MATEMÁTICA

Aula 11

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

TÓPICOS

-DEFINIÇÃO

-REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

-EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES

Função Logarítmica

Vejamos a definição de função LOGARÍTMICA:

$$\begin{aligned} f: \Re_+^* &\to \Re \\ x &\mapsto \boxed{y = \log_b x}, \quad \text{com } b > 0 \text{ e } b \neq 1. \end{aligned}$$

Domínio : $\Re_+^*$

Contradomínio : $\Re$

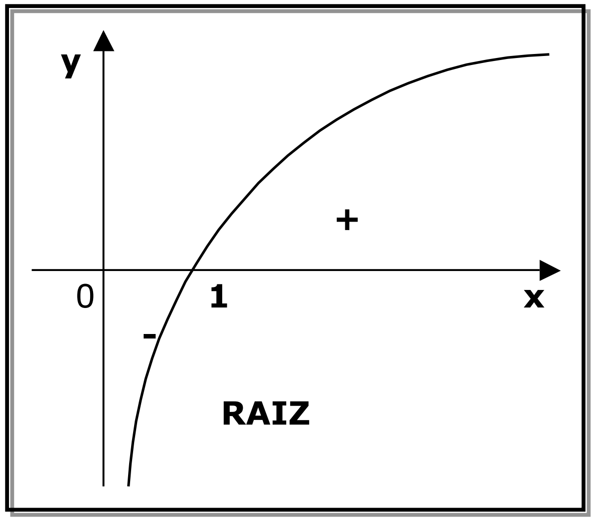
<u>b</u> é a base da função

O gráfico depende da base b:

$$f(x) = \log_b x$$

$b > 1$

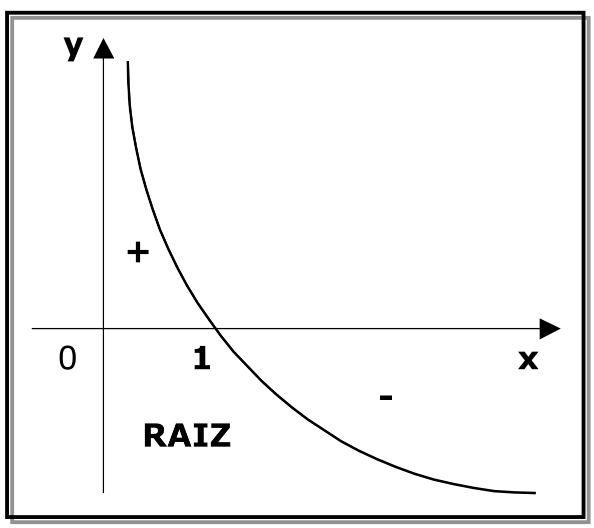
ESTRITAMENTE CRESCENTE



$$f(x) = \log_b x$$

$0 < b < 1$

ESTRITAMENTE DECRESCENTE



Por ser função bijetora, admite inversa:

$$f:\ \Re_+^* \to \Re$$
$$x \mapsto y = \log_b x\ ,\quad \text{com } b > 0 \text{ e } b \neq 1.$$

Inversa

I) $x = \log_b y$

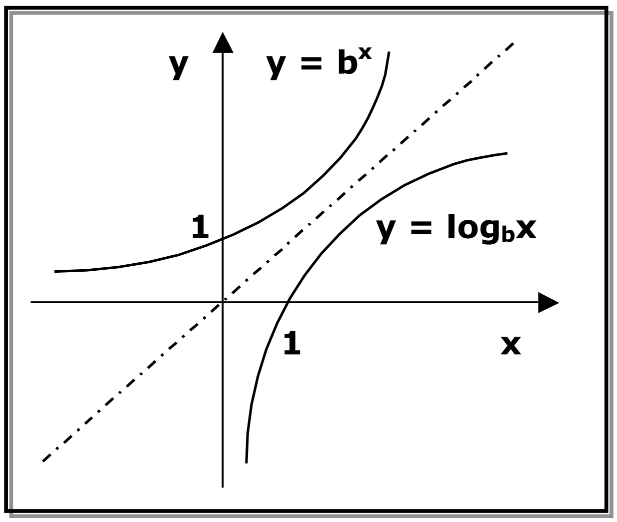
II) $b^x = y$

$$f^{-1}:\ \Re \to \Re_+^*$$
$$x \mapsto \boxed{y = b^x}$$

Abaixo, os dois casos(crescente e decrescente) da função logarítmica e exponencial(sua inversa) :

