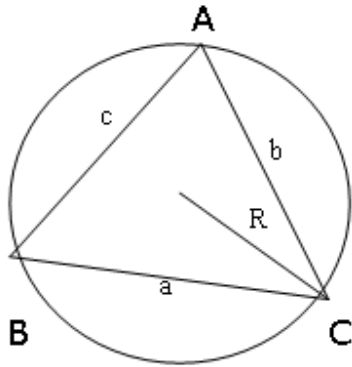


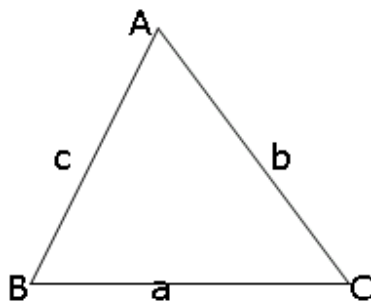
Aula 27
RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NOS TRIÂNGULOS QUAISQUER

Definições



LEI DOS SENOS

$$\frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\text{sen}(B)} = \frac{c}{\text{sen}(C)} = 2R$$



LEI DOS COSENOS

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\hat{A})$$

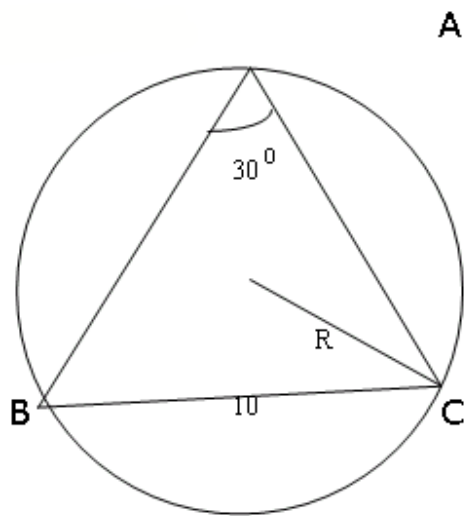
$$\underline{b^2} = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(B)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)$$

Exemplo 1:

Um triângulo ABC inscrito em uma circunferência tem um ângulo interno igual a 30° e o lado oposto ao ângulo igual a 10 cm. Calcule o raio dessa circunferência.

Resolução:



LEI DOS SENOS

$$\frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\text{sen}(B)} = \frac{c}{\text{sen}(C)} = 2R$$

$$\frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = 2R$$

$$\frac{10}{\text{sen}(30^\circ)} = 2R$$

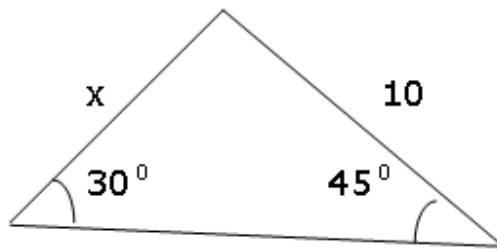
$$2R \cdot \text{sen}(30^\circ) = 10$$

$$2R \cdot \frac{1}{2} = 10$$

$$R = 10 \text{ cm}$$

Exemplo 2:

Calcule o valor de x na figura abaixo.



Resolução:

LEI DOS SENOS

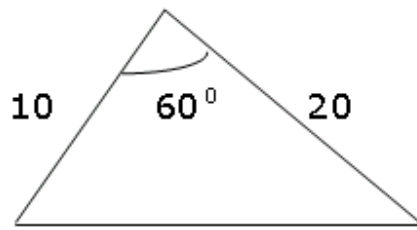
$$\frac{x}{\text{sen}(45^\circ)} = \frac{10}{\text{sen}(30^\circ)}$$

$$x \cdot \text{sen}(30^\circ) = 10 \cdot \text{sen}(45^\circ) \quad |$$

$$x \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 10\sqrt{2}$$

Exemplo 3:
Calcule o valor de x na figura abaixo :



x

Resolução:

