

MATEMÁTICA - AULA 12
ÁLGEBRA

MÓDULO DE UM NÚMERO REAL

Módulo ou valor absoluto de um número real.

Definição:

Seja x um número real:

- Se $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$

- Se $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

Exemplos₁:

$$|7| = 7$$

$$|25| = 25$$

$$|0| = 0$$

$$|-5| = 5 \quad \text{Obs. } 5 = -(-5)$$

$$|-10| = 10 \quad \text{Obs. } 10 = -(-10)$$

Exemplo₂:

Calcule o valor de:

$$|-5| + |-7| + |3| - |10|$$

Resolução:

$$|-5| + |-7| + |3| - |10| =$$

$$= 5 + 7 + 3 - 10 = 15 - 10 = 5$$

Exemplo₃:

Calcule o valor de $|x - 2| + |7 - x| + |x + 1|$ para $x = 10$.

Resolução:

$$|x - 2| + |7 - x| + |x + 1| = |10 - 2| + |7 - 10| + |10 + 1| =$$

$$= |8| + |-3| + |11| = 8 + 3 + 11 = 22$$

Propriedades:

Seja a um número Real maior do que zero, temos:

1 - $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$

2 - $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

3 - $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ ou $x > a$

4 - Se $n = \text{ímpar} \Rightarrow \sqrt[n]{x^n} = x$

5 - Se $n = \text{par} \Rightarrow \sqrt[n]{x^n} = |x|$

6 - $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

7 - $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

$$|x| = \pm x$$

Exemplos:

$$|x| = 5 \Leftrightarrow x = \pm 5$$

$$|x| = 7 \Leftrightarrow x = \pm 7$$

$$|x - 7| = \pm(x - 7)$$

- Se $x \geq 7 \Rightarrow |x - 7| = x - 7$ (pois $x - 7 \geq 0$)

- Se $x \leq 7 \Rightarrow |x - 7| = -(x - 7) = -x + 7$ (pois $x - 7 \leq 0$)

$$|7 - x| = \pm(7 - x)$$

- Se $x \leq 7 \Rightarrow |7 - x| = 7 - x$ (pois $7 - x \geq 0$)

- Se $x \geq 7 \Rightarrow |7 - x| = -(7 - x) = -7 + x$ (pois $7 - x \leq 0$)

Exemplo₁:

Resolver em \mathfrak{R} a equação:

$$|x - 7| = 5$$

Resolução:

$$|x - 7| = 5$$



1) se $x \leq 7$

$$-(x - 7) = 5 \quad .(-1)$$

$$x - 7 = -5$$

$$x = -5 + 7$$

$$x = 2$$

2) se $x \geq 7$

$$x - 7 = 5$$

$$x = 5 + 7$$

$$x = 12$$

Obs.: Como $2 \leq 7$ e $12 \geq 7$, as duas respostas servem

$$V = \{ 2; 12 \}$$

Exemplo₂:

Resolver em \mathfrak{R} a equação:

$$|x - 3| + |x - 5| = 10$$

Resolução:

$$|x - 3| + |x - 5| = 10$$

1) se $x \leq 3$

$$-(x - 3) - (x - 5) = 10$$

$$-x + 3 - x + 5 = 10$$

$$-2x + 8 = 10$$

$$-2x = 10 - 8$$

$$-2x = 2 \quad .(-1)$$

$$2x = -2$$

$$x = -1$$

Obs.:

$-1 \leq 3$ (serve)

$9 \geq 5$ (serve)

Quando $3 \leq x \leq 5$, não existe solução.

$V = \{ -1; 9 \}$

2) se $3 \leq x \leq 5$

$$x - 3 - (x - 5) = 10$$

$$x - 3 - x + 5 = 10$$

$$2 = 10$$

(F)

3) se $x \geq 5$

$$x - 3 + x - 5 = 10$$

$$2x - 8 = 10 \quad --$$

$$2x = 10 + 8$$

$$2x = 18$$

$$x = \frac{18}{2}$$

$$x = 9$$

Inequações modulares

$$|x - 3| < 5$$

Resolução:

$$-5 < x - 3 < 5$$

$$-5 + 3 < x < 5 + 3$$

$$-2 < x < 8$$

$$V = \{ x \in \mathbb{R} / -2 < x < 8 \}$$

$$|x - 3| > 5$$

Resolução:

