

AULA 23

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DE UM ÂNGULO AGUDO:

PROF. PAULO

AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

DEFINIÇÕES:

Para os ângulos agudos, temos as seguintes definições das funções trigonométricas:

$$\textit{seno} = \frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{hipotenusa}}$$

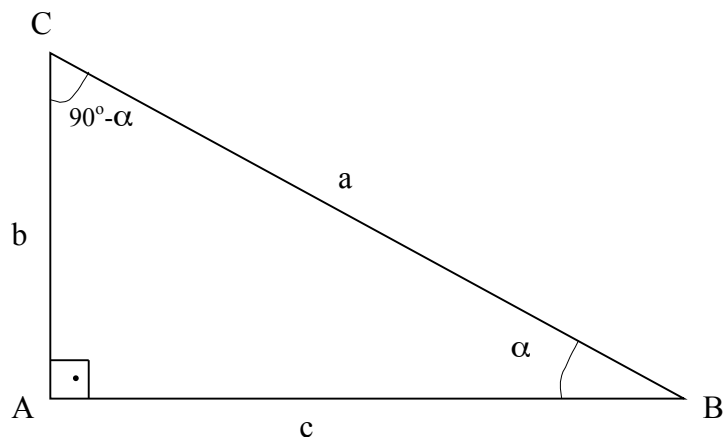
$$\textit{cos seno} = \frac{\textit{cateto adjacente}}{\textit{hipotenusa}}$$

$$\textit{tan gente} = \frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{cateto adjacente}} \quad \text{OU} \quad \textit{tan gente} = \frac{\textit{seno}}{\textit{cos seno}}$$

$$\textit{cot angente} = \frac{\textit{cateto adjacente}}{\textit{cateto oposto}}, \quad \textit{cot angente} = \frac{\textit{cos seno}}{\textit{seno}} \quad \text{OU} \quad \textit{cot angente} = \frac{1}{\textit{tagente}}$$

$$\textit{sec ante} = \frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto adjacente}} \quad \text{OU} \quad \textit{sec ante} = \frac{1}{\textit{cos seno}}$$

$$\textit{cossec ante} = \frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto oposto}} \quad \text{OU} \quad \textit{cossec ante} = \frac{1}{\textit{seno}}$$



$$\textit{sen} \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\textit{cos} \alpha = \frac{c}{a}$$

$$\textit{tg} \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\textit{cot} \alpha = \frac{c}{b}$$

$$\textit{sec} \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\textit{cossec} \alpha = \frac{a}{b}$$

Observação:

Das definições acima, temos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{a}$$

$$\cos \alpha = \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \frac{c}{a}$$

ÂNGULOS NOTÁVEIS

Os ângulos de 30° , 45° e 60° são utilizados com muita frequência e por isso convém memorizá-los. Para isto temos uma **tabela** que resume esses valores:

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

OUTRAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Na trigonometria temos uma relação muito importante chamada:

RELAÇÃO FUNDAMENTAL

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \cos^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \\ \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \end{cases}$$

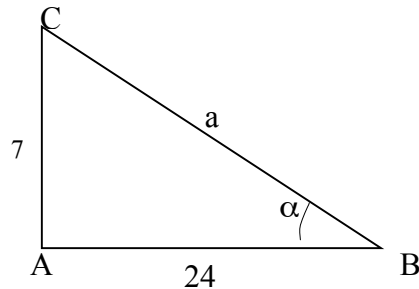
Relações auxiliares:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

Exemplos:

- 1) Calcule o seno, o cosseno, a tangente, a cotangente, a secante e a cossecante de α na figura seguinte:



Resolução:

Inicialmente vamos calcular a hipotenusa.

$$a^2 = 7^2 + 24^2 \Rightarrow a^2 = 625 \therefore a = 25$$

Então, temos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{7}{a} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{7}{25}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{24}{a} \Rightarrow \operatorname{cos} \alpha = \frac{24}{25}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{25}$$

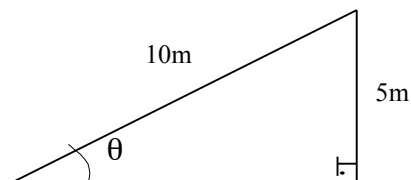
$$\operatorname{cot} \alpha = \frac{25}{7}$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{25}{24}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{25}{7}$$

- 2) Uma pessoa sobe uma rampa de 10m de comprimento e se eleva verticalmente 5m. Qual o ângulo que a rampa forma com o plano horizontal?