LEI DOS COSSENO

$$x^2 = 10^2 + 20^2 - 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \cos(60^\circ)$$

$$x^2 = 100 + 400 - 400 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 = 100 + 400 - 200$$

$$x^2 = 300$$

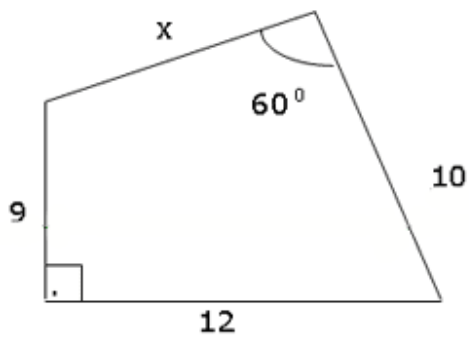
$$x = \sqrt{300}$$

$$x = \sqrt{100 \cdot 3}$$

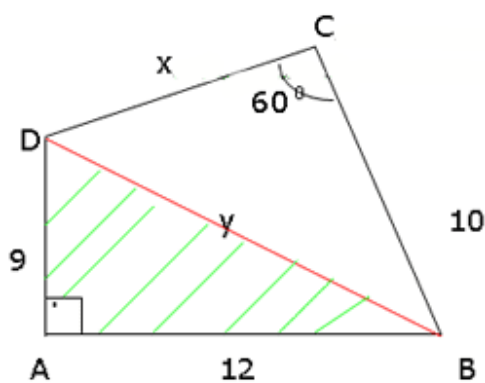
$$x = \sqrt{100} \cdot \sqrt{3}$$

$$x = 10 \cdot \sqrt{3}$$

Exemplo 4:
Calcule o valor de x na figura abaixo :



Resolução:



"NO TRIÂNGULO ABD"
TEOR. DE PITÁGORAS

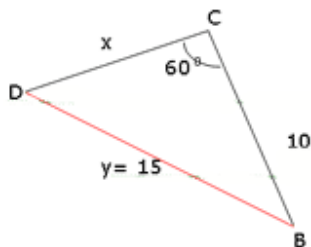
$$y^2 = 9^2 + 12^2$$

$$y^2 = 81 + 144$$

$$y^2 = 225$$

$$y = \sqrt{225}$$

$$y = 15$$



"NO TRIÂNGULO BCD"
LEI DOS COSENOS

$$y^2 = 10^2 + x^2 - 2 \cdot 10 \cdot x \cdot \cos(60^\circ)$$

$$15^2 = 100 + x^2 - 20 \cdot x \cdot \frac{1}{2}$$

$$225 = 100 + x^2 - 10x$$

$$0 = 100 + x^2 - 10x - 225$$

$$x^2 - 10x - 125 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-125)$$

$$\Delta = 100 + 500$$

$$\Delta = 600$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{600}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 \cdot 6}}{2}$$

$$x = \frac{10 \pm 10\sqrt{3}}{2}$$

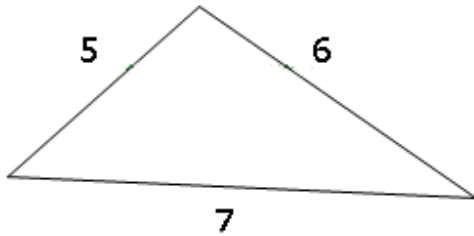
$$x = 5 \pm 5\sqrt{3}$$

$$x' = 5 - 5\sqrt{3} \text{ (Não serve)}$$

$$x'' = 5 + 5\sqrt{3}$$

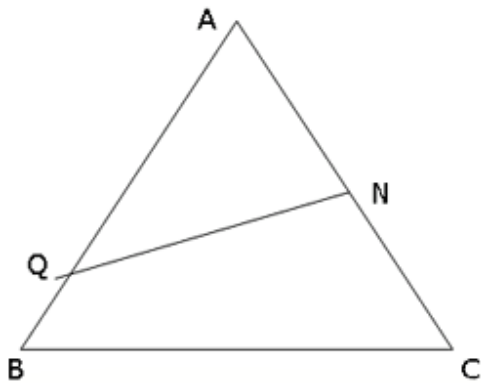
Exercícios:

1) Calcule o cosseno do maior ângulo do triângulo abaixo.



