RADICIAÇÃO

DEFINIÇÃO:

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ Onde a é um número Real e n um número natural não nulo.

Dizemos que b é raiz enésima de a, se e somente se, a resulta de b elevado a n.

Exemplos:

1) $\sqrt[2]{4} = 2$, pois $2^2 = 4$
2) $\sqrt[2]{9} = 3$, pois $3^2 = 9$
3) $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$
4) $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$
5) $\sqrt[3]{1} = 1$, pois $1^3 = 1$
6) $\sqrt[10]{0} = 0$, pois $0^{10} = 0$

Observação$_1$: $\sqrt[2]{-9} \notin \Re$, pois não existe nenhum número real que elevado a expoente par fique negativo. Pelo mesmo motivo, $\sqrt[4]{-16} \notin \Re$, $\sqrt[8]{-1} \notin \Re$ e assim por diante.

Portanto, se a é negativo e n é par então não existe raiz enésima de a, em $\Re$.

Observação$_2$: Por convenção o índice **dois** da raiz quadrada pode ser omitido, assim $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4}$; $\sqrt[2]{7} = \sqrt{7}$

Cuidado, embora $2^2 = 4$ e $(-2)^2 = 4$ tomamos como raiz de 4 apenas o resultado estritamente positivo. Assim:

$\sqrt{4} = 2$

$-\sqrt{4} = -2$

$\pm\sqrt{4} = \pm 2$

$\sqrt{4} \neq \pm \mathbf{2}$

PROPRIEDADES DA RADICIAÇÃO

1) $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$ ou $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b}$

Exemplos:

a) $\sqrt{2} . \sqrt{8} = \sqrt{2.8} = \sqrt{16} = 4$ $\qquad$ $\sqrt{32} = \sqrt{16} . \sqrt{2} = 4.\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{3} . \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3.9} = \sqrt[3]{27} = 3$ $\qquad$ $\sqrt{8} = \sqrt{4.2} = \sqrt{4}.\sqrt{2} = 2.\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2} . \sqrt{3} . \sqrt{6} = \sqrt{2.3.6} = \sqrt{36} = 6$ $\qquad$ $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{27.3} = \sqrt[3]{27}.\sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}$

---

2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ ou $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Exemplos:

a) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$ $\qquad$ $\sqrt{\dfrac{10}{9}} = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{9}} = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\dfrac{9}{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{9}}{2}$

---

3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ ou $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Exemplos:

a) $\left(\sqrt{2}\right)^4 = \sqrt{2^4} = \sqrt{16} = 4$ $\qquad$ $\sqrt{4^5} = \left(\sqrt{4}\right)^5 = (2)^5 = 32$

b) $\left(\sqrt[4]{2}\right)^3 = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = (2)^2 = 4$

---

4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$ ou $\sqrt[n.m]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

Exemplos:

a) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3.2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$ $\qquad$ $\sqrt[6]{4} = \sqrt[3.2]{4} = \sqrt[3]{\sqrt{4}} = \sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{32}} = \sqrt[5.3]{32} = \sqrt[3.5]{32} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{32}} = \sqrt[3]{2}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{9} = \sqrt[2.2]{9} = \sqrt{\sqrt{9}} = \sqrt{3}$

---

5) $\sqrt[n.p]{a^{m.p}} = \sqrt[n]{a^m}$ ou $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.b]{a^{m.b}}$

Exemplos:

a) $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3.2]{2^{2.2}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

b) $\sqrt[9]{5^6} = \sqrt[3.3]{5^{2.3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

$\sqrt{3}.\sqrt[6]{5} = \sqrt[2]{3^1}.\sqrt[6]{5^1} = \sqrt[2.3]{3^{1.3}}.\sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{3^3}.\sqrt[6]{5} =$
$= \sqrt[6]{27}.\sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{27.5} = \sqrt[6]{135}$

Potência com expoente fracionário (racional)

Definição:

Dado um número racional $\dfrac{n}{m}$ e um número real não negativo **a**, podemos dizer que $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ ou $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

Exemplos:

a) $2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}$

b) $7^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7^1}$

c) $\sqrt[5]{6} = \sqrt[5]{6^1} = 6^{\frac{1}{3}}$

d) $\sqrt{3} = \sqrt[2]{3^1} = 3^{\frac{1}{2}}$

Obs.:

A partir dessa propriedade e das propriedades da potenciação, podemos definir todas as propriedades da radiciação.