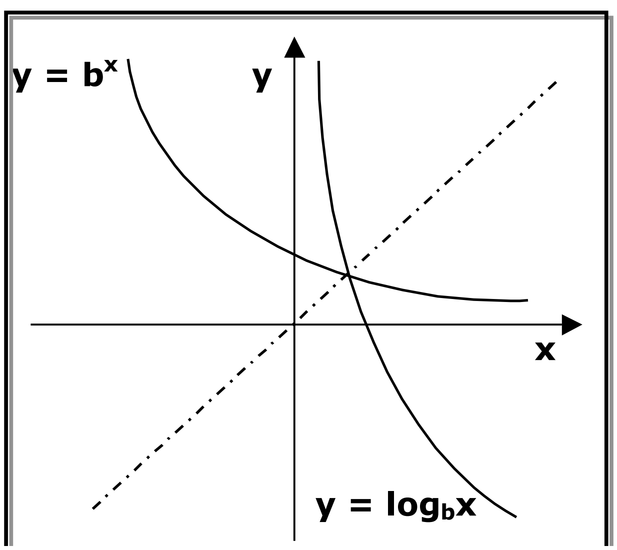
$$f(x) = \log_b x$$

$b > 1$



$$f(x) = \log_b x$$

$0 < b < 1$

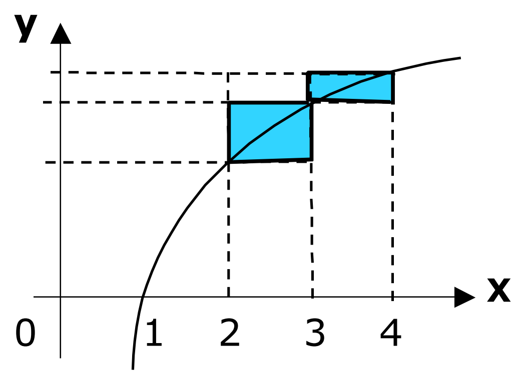


Exercício 1

O pH de uma solução iônica pode ser obtido pela relação $\mathbf{pH = \log\left(\frac{1}{H^{+}}\right)}$, onde H^{+} é a concentração de hidrogênio em íons-grama por litro de solução. Qual o pH de uma solução em que $H^{+} = 1{,}0 \,.\, 10^{-8}$?

Exercício 2

A curva da figura que se segue representa o gráfico da função **$y = \log_{10} x$**, com x > 0. Assim sendo, qual a área da região hachurada nos triângulos?



Exercício 3

A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o modelo matemático: $\mathbf{h(t) = 1{,}5 + \log_3(t+1)}$. Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5m de altura, qual o tempo (em anos) transcorrido do momento da plantação até o do corte?

Exercício 4

Resolva, no domínio dos reais, a inequação $\mathbf{\ln(4-x) - \ln x < 0}$.

Exercício 5

Resolva, no domínio dos reais, a inequação $\log_{1/2}(x+1) + \log_{11/2}(5-x) \geq -3$.

Resolução do exercício 1.

$$\boxed{\mathbf{pH = log\left(\frac{1}{H^+}\right)}}$$

$H^+ = 1{,}0\ .\ 10^{-8} \quad \Rightarrow \quad pH = \log\left(\dfrac{1}{1{,}0.10^{-8}}\right)$

$\Rightarrow \quad pH = \log 10^{8}$

$\Rightarrow \quad pH = 8.\log 10$

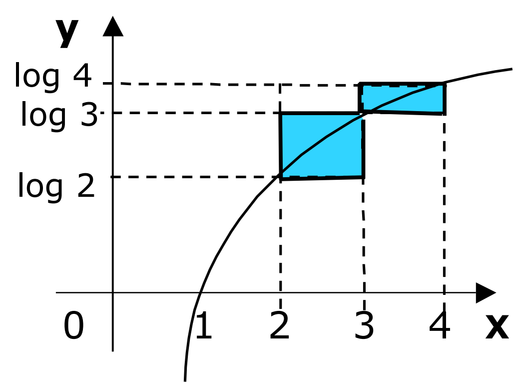
$\Rightarrow \quad \boxed{pH = 8}$

Resolução do exercício 2.