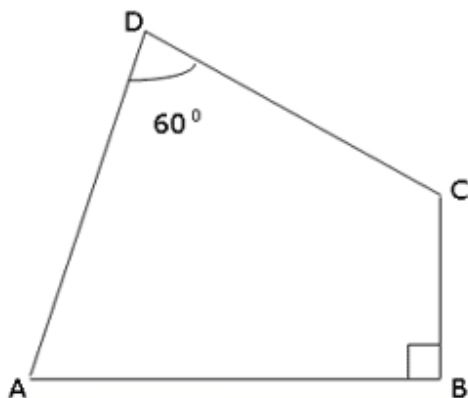
2) Um triângulo ABC está inscrito em uma circunferência de raio 4 cm. Calcule o lado BC do triângulo, sabendo que o ângulo A mede 60° .

3) O triângulo ABC é equilátero de lado 20 cm, $AN = NB$ e $AQ = 15$ cm. O valor de NQ é, em cm: a) $4\sqrt{7}$ b) $5\sqrt{7}$ c) $6\sqrt{7}$ d) $7\sqrt{7}$ e) $8\sqrt{7}$



4) No quadrilátero abaixo $AB = CD = 3$ cm, $BC = 2$ cm. A medida, em cm, do perímetro do quadrilátero é:

a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 15

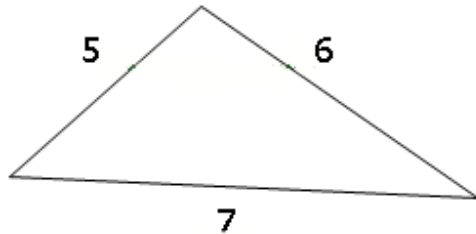


5) Um triângulo T tem lados iguais a 4, 5 e 6. O seno do maior ângulo de T é:

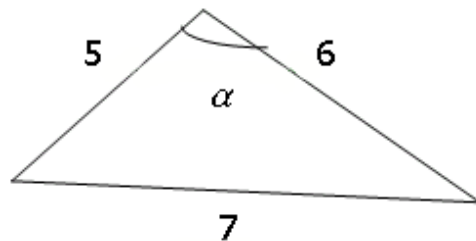
a) 5/6 b) 4/5 c) 3/4 d) 2/3 e) 1/8

Resolução:

1) Calcule o cosseno do maior ângulo do triângulo abaixo.



Resolução:



$$7^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos \alpha$$

$$49 = 25 + 36 - 60 \cdot \cos \alpha$$

$$49 = 61 - 60 \cos \alpha$$

$$49 - 61 = -60 \cos \alpha$$

$$-12 = -60 \cos \alpha (-1)$$

$$12 = 60 \cos \alpha$$

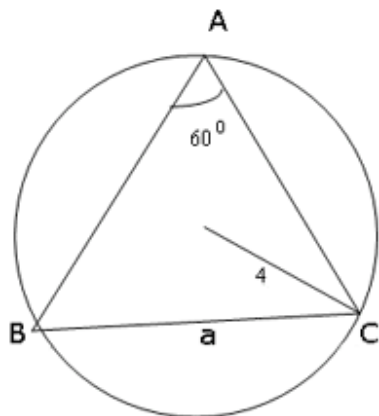
$$\frac{12}{60} = \cos \alpha$$

$$\frac{1}{5} = \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{5}$$

2) Um triângulo ABC está inscrito em uma circunferência de raio 4 cm. Calcule o lado BC do triângulo, sabendo que o ângulo \hat{A} mede 60° .