Exemplo:

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^1}.\sqrt[n]{b^1} = a^{\frac{1}{n}}.b^{\frac{1}{n}} = (a.b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a.b}$$

Racionalização de denominadores

Racionalizar consiste em eliminar todos os radicais (raízes) que aparecem na forma de denominador de uma fração, sem alterar o valor numérico das mesmas.

Para racionalizar, multiplicamos o numerador e o denominador da fração pelo mesmo valor. Ao multiplicar e dividir pelo mesmo valor, não estamos alterando o valor numérico da fração, pois, na realidade estamos multiplicando a fração por 1 (um).

Nesta aula, vamos separar a racionalização em dois tipos:

1 – Quando, no denominador, tivermos **uma** raiz quadrada:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}.\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3.\sqrt{2}}{\sqrt{2.2}} = \dfrac{3.\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \dfrac{3.\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{5}{\sqrt{3}} = \dfrac{5}{\sqrt{3}}.\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{5.\sqrt{3}}{\sqrt{3.3}} = \dfrac{5.\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \dfrac{5.\sqrt{3}}{3}$

c) $\dfrac{2}{3.\sqrt{7}} = \dfrac{2}{3.\sqrt{7}}.\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{2.\sqrt{7}}{3.\sqrt{7.7}} = \dfrac{2.\sqrt{7}}{3.\sqrt{7^2}} = \dfrac{2.\sqrt{7}}{3.7} = \dfrac{2.\sqrt{7}}{21}$

2 – Quando, no denominador, tivermos **uma** raiz enésima:

a) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}.\dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{3.\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2.2^2}} = \dfrac{3.\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \dfrac{3.\sqrt[3]{4}}{2}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt[5]{2^2}} = \dfrac{4}{\sqrt[5]{2^2}}.\dfrac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^3}} = \dfrac{4.\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^2.2^3}} = \dfrac{4.\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^5}} = \dfrac{4.\sqrt[5]{8}}{2} = 2.\sqrt[5]{8}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{9}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{3^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{3^2}}.\dfrac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \dfrac{1.\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2.3^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \dfrac{\sqrt[5]{27}}{3}$

Exercícios resolvidos

1) calcule o valor de:

a) $\sqrt{2.\sqrt{2.\sqrt{2.\sqrt{4}}}}$

b) $\sqrt{1+\sqrt{32.\sqrt[3]{4+\sqrt{16}}}}$

c) $\sqrt[3]{9.\sqrt{3.\sqrt{9}}}$

Resolução:

a) $\sqrt{2.\sqrt{2.\sqrt{2.\sqrt{4}}}} = \sqrt{2.\sqrt{2.\sqrt{2.2}}} = \sqrt{2.\sqrt{2.\sqrt{4}}} = \sqrt{2.\sqrt{2.2}} \ \sqrt{2.\sqrt{4}} = \sqrt{2.2} = \sqrt{4} = 2$

$b)\sqrt{1+\sqrt{32.\sqrt[3]{4+\sqrt{16}}}} = \sqrt{1+\sqrt{32.\sqrt[3]{4+4}}} = \sqrt{1+\sqrt{32.\sqrt[3]{8}}} = \sqrt{1+\sqrt{32.2}} = \sqrt{1+\sqrt{64}} = \sqrt{1+8} = \sqrt{9} = 3$

c) $\sqrt[3]{9.\sqrt{3\sqrt{9}}} = \sqrt[3]{9.\sqrt{3.3}} = \sqrt[3]{9.3} = \sqrt[3]{27} = 3$

2) O produto $\sqrt{2}.\sqrt[3]{4}$ pode ser escrito como:

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt[3]{8}$ c) $\sqrt[6]{8}$ d) $\sqrt[6]{6}$ e) $2.\sqrt[6]{2}$

Resolução:

- Primeiro tiramos o mínimo múltiplo comum (mmc) entre os índices das raízes.

Mmc (2, 3) = 6

- Para transformar o índice dois da raiz quadrada em seis, multiplicamos o índice e o expoente por 3 (para não mudar o valor numérico da expressão).

$\sqrt[2]{2^1} = \sqrt[2.3]{2^{1.3}} = \sqrt[6]{2^3}$

- Para transformar o índice três da Segunda raiz em seis, multiplicamos o índice e o expoente por dois.

