supondo que $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é a matriz inver-

sa da matriz A , temos:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 3a + c & 3b + d \\ 2a + c & 2b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim:

$$\begin{cases} 3a + c = 1 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3b + d = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas:

$$a = 1, b = -1, c = -2 \text{ e } d = 3$$

Portanto:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculando:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto a matriz A é inversível e sua inversa é a matriz:

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2º modo: é possível provar que a matriz inversa de uma matriz A , caso exista, é dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\text{cof } A)^t$$

$\det A \neq 0$

$\text{cof } A \rightarrow$ **matriz dos co-fatores** de A .

$(\text{cof } A)^t \rightarrow$ matriz transposta da matriz dos co-fatores. Também chamada de **matriz adjunta** de A .

Acompanhe a resolução de um exemplo.

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, determine a

sua inversa, se existir:

$\rightarrow$ **calculamos $\det A$**

$\det A = 0 + 6 = 6 \neq 0$, logo existe a matriz inversa de A .

$\rightarrow$ **determinamos a matriz dos co-fatores de A :**

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (0) = (-1)^2 - 0 = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = (-1)(3) = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-2) = (-1)(-2) = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (1) = (1)(1) = 1$$

$$\text{cof } A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ **determinamos a transposta de $\text{cof } A$, isto é, sua adjunta:**

$$(\text{cof } A)^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ **finalmente, determinamos a matriz inversa da matriz A :**

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ -1/2 & 1/6 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ **fazemos a verificação:**

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ -1/2 & 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ -1/2 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Importante:

Para calcularmos o elemento b_{ij} da matriz inversa da matriz $A = (a_{ij})_{m \cdot n}$, aplicamos a fórmula abaixo, decorrente do teorema;

$$b_{ij} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{ji}$$

onde;

A_{ji} é co-fator de a_{ji}

Exemplo:

Determinar o elemento b_{23} da matriz

$$\text{inversa de } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolução:

$$\det A = 1 \cdot 3 \cdot 1 = 3$$

$$b_{23} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{32}$$

$$\text{onde } A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$\therefore b_{23} = \frac{1}{3} \cdot (-2) = -\frac{2}{3}$$

4. Propriedades

$$1^a) (A^{-1})^{-1} = A$$

$$2^a) (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

$$3^a) (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$4^a) \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Exercícios Resolvidos

01. Encontre a matriz inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ se existir.}$$

Resolução

$\det A = 6 - 6 = 0$, logo não existe a matriz inversa.

02. Mostre que, se uma matriz quadrada é invertível, então $\det A \neq 0$.

Resolução

Se A é invertível, então:

$$A^{-1} \cdot A = I$$

$$\det (A^{-1} \cdot A) = \det I$$

$$(\det A) (\det A^{-1}) = 1$$

Portanto $\det A \neq 0$ e

$$\det (A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

03. (UFU-MG) Considere o conjunto das matrizes da forma $\begin{pmatrix} x-3 & x+k \\ 1 & x-5 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$.

Determine o valor de k para o qual exista exatamente uma matriz não-inversível nesse conjunto.

Resolução

$$\det A = \begin{vmatrix} x-3 & x+k \\ 1 & x-5 \end{vmatrix}$$

$$(x-3)(x-5) - 1(x+k) =$$

$$= x^2 - 8x + 15 - x - k = x^2 - 9x + 15 - k$$

Para não se ter A^{-1} , devemos ter $\det A = 0$.

$$x^2 - 9x + 15 - k = 0$$

Como queremos uma matriz não-inversível, devemos ter $\Delta = 0$:

$$\Delta = (-9)^2 - 4(1)(15 - k) = 0$$

$$81 - 60 + 4k = 0$$

$$4k = -21$$

$$k = -\frac{21}{4}$$

Resposta: Teremos $k = -\frac{21}{4}$.

04. Calcule se existir, a inversa da matriz A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolução:

1º) Vamos calcular o determinante de A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

$$-24 \quad -1 \quad -0 \quad +4 \quad +6 \quad +0$$

$\det A = -15$ logo A tem inversa

2º) Matriz dos cofatores

$$\text{cof } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & -10 & 5 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$



3º) Matriz Adjunta (transposta da matriz dos cofatores)

$$\text{cof } A^t = \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 3 & -10 & -1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

4º) Cálculo da inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\text{cof } A)^t$$

Como $\det A = -15$, temos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{-15} & \frac{0}{-15} & \frac{-6}{-15} \\ \frac{3}{-15} & \frac{-10}{-15} & \frac{-1}{-15} \\ \frac{-6}{-15} & \frac{5}{-15} & \frac{2}{-15} \end{pmatrix}$$

Resposta:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{15} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

Capítulo 05. Sistemas Lineares

O estudo dos sistemas de equações lineares é de fundamental importância em Matemática e nas ciências em geral. Você provavelmente já resolveu sistemas do primeiro grau, mais precisamente aqueles com duas equações e duas **incógnitas**.

Vamos ampliar esse conhecimento desenvolvendo métodos que permitam resolver, quando possível, sistemas de equações do primeiro grau com qualquer número de equações e incógnitas. Esses métodos nos permitirão não só resolver sistemas, mas também classificá-los quanto ao número de soluções.

1. Equações Lineares

1.1. Definição e Elementos

Equação linear é toda equação do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b,$$

onde $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ e b são números reais e $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são as incógnitas.

Os números reais $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são chamados de **coeficientes** e b é o **termo independente**.

Exemplos

1º) São equações lineares:

$$x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 3$$

$$2x - y + 2z = 1$$

$$0x + 0y + 0z = 2$$

$$0x + 0y + 0z = 0$$

2º) Não são equações lineares:

$$x^3 - 2y + z = 3$$

(x^3 é o **impedimento**)

$$2x_1 - 3x_1x_2 + x_3 = -1$$

($-3x_1x_2$ é o **impedimento**)

$$2x_1 - \frac{3}{x^2} + x_3 = 0$$

($\frac{3}{x^2}$ é o **impedimento**)

Observação

Uma equação é linear quando os expoentes das incógnitas forem iguais a 1 e em cada termo da equação existir uma única incógnita.

1.2. Solução de uma Equação Linear

Uma solução de uma equação linear

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b, \text{ é um}$$

conjunto ordenado de números reais $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ para o qual a sentença $a_1(\alpha_1) + a_2(\alpha_2) + a_3(\alpha_3) + \dots + a_n(\alpha_n) = b$ é verdadeira.

Exemplos

1º) A terna (2, 3, 1) é solução da equação:

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \text{ pois:}$$

$$(2) - 2 \cdot (3) + 3 \cdot (1) = -1$$

2º) A quadra (5, 2, 7, 4) é solução da equação:

$$0x_1 - 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \text{ pois:}$$

$$0 \cdot (5) + 0 \cdot (2) + 0 \cdot (7) + 0 \cdot (4) = 0$$



1.3. Conjunto Solução

Chamamos de conjunto solução de uma equação linear o conjunto formado por todas as suas soluções.

