AULA 16
PROF. PAULO
P.G. – PRODUTO, SOMA E LIMITE DA SOMA DOS TERMOS

Produto dos termos de uma P.G.
Dada uma P.G.(a_1, a_2, a_3, ..., a_n), o produto dos **n** primeiros termos desta P.G. é dado por:

$|P_n| = \sqrt{(a_1.a_n)^n}$

Exemplo:
Calcule o produto dos vinte primeiros termos da P.G.(1, 2, 4, 8, ...)
Resolução:
P.G.(1, 2, 4, 8, ...)
$a_1 = 1$ e $q = 2$
$a_n = a_1.q^{n-1}$
$a_{20} = a_1.q^{20-1}$
$a_{20} = 1.2^{19}$
$a_{20} = 2^{19}$
$|P_n| = \sqrt{(a_1.a_n)^n}$
$|P_{20}| = \sqrt{(a_1.a_{20})^{20}}$
$|P_{20}| = \sqrt{(1.2^{19})^{20}}$
$|P_{20}| = \sqrt{(2^{19})^{20}}$
$|P_{20}| = (2^{19})^{10}$
$|P_{20}| = 2^{190}$
Como os termos da P.G. são positivos, $P_{20} \geq 0$
$P_{20} = 2^{190}$

Soma dos termos
Seja uma progressão geométrica de primeiro termo a_1 e razão q. A soma dos n primeiros termos desta progressão (S_n) é calculada por:

$$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}$$

Ou

$$S_n = \frac{a_1.(1 - q^n)}{1 - q}$$

Exemplos:

Calcule a soma dos vinte primeiros termos da P.G. (1, 2, 4, 8, 16, ...)
Resolução:

a_1 = 1

q = 2

n = 20

$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}$

$S_{20} = \frac{a_1.(q^{20} - 1)}{q - 1}$

$S_{20} = \frac{1.(2^{20} - 1)}{2 - 1}$

$S_{20} = \frac{(2^{10}.2^{10} - 1)}{1}$

S_{20} = (1024.1024 – 1)

S_{20} = 1.048.576 – 1

S_{20} = 1.048.575

Calcular a soma dos sete primeiros termos da P.G.(1; 3; 9; ...)
Resolução:

a_1 = 1

q = 3

n = 7

$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}$

$S_7 = \frac{a_1.(q^7 - 1)}{q - 1}$

$S_7 = \frac{1.(3^7 - 1)}{3 - 1}$

$S_7 = \frac{2187 - 1}{2}$

$S_7 = \frac{2186}{2}$

S_7 = 1093

Série geométrica (S_n)

Série geométrica é uma série gerada por uma progressão geométrica, sendo que, cada termo da série é a soma do termo correspondente na PG com todos os termos anteriores à ele.

Exemplo:
Da PG (1, 2, 4, 8, ...) obtém-se a série geométrica S_n (1, 3, 7, 15,...).
Note que:
3 = 2 + 1
7 = 4 + 2 + 1
15 = 8 + 4 + 2 + 1

Série geométrica convergente:

Série geométrica convergente é a série gerada por uma progressão geométrica com razão q, sendo que, $-1 < q < 1$.

Soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica convergente.

Sempre que
$-1<q<1$
e
$n \to \infty$

$S = \frac{a_1}{1-q}$

Exemplos:
Calcule o valor de:

$4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + ...$

Resolução:
A seqüência é uma P.G. com:

$\mathbf{a_1 = 4}$

$\mathbf{q} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\mathbf{n} \to \infty$

Portanto

$S = \frac{a_1}{1-q}$

$S = \frac{4}{1-\frac{1}{2}}$

$S = \frac{4}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{4}{1}}{\frac{1}{2}}$

$S = \frac{4}{1}.\frac{2}{1}$

S = 8

Calcule a soma dos infinitos termos da seqüência
(0,2; 0,02; 0,002; ...)
Resolução:
A seqüência é uma P.G. com:

a_1 = 0,2

q = $\frac{0.02}{0,2}$ **= 0,1**

n $\to \infty$

Portanto

S = $\frac{a_1}{1-q}$

S = $\frac{0,2}{1-0,1}$

S = $\frac{0,2}{0,9}$

S = $\frac{2}{9}$

Calcule o valor de:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Resolução:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

A seqüência é uma P.G. com:

a_1 = $\frac{1}{2}$

q = $\frac{1}{2}$

e n $\to \infty$

Portanto

S = $\frac{a_1}{1-q}$

S = $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$

$S = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$

S = 1

EXERCÍCIOS:

1) A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão 2 é 511. O valor de n é:

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

2) Calcule o produto dos cinco primeiros termos da P.G. (2, 6, 18,...)

3) Calcule o valor de:

$10 + 5 + \frac{5}{2} + ...$

4) Sabendo-se que a soma dos infinitos termos de uma P.G. é 5x e que o primeiro termo é x, calcule a razão.

Resolução:

1) A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão 2 é 511. O valor de n é:

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

Resolução:

$a_1 = 1$, q = 2 e $S_n = 511$

$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}$

$511 = \frac{1.(2^n - 1)}{2 - 1}$

$511 = \frac{2^n - 1}{1}$

$511 = 2^n - 1$

$2^n - 1 = 511$

$2^n = 511 + 1$

$2^n = 512$

$2^n = 2^9 \Leftrightarrow n = 9$

Resposta **b**

2) Calcule o produto dos cinco primeiros termos da P.G. (2, 6, 18,...)
Resolução:
P.G.(2, 6, 18, ...)
$a_1 = 2$
$q = 3$
$a_n = a_1.q^{n-1}$
$a_5 = a_1.q^{5-1}$
$a_5 = 2.3^4$

$$|P_n| = \sqrt{(a_1.a_n)^n}$$

$$|P_5| = \sqrt{(a_1.a_5)^5}$$

$$|P_5| = \sqrt{(2.2.3^4)^5}$$

$$|P_5| = \sqrt{(2^2.3^4)^5}$$

$$|P_5| = \sqrt{2^{10}.3^{20}}$$

$$|P_5| = 2^5.3^{10}$$

Como os termos da P.G. são positivos, $P_5 > 0$ e portanto
$P_5 = 2^5.3_{10}$

3) Calcule o valor de:

$$10 + 5 + \frac{5}{2} + ...$$

Resolução:

$$10 + 5 + \frac{5}{2} + ...$$

é uma P.G. com:

$a_1 = 10$, $q = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ e $n \to \infty$

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{10}{1-\frac{1}{2}} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$$

4) Sabendo-se que a soma dos infinitos termos de uma P.G. é 5x e que o primeiro termo é x, calcule a razão.
$S = 5x$ e $a_1 = x$

$S = \frac{a_1}{1-q}$

$5x = \frac{x}{1-q}$

$5x(1-q) = x$

$1-q = \frac{x}{5x}$

$1 - q = \frac{1}{5}$

$-q = -1 + \frac{1}{5} \quad .(-1)$

$q = 1 - \frac{1}{5}$

$q = \frac{5-1}{5}$

$q = \frac{4}{5}$

Resposta $q = \frac{4}{5}$