$$-(x - 3) > 5 \quad .(-1) \quad x - 3 > 5$$

$$x - 3 < -5 \quad x > 5 + 3$$

$$x < -5 + 3 \quad x > 8$$

$$x < -2$$

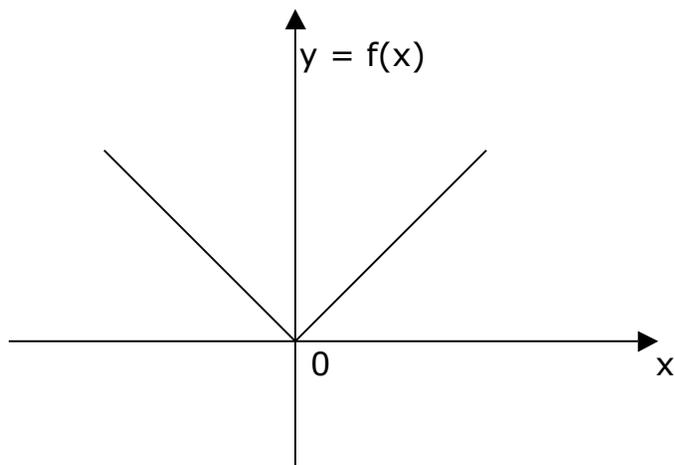
$$V = \{ x \in \mathbb{R} / x < -2 \text{ ou } x > 8 \}$$

Gráfico da função modular

$$f(x) = |x|$$

1) Se $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow f(x) = x$

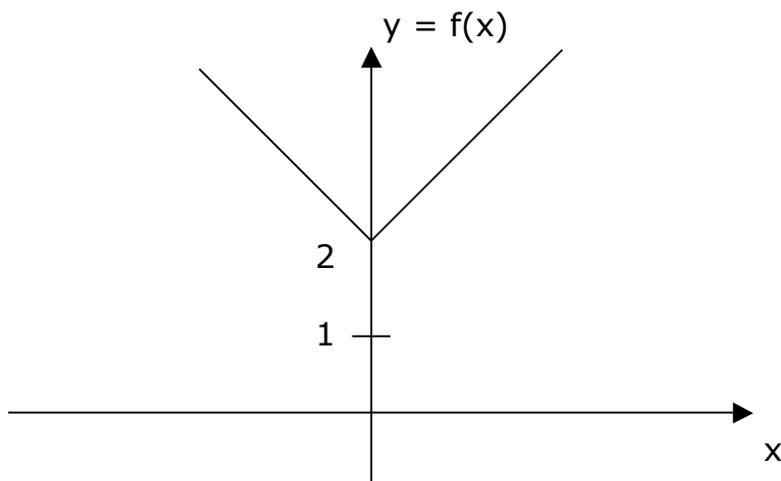
2) Se $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow f(x) = -x$



$$F(x) = |x| + 2$$

1) Se $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow f(x) = x + 2$

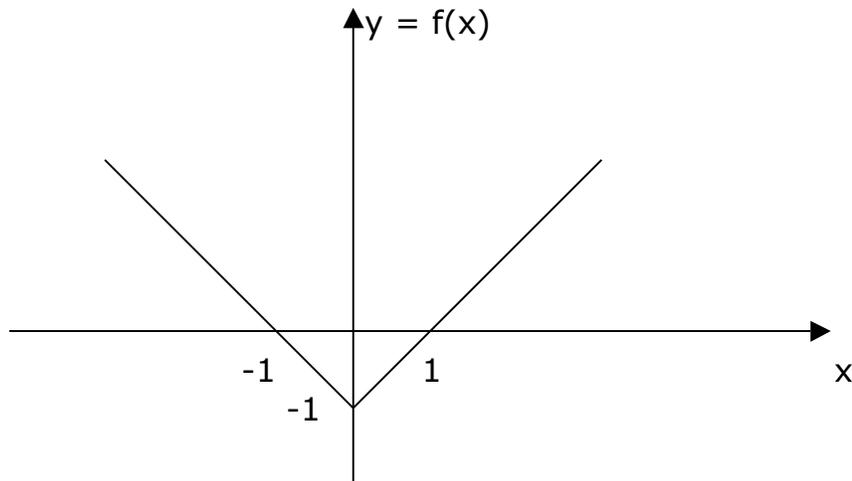
2) Se $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow f(x) = -x + 2$