Observação

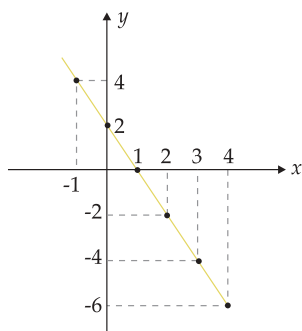
Em uma equação linear com 2 incógnitas, o conjunto solução pode ser representado graficamente pelos pontos de uma reta do plano cartesiano.

Assim, por exemplo, na equação

$$2x + y = 2$$

algumas soluções são $(1, 0)$, $(2, -2)$, $(3, -4)$, $(4, -6)$, $(0, 2)$, $(-1, 4)$, etc.

Representando todos os pares ordenados que são soluções da equação dada, temos:



1.4. Equação Linear Homogênea

Uma equação linear é chamada homogênea quando o seu termo independente for nulo.

Exemplo

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 - x_5 = 0$$

Observação

Toda equação homogênea admite como solução o conjunto ordenado de “zeros” que chamamos **solução nula** ou **solução trivial**.

Exemplo

$(0, 0, 0)$ é solução de $3x + y - z = 0$

1.5. Equações Lineares Especiais

Dada a equação:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b, \text{ temos:}$$

- Se $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = b = 0$, ficamos com:

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \dots + 0x_n$, e, neste caso, qualquer seqüência $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ será solução da equação dada.

- Se $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$ e $b \neq 0$, ficamos com:

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \dots + 0x_n = b \neq 0$, e, neste caso, não existe seqüências de reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ que seja solução da equação dada.

2. Sistema Linear 2×2

2.1. Definição e Elementos

Chamamos de sistema linear 2×2 o conjunto de equações lineares a duas incógnitas, **consideradas simultaneamente**.

Todo sistema linear 2×2 admite a forma geral abaixo:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Um par (α_1, α_2) é **solução do sistema linear 2×2** se, e somente se, for solução das duas equações do sistema.

Exemplo

$(3, 4)$ é solução do sistema

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

pois é solução de suas 2 equações:

$$(3) - (4) = -1 \quad \text{e} \quad 2 \cdot (3) + (4) = 10$$

2.2. Resolução de um Sistema 2×2

Resolver um sistema linear 2×2 significa obter o conjunto solução do sistema.

Os dois métodos mais utilizados para a resolução de um sistema linear 2×2 são o **método da substituição** e o **método da adição**.

Para exemplificar, vamos resolver o sistema 2×2 abaixo usando os dois métodos citados.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

1º) Método da Substituição:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \text{ (I)} \\ x - y = -1 \text{ (II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos $x = y - 1$, que substituímos na equação (I)

$$2(y - 1) + 3y = 8 \Rightarrow 5y = 10 \Rightarrow y = 2$$

Fazendo $y = 2$ na equação (I), por exemplo, obtemos:

$$2x + 3 \cdot 2 = 8 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{Assim: } S = \{(1, 2)\}$$

2º) Método da Adição:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \text{ (I)} \\ x - y = -1 \text{ (II)} \end{cases}$$

Multipliquemos a equação II por 3 e a adicionamos, membro a membro, com a equação I.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - 3y = -3 \\ \hline 5x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{5} = 1 \end{cases}$$

Fazendo $x = 1$ na equação (I), por exemplo, obtemos:

$$2 \cdot 1 + 3y = 8 \Rightarrow y = 2$$

$$\text{Assim: } S = \{(1, 2)\}$$

2.3. Sistema Linear 2×2 com Infinitas Soluções

Quando uma equação de um sistema linear 2×2 puder ser obtida **multiplicando-se** a outra por um número real, ao tentarmos resolver esse sistema, chegamos numa igualdade que é sempre verdadeira, independente das incógnitas. Nesse caso, existem infinitos pares ordenados que são soluções do sistema.

Exemplo

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \text{ (I)} \\ -4x - 6y = -16 \text{ (II)} \end{cases}$$

Note que **multiplicando-se a equação (I)** por (-2) obtemos a equação (II).

Resolvendo o sistema pelo método da substituição temos:

Da equação (I), obtemos $y = \frac{8-2x}{3}$, que substituímos na equação (II).

$$\begin{aligned} -4x - 6 \cdot \left(\frac{8-2x}{3} \right) &= -16 \Rightarrow -4x - 2(8-2x) = -16 \\ -4x - 16 + 4x &= -16 \Rightarrow -16 = -16 \end{aligned}$$

$-16 = -16$ é uma igualdade verdadeira e existem infinitos pares ordenados que são soluções do sistema.

Entre outros, $(1, 2)$, $(4, 0)$, $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$ e $\left(0, \frac{8}{3}\right)$ são soluções do sistema.

Sendo α , um número real qualquer, dizemos que $\left(\alpha, \frac{8-2\alpha}{3}\right)$ é solução do sistema. (Obtemos $\frac{8-2\alpha}{3}$ substituindo $x = \alpha$ na equação (I)).

2.4. Sistema Linear 2×2 com Nenhuma Solução

Quando duas equações lineares têm os mesmos coeficientes, porém os termos independentes são diferentes, dizemos que não



existe solução comum para as duas equações, pois substituindo uma na outra, obtemos uma igualdade sempre falsa.

Exemplo

$$2x + 3y = 6 \text{ (I) e } 2x + 3y = 5 \text{ (II)}$$

substituindo $2x + 3y$ da equação (I) na equação (II) obtemos:

$6 = 5$ que é uma igualdade falsa. Se num sistema 2×2 existir um número real que, multiplicado por uma das equações, resulta uma equação com os mesmos coeficientes da outra equação do sistema, porém com termos independentes diferentes, dizemos que não existe par ordenado que seja solução do sistema.

Exemplo

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \text{ (I)} \\ 2x + 4y = 7 \text{ (II)} \end{cases}$$

Multiplicando-se a equação (I) por 2, obtemos:

$$2x + 4y = 10$$

que tem os mesmos coeficientes da equação (II), porém os termos independentes são diferentes.

Se tentarmos resolver o sistema dado pelo método de substituição, obtemos uma igualdade que é sempre falsa, independente das incógnitas.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \text{ (I)} \\ 2x + 4y = 7 \text{ (II)} \end{cases}$$

Da equação (I), obtemos $\left(y = \frac{5-x}{2}\right)$, que substituímos na equação (II)

$$2x + 4 \cdot \left(\frac{5-x}{2}\right) = 7 \Rightarrow 2x + 2(5-x) = 7$$

$$2x + 10 - 2x = 7 \Rightarrow 10 = 7$$

$10 = 7$ é uma igualdade falsa e não existe par ordenado que seja solução do sistema.