Resolução:

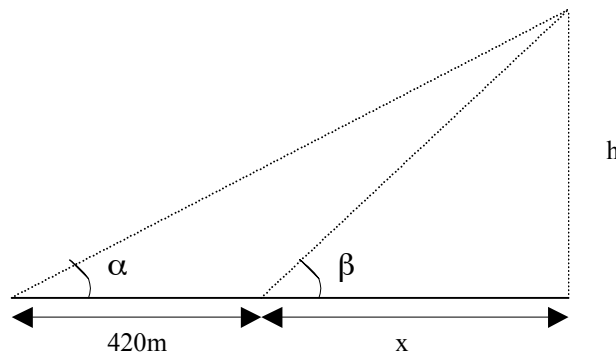


Seja θ a medida do ângulo procurado. Então, temos:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{10} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} \therefore \theta = 30^\circ$$

- 3) Um observador enxerga uma montanha segundo um ângulo α . Caminhando 420m em direção à montanha, passa a enxergá-la segundo um ângulo β . Calcule a altura da montanha, sabendo que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} \text{ e } \operatorname{tg}\beta = \frac{2}{3}.$$



Resolução:

Observe, na figura, que:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{3h}{2} \quad (1)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{x + 420} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2h = x + 420 \quad (2)$$

De (1) e (2) temos:

$$2h - \frac{3h}{2} = 420$$

$$\frac{h}{2} = 420 \Rightarrow h = 840$$

Resposta: 840m.

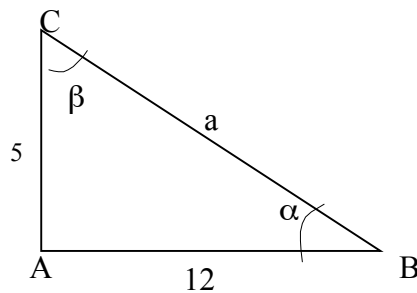
- 4) Simplificando a fração $\frac{1 - \cos^2 x}{\operatorname{sen}x}$, obteremos:

Resolução:

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\operatorname{sen}x} = \frac{\cancel{\operatorname{sen}^2 x}}{\cancel{\operatorname{sen}x}} = \operatorname{sen}x$$

EXERCÍCIOS:

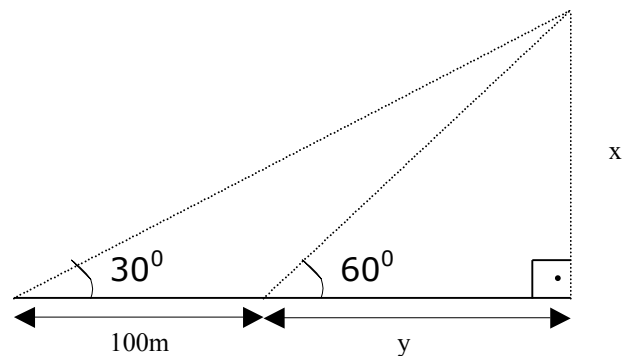
- 1) Calcule o seno, cosseno e a tangente de α e de β na figura a seguir:



- 2) (Vunesp) Uma rampa lisa, de 20m de comprimento, faz um ângulo de 30° com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe esta rampa inteira eleva-se verticalmente:

- a) 17m
- b) 10m
- c) 15m
- d) 5m
- e) 8m

- 3) (Fuvest) Calcule x indicado na figura.



- 4) (U.F.Viçosa) Satisfeitas as condições de existência, a expressão

$$E = \left(\frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cot gx} \right) \cdot \operatorname{cosec} x, \text{ é idêntica a:}$$

- a) $\operatorname{sen} x$
- b) $\operatorname{cos} x$
- c) 1
- d) 0
- e) $\operatorname{sec} x$

5) Se $0^\circ < x < 90^\circ$ e $\text{sen}x = \frac{1}{2}$, então o valor da expressão

$E = \text{cosec}x + \text{cos}x \cdot \text{tg}x$ é:

a) $\frac{5}{2}$

b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

f) 1

Resolução dos exercícios:

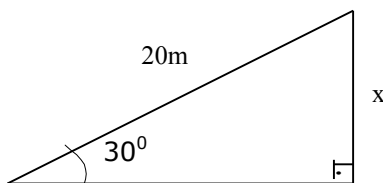
1)

$$a^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow a^2 = 169 \Rightarrow a = 13$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{5}{13}, \text{cos}\alpha = \frac{12}{13} \text{ e } \text{tg}\alpha = \frac{5}{12}$$

$$\text{sen}\beta = \frac{12}{13}, \text{cos}\beta = \frac{5}{13} \text{ e } \text{tg}\beta = \frac{12}{5}$$

2) Observe a figura:



$$\text{sen}30^\circ = \frac{x}{20} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{20} \Rightarrow x = 10m$$

Resposta: b

3) Observe, na figura, que:

$$\text{tg}60^\circ = \frac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y\sqrt{3} \quad (1)$$

$$\text{tg}30^\circ = \frac{x}{y+100} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{y+100} \Rightarrow 3x = (y+100)\sqrt{3} \quad (2)$$

De (1) e (2) temos:

$$3y\sqrt{3} = (y + 100)\sqrt{3}$$

$$y = 50 \Rightarrow x = 50\sqrt{3}$$

Resposta: $50\sqrt{3}m$.

$$4) E = \left(\frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cot gx} \right) \cdot \operatorname{cosec} x = \frac{\cos^2 x}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \cos x$$

Resposta : b

5)

$$\left. \begin{array}{l} 0^\circ < x < 90^\circ \\ \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow x = 30^\circ$$

$$\text{portanto, } \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = 2, \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Assim: } E = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Resposta: a