$$f(x) = |x| - 1$$

1) Se $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow f(x) = x - 1$

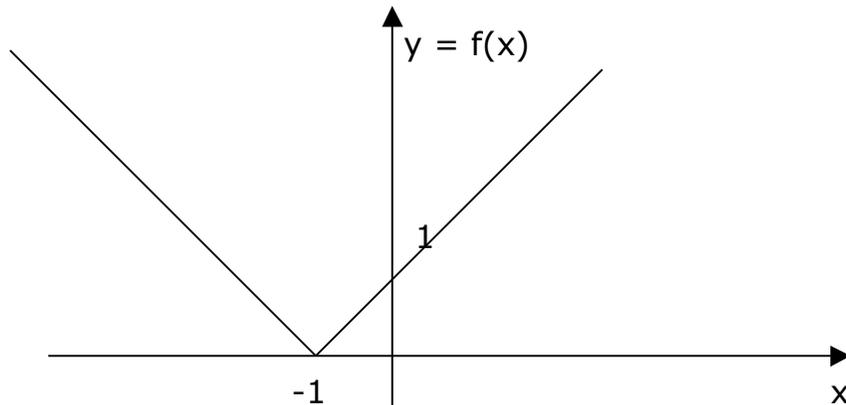
2) Se $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow f(x) = -x - 1$



$$f(x) = |x+1|$$

1) Se $x + 1 \geq 0 \Rightarrow |x+1| = x + 1 \Rightarrow f(x) = x + 1$

2) Se $x + 1 < 0 \Rightarrow |x+1| = -x - 1 \Rightarrow f(x) = -x - 1$



Exercícios:

1) Calcule o valor de $|2x - 9| + |7 - x| + |1 - x|$ para $x = 3$

2) Resolver em \Re a equação $|x - 3| = 20$

3) Resolver em \Re a equação $|x - 2| + |x - 7| = 7$

4) Resolver em \Re a equação $\sqrt{(x - 3)^2} = 5$

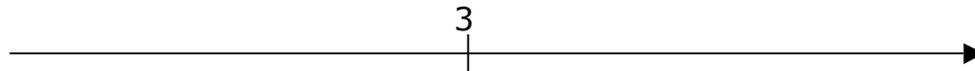
5) Resolver em \Re a inequação $|x - 7| < 3$

Resolução:

1) Calcule o valor de $|2x - 9| + |7 - x| + |1 - x|$ para $x = 3$

$$\begin{aligned} &|2 \cdot 3 - 9| + |7 - 3| + |1 - 3| = \\ &= |-3| + |4| + |-2| = \\ &= 3 + 4 + 2 = 9 \end{aligned}$$

2) Resolver em \mathfrak{R} a equação $|x - 3| = 20$



1) Se $x \leq 3$

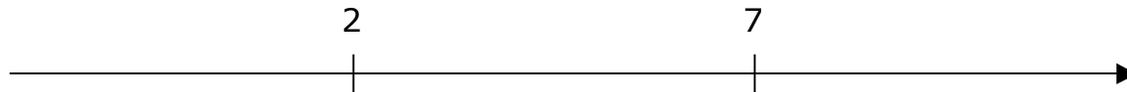
$$\begin{aligned} -(x - 3) &= 20 \quad \cdot (-1) \\ x - 3 &= -20 \\ x &= -20 + 3 \\ x &= -17 \end{aligned}$$

2) Se $x \geq 3$

$$\begin{aligned} x - 3 &= 20 \\ x &= 20 + 3 \\ x &= 23 \end{aligned}$$

$$V = \{ -17; 23 \}$$

3) Resolver em \mathfrak{R} a equação $|x - 2| + |x - 7| = 7$



1) se $x \leq 2$

$$\begin{aligned} -(x - 2) - (x - 7) &= 7 \quad \cdot (-1) \\ x - 2 + x - 7 &= -7 \\ 2x - 9 &= -7 \\ 2x &= -7 + 9 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

2) se $2 \leq x \leq 7$

$$\begin{aligned} x - 2 - (x - 7) &= 7 \\ x - 2 - x + 7 &= 7 \\ 5 &= 7 \\ &(\text{F}) \end{aligned}$$

3) se $x \geq 7$

$$\begin{aligned} x - 2 + x - 7 &= 7 \\ 2x - 9 &= 7 \\ 2x &= 7 + 9 \\ 2x &= 16 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

$$V = \{ 1; 8 \}$$

4) Resolver em \mathfrak{R} a equação $\sqrt{(x - 3)^2} = 5$

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - 3)^2} &= |x - 3| \\ |x - 3| &= 5 \end{aligned}$$



1) Se $x \leq 3$

$$-(x - 3) = 5 \quad \cdot (-1)$$

$$x - 3 = -5$$

$$x = -5 + 3$$

$$x = -2$$

2) Se $x \geq 3$

$$x - 3 = 5$$

$$x = 5 + 3$$

$$x = 8$$

$$V = \{ -2; 8 \}$$

5) Resolver em \mathfrak{R} a inequação $|x - 7| < 3$

$$-3 < x - 7 < 3$$

$$-3 + 7 < x < 3 + 7$$

$$4 < x < 10$$

$$V = \{ x \in \mathfrak{R} / 4 < x < 10 \}$$