2.5. Classificação

De acordo com o número de soluções, um sistema linear 2×2 pode ser classificado em:

- **Sistemas Impossíveis ou Incompatíveis:** são os sistemas que não possuem solução alguma.
- **Sistemas Possíveis ou Compatíveis:** são os sistemas que apresentam pelo menos uma solução.

Os sistemas possíveis são classificados em:

- **Sistemas Possíveis Determinados:** se possuem uma única solução.
- **Sistemas Possíveis Indeterminados:** se possuem infinitas soluções.

3. Sistema Linear $m \times n$

3.1. Definição e Elementos

Chamamos de sistema linear $m \times n$ ao conjunto de m equações lineares a n incógnitas, consideradas simultaneamente, que pode ser escrito na forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde:

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são as incógnitas;

a_{ij} , com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, são os coeficientes das incógnitas; b_i , com $1 \leq i \leq m$, são os termos independentes.

Exemplos

$$1^\circ) \begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

(sistema 2×3)

$$2^\circ) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

(sistema 3×4)

$$3^a) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 4 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

(sistema 3×2)

3.2. Solução de um Sistema Linear

O conjunto ordenado de valores, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ tal que fazendo:

$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, x_3 = \alpha_3, \dots, x_n = \alpha_n$ as m equações fiquem satisfeitas, é chamado solução do sistema linear dado.

Chamamos de **conjunto solução** de um sistema linear o conjunto formado por todas as soluções do sistema.

Resolver um sistema linear é encontrar o seu conjunto solução.

3.3. Sistema Linear Homogêneo

Chamamos de sistema linear homogêneo aquele constituído apenas por equações homogêneas, isto é, equações com termo independente nulo.

Exemplo

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Observação

Num sistema homogêneo com n incógnitas, a n -upla $(0, 0, 0, \dots, 0)$ sempre é uma solução, chamada **solução nula** ou **solução trivial** do sistema.

3.4. Classificação de um Sistema Linear

Do mesmo modo que classificamos os sistemas lineares 2×2 , podemos classificar os sistemas lineares $m \times n$. Assim:

- **Sistema Impossível:** não possui solução alguma.

- **Sistema Possível:** apresenta pelo menos uma solução.

- **Sistema Possível Indeterminado:** apresenta infinitas soluções.

- **Sistema Possível Determinado:** apresenta uma única solução.

3.5. Matriz Incompleta

Chamamos de matriz incompleta do sistema linear a matriz formada pelos coeficientes das incógnitas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

No sistema:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + z = 0 \\ -x + y = 5 \end{cases}$$

A matriz incompleta é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.6. Forma Matricial

Consideremos o sistema linear $m \times n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sendo A a matriz incompleta do sistema chamamos, respectivamente, as matrizes:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$



de matriz incógnita e matriz termos independentes.

E dizemos que a forma matricial do sistema é $A \cdot X = B$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Exercícios Resolvidos

01. Resolver os sistemas pelo método da substituição:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 4y = -8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 3 \end{cases}$

Resolução

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \text{ (I)} \\ x + 2y = 4 \text{ (II)} \end{cases}$

de (I) obtemos:

$$y = \frac{2x-1}{3}$$

substituindo em (II):

$$x + 2 \cdot \left(\frac{2x-1}{3} \right) = 4$$

$$x + \frac{4x-2}{3} = 4$$

$$3x + 4x - 2 = 12$$

$$7x = 14$$

$$x = 2$$

Assim:

$$y = \frac{2 \cdot 2 - 1}{3} = 1$$

$$S = \{(2, 1)\}$$

b) $\begin{cases} x - 2y = 4 \text{ (I)} \\ -2x + 4y = -8 \text{ (II)} \end{cases}$

de (I) obtemos:

$$y = \frac{x-4}{2}$$

substituindo em (II)

$$-2x + 4 \cdot \left(\frac{x-4}{2} \right) = -8$$

$$-2x + 2 \cdot (x-4) = -8$$

$$-2x + 2x - 8 = -8$$

$$-8 = -8$$

Fazendo $x = \alpha$ na equação (I) temos:

$$\alpha - 2y = 4 \Rightarrow y = \frac{\alpha-4}{2}$$

$$S = \left\{ \left(\alpha, \frac{\alpha-4}{2} \right), \forall \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

c) $\begin{cases} 3x - y = 2 \text{ (I)} \\ 6x - 2y = 3 \text{ (II)} \end{cases}$

de (I) obtemos:

$$y = 3x - 2$$

substituindo em (II)

$$6x - 2(3x-2) = 3$$

$$6x - 6x + 4 = 3$$

$$4 = 3$$

$$S = \{ \}$$

02. Resolver os sistemas pelo método da adição

a) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -6x + 9y = -12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

Resolução

$$a) \begin{cases} 3x - y = 7 \text{ (I)} \\ x + 2y = 7 \text{ (II)} \end{cases}$$

multiplicando a equação (I) por 2 e fazendo a adição membro a membro das duas equações:

$$(+)\begin{cases} 6x - 2y = 14 \\ x + 2y = 7 \\ \hline 7x = 21 \end{cases}$$

$$x = 3$$

substituindo em (I)

$$3 \cdot 3 - y = 7$$

$$y = 2$$

$$S = \{(3, 2)\}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 3y = 4 \text{ (I)} \\ -6x + 9y = -12 \text{ (II)} \end{cases}$$

multiplicando a equação (I) por 3 e fazendo a adição membro a membro das duas equações:

$$(+)\begin{cases} 6x - 9y = 12 \\ -6x + 9y = -12 \\ \hline 0 = 0 \end{cases}$$

Fazendo $x = \alpha$ na equação (I) temos:

$$2\alpha - 3y = 4 \Rightarrow y = \frac{2\alpha - 4}{3}$$

$$S = \left\{ \left(\alpha, \frac{2\alpha - 4}{3} \right), \forall \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$c) \begin{cases} x + 2y = 5 \text{ (I)} \\ 2x + 4y = 8 \text{ (II)} \end{cases}$$

multiplicando-se a equação (I) por -2 e fazendo a adição membro a membro das duas equações:

$$(+)\begin{cases} -2x - 4y = -10 \\ 2x + 4y = 8 \\ \hline 0 = -2 \end{cases}$$

$$S = \{ \}$$

03. Recebi R\$ 48,00 em notas de 1 real e de 5 reais. Se no total me deram 20 notas, quantas notas de 1 real recebi?

Resolução

Seja x e y as quantidades respectivas de notas de 1 e de 5 que recebi temos:

$$x \cdot 1 + y \cdot 5 = 48$$

$$x + y = 20$$

$$\begin{cases} x + 5y = 48 \text{ (I)} \\ x + y = 20 \text{ (II)} \end{cases}$$

multiplicando a equação (II) por -5 e fazendo a adição membro a membro das duas equações temos:

$$(+)\begin{cases} x + 5y = 48 \\ -5x - 5y = -100 \\ \hline -4x = -52 \Rightarrow x = 13 \end{cases}$$

Assim recebi 13 notas de 1 real.