$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3.2]{2^{2.2}} = \sqrt[6]{2^4}$

Assim: $\sqrt{2}.\sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{2^3.\sqrt[6]{2^4}} = \sqrt[6]{2^3.2^4} = \sqrt[6]{2^{3+4}} = \sqrt[6]{2^7}$

Assim: $\sqrt{2}.\sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{2^3}.\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[6]{2^3.2^4} = \sqrt[6]{2^{3+4}} = \sqrt[6]{2^7}$

Obs.: Como podemos notar, não existe nenhuma alternativa $\sqrt[6]{2^7}$, portanto devemos continuar a resolução.

$\sqrt[6]{2^7} = \sqrt[6]{2^{6+1}} = \sqrt[6]{2^6.2^1} = \sqrt[6]{2^6}.\sqrt[6]{2^1} = 2.\sqrt[6]{2}$

Resposta **e**

3) Dados os números $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$ e $\sqrt[6]{6}$. Qual a ordem correta?

a) $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5} < \sqrt[6]{6}$
b) $\sqrt[6]{6} < \sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{3} < \sqrt{2}$
c) $\sqrt[6]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$
d) $\sqrt[3]{3} < \sqrt{2} < \sqrt[6]{6} < \sqrt[4]{5}$
e) $\sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{3} < \sqrt{2} < \sqrt[6]{6}$

Resolução:

- Tirando o mínimo entre os índices 2, 3, 4 e 6 das raízes, obtemos:

2, 3, 4, 6	2
1, 3, 2, 3	2
1, 3, 1, 3	3
1, 1, 1, 1	2.2.3 = **12**

- A seguir transformamos todos os índices em 12

$\sqrt{2} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt[2.6]{2^{1.6}} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$

$\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3^1} = \sqrt[3.4]{3^{1.4}} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$

$\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5^1} = \sqrt[4.3]{5^{1.3}} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$

$\sqrt[6]{6} = \sqrt[6]{6^1} = \sqrt[6.2]{6^{1.2}} = \sqrt[12]{6^2} = \sqrt[12]{36}$

Podemos notar que 36<64<81<125 e, portanto, $\sqrt[6]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$

Resposta **c**

EXERCÍCIOS:

1) Calcule o valor de $\sqrt{10 + 3.\sqrt{23 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}}$

2) O valor de $16^{\frac{3}{4}}$ - $27^{\frac{2}{3}}$ é:
a) 1 b) −1 c) 2 d) −2 e) 5

3) O produto $\sqrt{2}\,.\,\sqrt[3]{5}$ pode ser escrito como:
a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt[3]{10}$ c) $\sqrt[6]{10}$ d) $\sqrt[6]{100}$ e) $\sqrt[6]{200}$

4) Racionalizar o denominador da fração $\dfrac{27}{\sqrt[5]{9}}$

5) O valor da expressão $(81^{\frac{3}{4}} - 16^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}$ é:

a) 1   b) 2   c) 3   d) 4   e) 5

Resolução:

1) $\sqrt{10 + 3.\sqrt{23 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}} = \sqrt{10 + 3.\sqrt{23 + \sqrt{2 + 2}}} = \sqrt{10 + 3.\sqrt{23 + \sqrt{4}}} =$
$\sqrt{10 + 3.\sqrt{23 + 2}} = \sqrt{10 + 3.\sqrt{25}} = \sqrt{10 + 3.5} = \sqrt{25} = 5$

2) $16^{\frac{3}{4}} - 27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[4]{16^3} - \sqrt[3]{27^2} = (\sqrt[4]{16})^3 - (\sqrt[3]{27})^2 = (2)^3 - (3)^2 = 8 - 9 = -1$

Resposta **b**

3) $\sqrt{2} . \sqrt[3]{5} = \sqrt[2]{2^1} . \sqrt[3]{5^1} = \sqrt[2.3]{2^{1.3}} . \sqrt[3.2]{5^{1.2}} = \sqrt[6]{2^3} . \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{2^3 . 5^2} = \sqrt[6]{8.25} = \sqrt[6]{200}$

Resposta **e**

4) $\frac{27}{\sqrt[5]{9}} = \frac{27}{\sqrt[5]{3^2}} . \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{27.\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2 . 3^3}} = \frac{27.\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{27.\sqrt[5]{3^3}}{3} = 9.\sqrt[5]{27}$

5) $(81^{\frac{3}{4}} - 16^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} = (\sqrt[4]{81^3} - \sqrt[4]{16^1})^{\frac{1}{2}} = [(\sqrt[4]{81})^3 - \sqrt[4]{16}]^{\frac{1}{2}} = [(3)^3 - 2]^{\frac{1}{2}} = (27 - 2)^{\frac{1}{2}} =$
$= (25)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{25^1} = 5$

Resposta **e**