I) Área do *maior* $(2 \le x \le 3)$

$A_M = (3 - 2).(\log_{10}3 - \log_{10}2)$

$$\boxed{A_M = \log_{10}3 - \log_{10}2}$$



II) Área do *menor* $(3 \le x \le 4)$

$A_m = (4 - 3).(\log_{10}4 - \log_{10}3) \Rightarrow \boxed{A_m = \log_{10}4 - \log_{10}3}$

Área total = $A_M + A_m$

$A_T = (\log_{10}3 - \log_{10}2) + (\log_{10}4 - \log_{10}3)$

$A_T = \log_{10}3 - \log_{10}2 + \log_{10}4 - \log_{10}3$

$A_T = \log_{10}4 - \log_{10}2$

$A_T = \log_{10}\left(\dfrac{4}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_T = \log_{10}2}$

Resolução do exercício 3.

$$\boxed{h(t) = 1{,}5 + \log_3(t+1)}$$

$$h(t) = 3{,}5$$

$$\Rightarrow 1{,}5 + \log_3(t+1) = 3{,}5$$

$$\Rightarrow \log_3(t+1) = 2 \quad \Rightarrow \quad 3^2 = t+1$$

$$\Rightarrow t+1 = 9$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 8 \text{ anos}}$$

Resolução do exercício 4.

$$\boxed{\ln(4-x) - \ln x < 0}$$

Condições de existência:

$$\begin{cases} 4 - x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x > -4 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 4$$

$$\ln(4-x) - \ln x < 0$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{4-x}{x}\right) < \ln e^0$$

$$\Rightarrow \frac{4-x}{x} < e^0$$

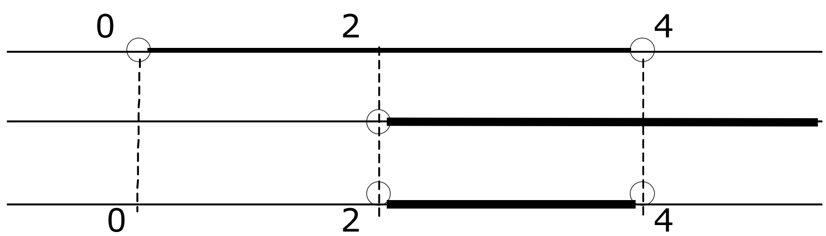
$$\Rightarrow \frac{4-x}{x} < 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4 - x}{x} < 1$$

$$\Rightarrow \quad 4 - x < x$$

$$\Rightarrow \quad -2x < -4$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x > 2}$$



$$\boxed{S = \{x \in \Re \,/\, 2 < x < 4\}}$$

Resolução do exercício 5.

$$\boxed{\log_{1/2}(x + 1) + \log_{1\frac{1}{2}}(5 - x) \geq -3}$$

Condições de existência:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ 5 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ -x > -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{-1 < x < 5}$$

$$\log_{1/2}(x + 1) + \log_{1\frac{1}{2}}(5 - x) \geq -3$$

$$\Rightarrow \log_{1/2}[(x + 1).(5 - x)] \geq \log_{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$y = \log_b x$, com $0<b<1$

é função decrescente

$$\Rightarrow (x+1).(5-x) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$\Rightarrow (x+1).(5-x) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

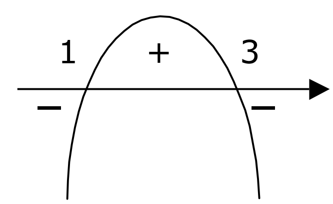
$$\Rightarrow (x+1).(5-x) \leq 2^{3}$$

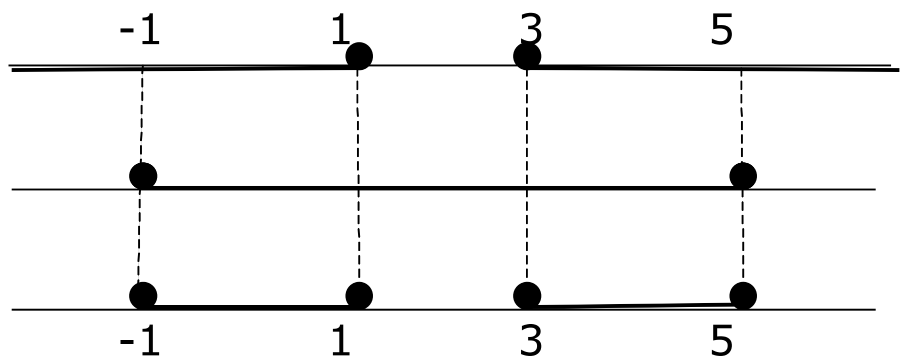
$$\Rightarrow 5x - x^{2} + 5 - x \leq 8$$

$$\Rightarrow - x^{2} + 4x - 3 \leq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x \leq 1 \text{ ou } x \geq 3}$$

$$\begin{cases} S = - b/a = 4 \\ P = c/a = 3 \end{cases}$$





$$\boxed{S = \{x \in \Re \,/\, 1- \leq x \leq 1 \text{ ou } 3 \leq x \leq 5\}}$$