4. Regra de Cramer

A regra de Cramer foi desenvolvida pelo matemático suíço Gabriel Cramer (1704 -1752). Ela consiste num método para resolução de sistemas lineares $n \times n$ (número de equações igual ao número de incógnitas) com o auxílio de determinantes.

4.1. A Regra para um Sistema 2×2

Consideremos o sistema S nas incógnitas x e y :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Vamos resolver este sistema pelo método da substituição.

1º) Isolando a incógnita x na 1ª equação, temos:

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1 \Rightarrow x = \frac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}}$$



2º) Substituindo a incógnita x na 2ª equação, obtemos:

$$a_{21} \cdot \left(\frac{b_1 - a_{12} y}{a_{11}} \right) + a_{22} y = b_2$$

$$b_1 \cdot a_{21} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot y + a_{11} \cdot a_{22} \cdot y = a_{11} \cdot b_2$$

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot y - a_{12} \cdot a_{21} \cdot y = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}$$

Assim:
$$y = \frac{a_{11} \cdot b_2 - b_1 \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

3º) Substituindo a incógnita y na 1ª equação, encontramos:

$$x = \frac{b_1 \cdot a_{22} - a_{21} \cdot b_2}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

Então, a solução do sistema S é dada por:

$$x = \frac{b_1 \cdot a_{22} - a_{21} \cdot b_2}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \text{ e } y = \frac{a_{11} \cdot b_2 - b_1 \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

Notemos agora que:

1º) $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ é o determinante D da matriz incompleta do sistema:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

2º) $b_1 \cdot a_{22} - a_{12} \cdot b_2$ é o determinante D_x da matriz que obtemos substituindo a coluna dos coeficientes de x pela coluna dos termos independentes na matriz incompleta do sistema:

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 \cdot a_{22} - a_{12} \cdot b_2$$

3º) $a_{11} \cdot b_2 - b_1 \cdot a_{21}$ é o determinante D_y da matriz que obtemos substituindo a coluna dos coeficientes de y pela coluna dos termos independentes na matriz incompleta do sistema:

$$D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot b_2 - b_1 \cdot a_{21}$$

Assim, podemos escrever:

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ e } y = \frac{D_y}{D}$$

É fácil percebermos que os valores das incógnitas x e y só serão determinados se $D \neq 0$.

Desta forma, podemos escrever a regra de Cramer para um sistema 2×2 .

Um sistema S : $(S) \begin{cases} a_{11} x + a_{12} y = b_1 \\ a_{21} x + a_{22} y = b_2 \end{cases}$

é possível e determinado, e os valores das incógnitas são dados por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D} \text{ e } y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_y}{D}$$

Se, e somente se, o determinante D , da matriz incompleta do sistema, for diferente de zero.

Exemplos

1º) Resolver e classificar o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$$

Resolução

Calculemos inicialmente D , D_x e D_y :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 9 = -13$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -16 + 3 = -13$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 24 = -26$$

Como $D = -13 \neq 0$, o sistema é possível e determinado e:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-13}{-13} = 1 \text{ e } y = \frac{D_y}{D} = \frac{-26}{-13} = 2$$

Assim: $S = \{(1, 2)\}$ e o sistema é possível e determinado.

2º) Determinar m real, para que o sistema seja possível e determinado:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + my = 2 \end{cases}$$

Resolução

Segundo a regra de Cramer, devemos ter $D \neq 0$, em que:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{vmatrix} = 2m - 3$$

Assim: $2m - 3 \neq 0 \Rightarrow m \neq \frac{3}{2}$

Então, os valores reais de m , para que o sistema seja possível e determinado, são dados pelos elementos do conjunto:

$$\left\{m \in R \mid m \neq \frac{3}{2}\right\}$$

4.2. A Regra para um Sistema $n \times n$

Podemos generalizar a regra de Cramer para um sistema $n \times n$, do seguinte modo:

Um sistema S :

[illegible]

é possível e determinado, e os valores das incógnitas x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) são dados por:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{D_{x_i}}{D} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

Se, e somente se, o determinante D , da matriz incompleta do sistema, for diferente de zero.

Exemplos

1º) Resolver e classificar o sistema:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ x + 3y = 7 \\ 2x + y - 2z = -4 \end{cases}$$

Resolução

Calculemos inicialmente D , D_x , D_y e D_z :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -18 + 0 + 1 - 6 - 0 - 2 = -25$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -30 + 0 + 7 + 12 - 0 - 14 = -25$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -42 + 0 - 4 - 14 - 0 + 10 = -50$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -36 - 14 + 5 - 30 - 21 - 4 = -100$$

Como $D = -25 \neq 0$, o sistema é possível e determinado e:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-25}{-25} = 1 ; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-50}{-25} = 2 ;$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{100}{-25} = 4$$

Assim: $S = \{(1, 2, 4)\}$ e o sistema é possível e determinado.

2º) Determinar m real para que o sistema seja possível e determinado.

$$\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 2x-y+2z=5 \\ 3x+y+mz=0 \end{cases}$$



Resolução

Segundo a regra de Cramer, devemos ter $D \neq 0$.

Assim:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & m \end{vmatrix} = -m + 12 + 2 + 3 - 2 - 4m$$

$$D = -5m + 15$$

$$\text{Assim: } -5m + 15 \neq 0 \Rightarrow m \neq 3$$

Então, os valores reais de m , para que o sistema seja possível e determinado, são dados pelos elementos do conjunto:

$$\{m \in \mathbb{R} / m \neq 3\}$$

Exercício Resolvido

01. Resolver o sistema:

$$\begin{cases} ax + by = a^2 \\ bx + ay = b^2 \end{cases} \quad (a > 0, b > 0 \text{ e } a \neq b)$$

Resolução

Calculemos inicialmente D , D_x e D_y :

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} a^2 & b \\ b^2 & a \end{vmatrix} = a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix} = ab^2 - a^2b = ab(b - a)$$

Como $a \neq b$, $a > 0$ e $b > 0$, temos que:

$$D = (a - b)(a + b) \neq 0$$

Assim, o sistema é possível e determinado e:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)}$$

$$x = \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{ab(b-a)}{(a-b)(a+b)}$$

$$y = \frac{-ab(a-b)}{(a-b)(a+b)} = -\frac{ab}{a+b}$$

Então, o conjunto solução é:

$$S = \left\{ \left(\frac{a^2 + ab + a^2}{ab}, -\frac{ab}{a+b} \right) \right\}$$

5. Resolução de um Sistema por Substituição

Resolvemos um sistema linear $m \times n$ por substituição, do mesmo modo que fazemos num sistema linear 2×2 . Assim, observemos os exemplos a seguir.