Resolução:



LEI DOS SENOS

$$\frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{c}{\text{sen}(\hat{C})} = 2R$$

$$\frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = 2R$$

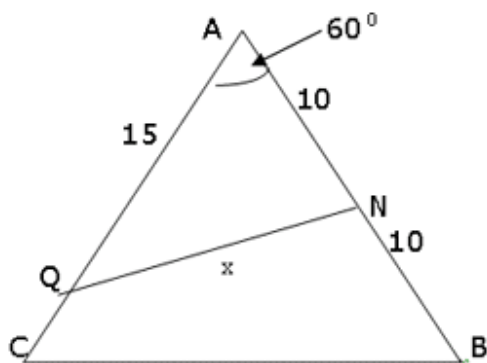
$$\frac{a}{\text{sen}(60^\circ)} = 2 \cdot 4$$

$$8 \cdot \text{sen}(60^\circ) = a$$

$$8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a$$

$$a = 4 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}$$

3) O triângulo ABC é equilátero de lado 20 cm, AN = NB e AQ = 15 cm. O valor de NQ é, em cm:
a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8



"LEI DOS COSSENO"

NO TRIÂNGULO AQN

$$x^2 = 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ$$

$$x^2 = 225 + 100 - 300 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 = 175$$

$$x = \sqrt{175}$$

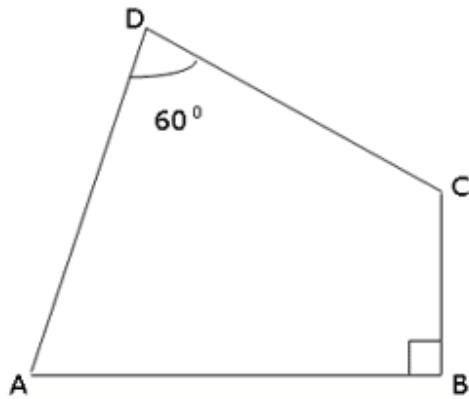
$$x = \sqrt{25 \cdot 7}$$

$$x = 5 \cdot \sqrt{7} \text{ cm}$$

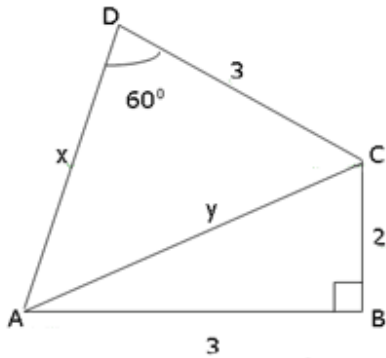
Resposta **b**

4) No quadrilátero abaixo AB = CD = 3 cm, BC = 2 cm. A medida, em cm, do perímetro do quadrilátero é:

- a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 15



Resolução:



"NO TRIÂNGULO ABC" (TEOREMA DE PITÁGORAS)

$$y^2 = 3^2 + 2^2$$

$$y^2 = 9 + 4$$

$$y^2 = 13$$

$$y = \sqrt{13}$$

"NO TRIÂNGULO ACD" (LEI DOS COSSENOS)

$$y^2 = x^2 + 3^2 - 2 \cdot x \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ$$

$$13 = x^2 + 9 - 6 \cdot x \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 + 9 - 3 \cdot x - 13 = 0$$

$$x^2 - 3 \cdot x - 4 = 0$$

$$x' = -1 \text{ (Não serve)}$$

$$x'' = 4$$

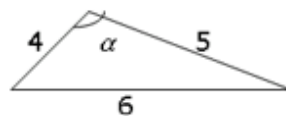
$$2p = 4 + 3 + 2 + 3 = 12 \text{ cm}$$

Resposta b

5) Um triângulo T tem lados iguais a 4, 5 e 6. O seno do maior ângulo de T é:

- a) $\frac{\sqrt{15}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{15}}{5}$ c) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{15}}{8}$

Resolução:



(LEI DOS COSENOS)

$$6^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos(\alpha)$$

$$36 = 16 + 25 - 40 \cdot \cos(\alpha)$$

$$40 \cdot \cos(\alpha) = 16 + 25 - 36$$

$$40 \cdot \cos(\alpha) = 5$$

$$\cos(\alpha) = \frac{5}{40}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{8}$$

(RELAÇÃO FUNDAMENTAL)

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\sin^2(\alpha) + \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2(\alpha) + \frac{1}{16} = 1$$

$$\sin^2(\alpha) = 1 - \frac{1}{16}$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{16-1}{16}$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{15}{16}$$

$$\sin(\alpha) = \sqrt{\frac{15}{16}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Resposta c