Exemplos

1º) Resolver o sistema pelo método da substituição.

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 & \text{(I)} \\ 2x - y + z = 5 & \text{(II)} \\ x + 3y - 2z = -4 & \text{(III)} \end{cases}$$

Resolução

Isolando a incógnita x na equação (I) e substituindo nas equações (II) e (III), temos:

$$x + 2y - z = -1 \Rightarrow x = -2y + z - 1$$

Na equação (II)

$$2(-2y + z - 1) - y + z = 5 \Rightarrow -5y + 3z = 7 \quad \text{(IV)}$$

Na equação (III)

$$(-2y + z - 1) + 3y - 2z = -4 \Rightarrow y - z = -3 \quad \text{(V)}$$

Tomando agora o sistema formado pelas equações (IV) e (V):

$$\begin{cases} -5y + 3z = 7 & \text{(IV)} \\ y - z = -3 & \text{(V)} \end{cases}$$

Isolando a incógnita y na equação (V) e substituindo na equação (IV), temos:

$$y - z = -3 \Rightarrow y = z - 3$$

$$-5(z - 3) + 3z = 7 \Rightarrow z = 4$$

Substituindo $z = 4$ na equação (V)

$$y - 4 = -3 \Rightarrow y = 1$$

Substituindo $y = 1$ e $z = 4$ na equação (I)

$$x + 2(1) - (4) = -1 \Rightarrow x = 1$$

Assim: $S = \{(1, 1, 4)\}$

2º) Resolver o sistema pelo método da substituição:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 & \text{(I)} \\ y + 2z = 10 & \text{(II)} \\ 3z = 12 & \text{(III)} \end{cases}$$

Resolução

Na equação (III), obtemos:

$$3z = 12 \Rightarrow z = 4$$

Substituindo $z=4$ na equação (II), obtemos:

$$y + 2 \cdot 4 = 10 \Rightarrow y = 2$$

Substituindo $z = 4$ e $y = 2$ na equação (I), obtemos:

$$x + 3 \cdot 2 - 4 = 1 \Rightarrow x = -1$$

Assim: $S \{(-1, 2, 4)\}$

Observação

Podemos observar que a resolução de sistemas pelo método da substituição pode ser demasiadamente longa e trabalhosa, quando os sistemas não apresentam alguma forma simplificada como no primeiro exemplo. No entanto, quando o sistema apresenta a forma simples do segundo exemplo, que denominamos “forma escalonada”, a resolução pelo método da substituição é rápida e fácil.

Veremos, a seguir, como transformar um sistema linear $m \times n$ qualquer em um **sistema equivalente** na “forma escalonada”.

6. Sistemas Lineares Escalonados

Dizemos que um sistema linear é um **sistema escalonado** quando:

1ª) em cada equação existe pelo menos um coeficiente não-nulo;

2º) o número de coeficientes nulos, antes do

primeiro coeficiente não-nulo, cresce “da esquerda para a direita, de equação para equação”.

Exemplos

$$1^o) \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$2^o) \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ y+2z=3 \\ z=1 \end{cases}$$

$$3^a) \begin{cases} x+y+z+t=5 \\ y-t=2 \end{cases}$$

$$4^{\circ}) \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_4 = 5 \end{cases}$$

Existem dois tipos de sistemas escalonados:

1º tipo: número de equações **igual** ao número de incógnitas.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

Notamos que os sistemas deste tipo podem ser analisados pelo método de Cramer, pois são sistemas $n \times n$. Assim, sendo D o determinante da matriz dos coeficientes (incompleta), temos:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$D = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn} \neq 0$$

Como $D \neq 0$, os sistemas deste tipo são pos-



síveis e determinados e, para obtermos a solução única, partimos da n -ésima equação que nos dá o valor de x_n ; por substituição nas equações anteriores, obtemos sucessivamente os valores de x_{n-1} , x_{n-2} , ..., x_3 , x_2 e x_1 .

Exemplo

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z + t = 5 & \text{(I)} \\ y + z + 3t = 9 & \text{(II)} \\ 2z - t = 0 & \text{(III)} \\ 3t = 6 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Resolução

Na equação (IV), temos:

$$3t = 6 \Rightarrow t = 2$$

Substituindo $t = 2$ na equação (III), temos:

$$2z - 2 = 0 \Rightarrow z = 1$$

Substituindo $t = 2$ e $z = 1$ na equação (II), temos:

$$y + 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Rightarrow y = 2$$

Substituindo $t = 2$, $z = 1$ e $y = 2$, na equação (I), temos:

$$2x + 2 - 1 + 2 = 5 \Rightarrow x = 1$$

Assim: $S = \{(1, 2, 1, 2)\}$

2º tipo: número de equações **menor** que o número de incógnitas.

Para resolvermos os sistemas lineares com o número de incógnitas, devemos transformá-los em sistemas do 1º tipo, do seguinte modo:

- As incógnitas que não aparecem no início de nenhuma das equações do sistema, chamadas **variáveis livres**, devem ser “passadas” para os segundos membros das equações. Obtemos, assim, um sistema em que consideramos incógnitas apenas as equações que “sobraram” nos primeiros membros.

- Atribuímos às variáveis livres valores literais, na verdade “valores variáveis”, e resolvemos o sistema por substituição.

Exemplo

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2y - z = 2 \end{cases}$$

Resolução

A variável z é uma “variável livre” no sistema.

Então:

$$\begin{cases} x + y = 1 - 2z \\ 2y = 2 + z \end{cases}$$

Fazendo $z = \alpha$, temos:

$$\begin{cases} x + y = 1 - 2\alpha \\ 2y = 2 + \alpha \end{cases}$$

$$2y = 2 + \alpha \Rightarrow y = \frac{2 + \alpha}{2}$$

Substituindo $y = \frac{2 + \alpha}{2}$ na 1ª equação, temos:

$$x + \frac{2 + \alpha}{2} = 1 - 2\alpha \Rightarrow x = \frac{-5\alpha}{2}$$

Assim:

$$S = \left\{ \left(\frac{5\alpha}{2}, \frac{2 + \alpha}{2}, \alpha \right), \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Observações

- Para cada valor real atribuído a α , encontramos uma solução do sistema, o que permite concluir que o sistema é **possível e indeterminado**.

- A quantidade de variáveis livres que um sistema apresenta é chamada de **grau de liberdade** ou **grau de indeterminação** do sistema.

Exercícios Resolvidos

01. Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 & \text{(I)} \\ y + 2z = 5 & \text{(II)} \\ 3z = 3 & \text{(III)} \end{cases}$$

Resolução

Da equação (III):

$$3z = 3 \Rightarrow z = 1$$

Substituindo $z = 1$ na equação (II):

$$y + 2 \cdot (1) = 5 \Rightarrow y = 3$$

Substituindo $y = 3$ e $z = 1$ na equação (I):

$$x + (3) + (1) = 4 \Rightarrow x = 0$$

Assim:

$$S = \{(0, 3, 1)\}$$

02. Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ 3y + z = 1 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} x + 3y = 4 + z \\ 3y = 1 - z \end{cases}$$

Fazendo $z = \alpha$, temos:

$$\begin{cases} x + 3y = 4 + \alpha & (I) \\ 3y = 1 - \alpha & (II) \end{cases}$$

Da equação (II):

$$3y = 1 - \alpha \Rightarrow y = \frac{1 - \alpha}{3}$$

Substituindo $y = \frac{1 - \alpha}{3}$ na equação (I):

$$x + 3 \cdot \left(\frac{1 - \alpha}{3}\right) = 4 + \alpha$$

$$x + 1 - \alpha = 4 + \alpha$$

$$x = 3 + 2\alpha$$

Assim:

$$S = \left\{ \left(3 + 2\alpha, \frac{1 - \alpha}{3}, \alpha \right), \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

7. Escalonamento de um Sistema

Todo sistema linear possível pode ser transformado num sistema linear escalonado equivalente, através das **transformações elementares** a seguir.

1ª) Trocar a ordem em que as equações aparecem no sistema.

Exemplo

$$(S) = \begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \sim (S_1) \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

2ª) Inverter a ordem em que as incógnitas aparecem nas equações.

Exemplo

$$(S) = \begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ x + 2z = 1 \\ 3x = 5 \end{cases} \sim (S_1) \begin{cases} 2y + z + x = 5 \\ 2z + x = 1 \\ 3x = 5 \end{cases}$$

3ª) Multiplicar (ou dividir) uma equação por um número real não-nulo.

Exemplo

$$(S) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \sim (S_1) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 6x - 2y = 2 \end{cases}$$

Multiplicamos a 2ª equação de S por 2, para obtermos S_1 .

4ª) Adicionar a uma equação uma outra equação do sistema, previamente multiplicada por um número real não-nulo.

Exemplo

$$(S) = \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \sim (S_1) \begin{cases} x + 3y = 5 \\ -5y = -7 \end{cases}$$

Multiplicamos a 1ª equação de S por -2 e a adicionamos à 2ª equação para obtermos S_1 .

Para transformarmos um sistema linear (S) em um outro, **equivalente** e escalonado (S_1) , seguimos os seguintes passos.



1º) Usando os recursos das três primeiras transformações elementares, devemos obter um sistema em que a 1ª equação tem a 1ª incógnita com o coeficiente igual a 1.

2º) Usando a quarta transformação elementar, devemos “zerar” todos os coeficientes da 1ª incógnita em todas as equações restantes.

3º) “Abandonamos” a 1ª equação e repetimos os dois primeiros passos com as equações restantes, e assim por diante, até a penúltima equação do sistema.

Exemplos

1º) Escalonar e classificar o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 3x - y - 2z = -2 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 3x - y - 2z = -2 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x - y - 2z = -2 \\ 2x + y + z = 5 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -7y + z = -5 \\ -3y + 3z = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -7y + z = -5 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y - z = -1 \\ -7y + z = -5 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y - z = -1 \\ -6z = -12 \end{cases}$$

O sistema obtido está escalonado e é do 1º tipo (nº de equações igual ao nº de incógnitas), portanto, é um sistema possível e determinado.

2º) Escalonar e classificar o sistema:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 3 \\ 2x - y + 3z = 5 \\ 8x + y + z = 11 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} 3x + y - z = 3 \\ 2x - y + 3z = 5 \\ 8x + y + z = 11 \end{cases} \sim \begin{cases} y + 3x - z = 3 \\ -y + 2x + 3z = 5 \\ y + 8x + z = 11 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} y + 3x - z = 3 \\ 5x + 2z = 8 \\ 5x + 2z = 8 (*) \end{cases} \sim \begin{cases} y + 3x - z = 3 \\ 5x + 2z = 8 \end{cases}$$

O sistema obtido está escalonado e é do 2º tipo (nº de equações menor que o nº de incógnitas), portanto, é um sistema possível e indeterminado.

(*) A terceira equação foi eliminada do sistema, visto que ela é equivalente à segunda equação. Se nós não tivéssemos percebido essa equivalência, no passo seguinte obteríamos na terceira equação: $0x + 0z = 0$, que é uma equação satisfeita para todos os valores reais de x e z .

3º) Escalonar e classificar o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 5y + z = 5 \\ x + 2y - z = 3 \\ 4x + 9y - z = 8 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} 2x + 5y + z = 5 \\ x + 2y - z = 3 \\ 4x + 9y - z = 8 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 5y + z = 5 \\ 4x + 9y - z = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ y + 3z = -1 \\ y + 3z = -4 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ y + 3z = -1 \\ 0y + 0z = -3 \end{cases}$$

O sistema obtido é impossível, pois a terceira equação nunca será verificada para valores reais de y e z .

4º) Escalonar e classificar o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \\ 2x + 6y + 2z = 22 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \\ 2x + 6y + 2z = 22 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 4z = 7 \\ y + 2z = 5 \\ 2y + 8z = 14 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 4z = 7 \\ -2z = -2 \\ 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 4z = 7 \\ -2z = -2 \end{cases}$$

O sistema obtido está na forma escalonada e é do 1º tipo (nº de equações igual ao nº de incógnitas), portanto, é um sistema possível e determinado.

Observação

Dado um sistema linear, sempre podemos “tentar” o seu escalonamento. Caso ele seja impossível, isto ficará evidente pela presença de uma equação que não é satisfeita por valores reais (exemplo: $0x + 0y = 3$). No entanto, se o sistema é possível, nós sempre conseguimos um sistema escalonado equivalente, que terá nº de equações igual ao nº de incógnitas (possível e determinado), ou então o nº de equações será menor que o nº de incógnitas (possível e indeterminado).

Este tratamento dado a um sistema linear para a sua resolução é chamado de **método de eliminação de Gauss**.

Exercícios Resolvidos

Escalonar e resolver os sistemas abaixo:

01.
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 10 \\ x + 2y + 2z = 11 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 10 \\ x + 2y + 2z = 11 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 2z = 11 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \\ -y - 2z = -8 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \\ -z = -3 \end{cases}$$

O sistema está escalonado e $z = 3$. Substituindo $z = 3$ na 2ª equação:

$$y + 3 = 5 \Rightarrow y = 2$$

Substituindo $z = 3$ e $y = 2$ na 1ª equação:

$$x + 2 + 3 = 6 \Rightarrow x = 1$$

Portanto, teremos:

$$S = \{(1, 2, 3)\}$$

02.
$$\begin{cases} a + b + c = 12 \\ 3a - b + 2c = 14 \\ 2a - 2b + c = -3 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} a + b + c = 12 \\ 3a - b + 2c = 14 \\ 2a - 2b + c = -3 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} a + b + c = 12 \\ -4b - c = -22 \\ -4b - c = -27 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} a + b + c = 12 \\ -4b - c = -22 \\ 0 = -5 \end{cases}$$

O sistema é impossível, pois a 3ª equação nunca será satisfeita.

$$\text{Assim: } S = \emptyset$$



03.
$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 3x - y + z = 5 \end{cases}$$

Resolução

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 3x - y + z = 5 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ -7y + 4z = -7 \end{cases}$$

O sistema é indeterminado, sendo z a variável livre, logo $z = t$:

$$-7y + 4t = -7 \Rightarrow 7y - 4t = 7$$

$$y = \frac{4t+7}{7}$$

Substituindo na 1ª equação:

$$x + 2\left(\frac{4t+7}{7}\right) - t = 4 \Rightarrow x = \frac{14-t}{7}$$

Portanto:

$$S = \left\{ \left(\frac{14-t}{7}, \frac{4t+7}{7}, t \right), t \in \mathbb{R} \right\}$$

8. Discussão de Sistemas Lineares

Discutir um sistema linear é determinar; quando ele é:

- possível e determinado (solução única);
- possível e indeterminado (infinitas soluções);
- impossível (nenhuma solução),

em função de um ou mais **parâmetros** presentes no sistema.

Estudaremos as técnicas de discussão de sistemas com o auxílio de exemplos.

8.1. Sistemas com Número de Equações Igual ao Número de Incógnitas

Quando o sistema linear apresenta n° de equações igual ao n° de incógnitas, para dis-

cutirmos o sistema, inicialmente calculamos o determinante D da matriz dos coeficientes (incompleta), e:

1º) Se $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado.

2º) Se $D = 0$, o sistema será possível e indeterminado ou impossível.

Para identificarmos se o sistema é possível, indeterminado ou impossível, devemos conseguir um sistema escalonado equivalente pelo método de eliminação de Gauss.

Exemplos

01. Discutir, em função de a , o sistema:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + ay = 1 \end{cases}$$

Resolução

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a - 6$$

$$D = 0 \Rightarrow a - 6 = 0 \Rightarrow a = 6$$

Assim, para $a \neq 6$, o sistema é possível e determinado.

Para $a = 6$, temos:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 6y = 1 \end{cases} \xrightarrow{-2} \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 0x + 0y = -9 \end{cases}$$

que é um sistema impossível.

Assim, temos:

$a \neq 6 \Rightarrow SPD$ (Sistema possível e determinado)

$a = 6 \Rightarrow SI$ (Sistema impossível)

02. Discutir, em função de a , o sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$

Resolução

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} = 9 + a - 2a + 3 - 6 - a^2$$

$$D = 0 \Rightarrow -a^2 - a + 6 = 0 \Rightarrow a = -3 \text{ ou } a = 2$$

Assim, para $a \neq -3$ e $a \neq 2$, o sistema é possível e determinado.

Para $a = -3$, temos:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y - 3z = 3 \\ x - 3y + 3z = 2 \end{cases} \xrightarrow{\sim} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - z = 1 \\ -4y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\sim} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - z = 1 \\ -4y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\sim} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - z = 1 \\ y + z = 5 \end{cases} \text{ sistema impossível.}$$

Para $a = 2$, temos:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases} \xrightarrow{\sim} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 4z = 1 \\ y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\sim} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 4z = 1 \\ y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\sim} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 4z = 1 \end{cases}$$

sistema possível indeterminado

Assim, temos:

$$a \neq -3 \text{ e } a \neq 2 \Rightarrow \text{SPD}$$

$$a = -3 \Rightarrow \text{SI}$$

$$a = 2 \Rightarrow \text{SPI}$$

03. Discutir, em função de m e k , o sistema:

$$\begin{cases} mx + y = k \\ x + my = k^2 \end{cases}$$

Resolução

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$$

$$D = 0 \Rightarrow m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = +1 \text{ ou } m = -1$$

Assim, para $m \neq +1$ e $m \neq -1$, o sistema é possível e determinado.

Para $m = 1$, temos:

$$\begin{cases} x + y = k \\ x + y = k^2 \end{cases} \xrightarrow{\sim} \begin{cases} x + y = k \\ 0x + 0y = -k + k^2 \end{cases}$$

Se $-k + k^2 = 0$, ou seja, $k = 0$ ou $k = 1$, o sistema é possível e indeterminado.

Se $-k + k^2 \neq 0$, ou seja, $k \neq 0$ ou $k \neq 1$, o sistema é impossível.

Para $m = -1$, temos:

$$\begin{cases} -x + y = k \\ x - y = k^2 \end{cases} \xrightarrow{\sim} \begin{cases} x - y = k^2 \\ -x + y = k \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\sim} \begin{cases} x - y = k^2 \\ 0x + 0y = k^2 + k \end{cases}$$

Se $k^2 + k = 0$, ou seja, $k = 0$ ou $k = -1$, o sistema é possível e indeterminado.

Se $k^2 + k \neq 0$, ou seja, $k \neq 0$ ou $k \neq -1$, o sistema é impossível.

Assim, temos:

$$m \neq +1 \text{ e } m \neq -1, \forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{SPD}$$

$$\left. \begin{array}{l} m = +1 \text{ e } k = 0 \text{ ou } k = 1 \\ \text{ou} \\ m = -1 \text{ e } k = 0 \text{ ou } k = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{SPI}$$

$$\left. \begin{array}{l} m = +1 \text{ e } k \neq 0 \text{ ou } k \neq 1 \\ \text{ou} \\ m = -1 \text{ e } k \neq 0 \text{ ou } k \neq -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{SI}$$



8.2. Sistemas com Número de Equações Diferente do Número de Incógnitas

Quando o sistema linear apresenta número de equações diferente do número de incógnitas, para discuti-lo, devemos obter um sistema escalonado equivalente pelo método de eliminação de Gauss.

Exemplos

01. Discutir, em função de m , o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \\ x - my = 3 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \\ x - my = 3 \end{cases} \xrightarrow{\substack{-2 \quad -1}} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y = 3 \\ y = 2 \\ (-1 - m)y = 0 \end{cases} \xrightarrow{1+m}$$

$$\sim \begin{cases} x + y = 3 \\ y = 2 \\ 0y = 2 + 2m \end{cases}$$

$$2 + 2m = 0 \Rightarrow m = -1$$

Assim, temos:

$$m \neq -1 \Rightarrow SI$$

$$m = -1 \Rightarrow SPD$$

02. Discutir, em função de k , o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 2x + 5y + 3z = 12 \\ 3x + 7y + 2z = 17 \\ 5x + 12y + kz = 29 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 2x + 5y + 3z = 12 \\ 3x + 7y + 2z = 17 \\ 5x + 12y + kz = 29 \end{cases} \xrightarrow{\substack{-2 \quad -3 \quad -5}} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ y + z = 2 \\ y + 5z = 2 \\ 2y + (5+k)z = 4 \end{cases} \xrightarrow{\substack{-1 \quad -2}} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ y + z = 2 \\ 4z = 0 \\ (3+k)z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\div 4}$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ y + z = 2 \\ z = 0 \\ (3+k)z = 0 \end{cases} \xrightarrow{-3-K}$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ y + z = 2 \\ z = 0 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ y + z = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Assim, para $\forall k \in \mathbb{R}$, o sistema é possível e determinado.

Exercícios Resolvidos

01. Discutir, segundo os parâmetros a e b , o sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 3 \\ x - ay = 2 \\ 2x + 3y - z = b \end{cases}$$

Resolução

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -a & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow D = 3a + 6$$

Se $D \neq 0$, então $a \neq -2$ e teremos SPD

Se $a = -2$, teremos

$$\begin{cases} x + 3y + z = 3 \\ x + 2y = 2 \\ 2x + 3y - z = b \end{cases}$$

Vamos usar a matriz associada para escalonar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -6+b \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3+b \end{pmatrix}$$

Da última equação tiramos $b = 3$ e teremos SPD; se $b \neq 3$ teremos SI.

Resposta

$a \neq -2 \Rightarrow SPD$

$a = -2$ e $b = 3 \Rightarrow SPI$

$a = -2$ e $b \neq 3 \Rightarrow SI$

02. Discutir, segundo os valores de n o sistema:

$$\begin{cases} a + 2b + c = 3 \\ 2a + 4b + 2c = n \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} a + 2b + c = 3 \\ 2a + 4b + 2c = n \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} a + 2b + c = 3 \\ 0 + 0 + 0 = n - 6 \end{cases}$$

Pela última equação: $n = 6 \Rightarrow SPI$

Resposta

$n = 6 \Rightarrow SPI$

$n \neq 6 \Rightarrow SI$

03. (Fuvest-SP) O sistema linear

$$\begin{cases} x + ky - 2z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$$

Não admite uma única solução para que valor de k ?

Resolução

Teremos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & k & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2k + 4 = 0 \text{ e } k = -2$$

Resposta

Para $k = -2$ o sistema não terá uma única solução.

8.3. Sistema Linear Homogêneo

Já sabemos que sistema linear homogêneo é todo sistema cujas equações têm todos os termos independentes iguais a zero.

São homogêneos os sistemas:

$$01 \begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$02 \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 5x + 3y - 7z = 0 \end{cases}$$

Observe que a dupla $(0, 0)$ é solução do sistema 01 e a terna $(0, 0, 0)$ é solução do sistema 02.

Todo sistema linear homogêneo admite como solução uma seqüência de zeros, chamada **solução nula** ou **solução trivial**. Observamos também que todo sistema homogêneo é sempre **possível** podendo, eventualmente, apresentar outras soluções além da solução trivial, que são chamadas soluções **próprias**.



Lembre-se que: todo sistema linear homogêneo tem ao menos a solução trivial, portanto será sempre possível.

01. Classifique e resolva o sistema:

$$\begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x + 5y - z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -12$$
$$S = \{(0, 0, 0)\}$$

02. Classifique e resolva o sistema:

$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ a - 3b - 2c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Fazendo o escalonamentos temos:

$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ a - 3b - 2c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ 0 - 4b - 4c = 0 \\ 0 - 3b - 3c = 0 \end{cases}$$
$$\sim \begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ 0 + b + c = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$
$$b = -c \Rightarrow b = -t$$

$$a - t + 2t = 0 \Rightarrow a = -t$$

$$S = \{(-t, -t, t), t \in \mathbf{R}\}$$

03. Determine $\mathbf{K}$ de modo que o sistema abaixo tenha solução diferente da trivial.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - ky + z = 0 \\ kx - y - z = 0 \end{cases}$$

O sistema é homogêneo e, para apresentar soluções diferentes da trivial, devemos ter $D=0$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-k & 1 & 1 \\ k & -1 & -1 \end{vmatrix} = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 = 0 \Rightarrow k = -1$$

Resposta: $k = -1$

01. UFPR-PR

Para que o sistema

$$\begin{cases} 2x + 5y - z = 0 \\ x + 10y - 2z = 0 \\ 6x - 15y - mz = 0 \end{cases}$$

admita solução única, deve-se ter:

- a) $m \neq 1$ d) $m \neq 3$
b) $m \neq 2$ e) $m \neq -3$
c) $m \neq -2$

Resolução

Calculando o determinante da matriz incompleta:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 10 & -2 \\ 6 & -15 & m \end{vmatrix} = 15m - 45$$

Para admitir solução única, devemos ter $D \neq 0$, logo

$$15m - 45 \neq 0 \Rightarrow m \neq 3$$

Resposta: D

02. A soma dos valores de k que tornam o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ kx + 3y + 4z = 0 \\ x + ky + 3z = 0 \end{cases}$$

indeterminado é:

- a) -7 d) 7
b) -2 e) 10
c) 2

Resolução

Devemos ter $D = 0$:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 3 & 4 \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix} = k^2 - 7k + 10 = 0$$

Resposta: D

$$k^2 - 7k + 10 = 0 \Rightarrow k = 5 \text{ ou } k = 2$$

Assim: soma = $5 + 2 = 7$

03. Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \end{cases}$$

Resolução

O sistema deve ser escalonado, pois o número de equações é menor que o número de incógnitas.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 0 + 7y - 6z = 0 \end{cases}$$

z é a variável livre; fazendo $z = t$:

$$7y - 6t = 0 \Rightarrow y = \frac{6t}{7}$$

Substituindo na 1ª, teremos:

$$x - \frac{12t}{7} + t = 0 \Rightarrow x = \frac{5t}{7}$$

O sistema é indeterminado, apresentando a solução geral.

$$S = \left\{ \left(\frac{5t}{7}, \frac{6t}{7}, t \right), t \in \mathbb{R} \right\}$$





