MATEMÁTICA

Aula 28

Matrizes

Esqueleto Numérico Chinês

3	2	1	39
2	3	1	34
1	2	3	26

Esse esqueleto numérico, corresponde ao sistema de equações abaixo, tendo sido suprimidas as variáveis. A resolução desse sistema é feita através da manipulação do esqueleto numérico que hoje chamamos de matriz.

Sistema de equações Lineares Correspondente

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

A seguir temos uma tabela dos primeiros colocados em um dos grupos do campeonato brasileiro. Essa tabela é um a matriz de ordem 4 x 5 (lê-se quatro por cinco).

Clube	PG	J	V	E	D
Corínthians	18	7	6	0	1
Vasco	17	7	5	2	0
Grêmio	11	6	3	2	1
Bahia	10	6	2	4	0

Com vinte elementos, na matemática é comumente representa entre parênteses

$$\begin{pmatrix} 18 & 7 & 6 & 0 & 1 \\ 17 & 7 & 5 & 2 & 0 \\ 11 & 6 & 3 & 2 & 1 \\ 10 & 6 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

ou entre colchetes

$$\begin{bmatrix} 18 & 7 & 6 & 0 & 1 \\ 17 & 7 & 5 & 2 & 0 \\ 11 & 6 & 3 & 2 & 1 \\ 10 & 6 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Para identificar um elemento, usaremos uma letra minúscula do nosso alfabeto com dois sub índices que indicam a posição desse elemento.

$$\begin{bmatrix} 18 & 7 & 6 & 0 & 1 \\ 17 & 7 & \boxed{5} & 2 & 0 \\ 11 & 6 & 3 & 2 & 1 \\ \boxed{10} & 6 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$5 = a_{23}$ (linha 2 e coluna 3)

$10 = a_{41}$ (linha 4 e coluna 1)

Uma matriz pode ser representada de duas formas:

- Pela tabela de m linhas e n colunas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hdashline a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Forma abreviada :

$$\boxed{A = (a_{ij})_{mxn}}$$

$$\text{com } \; i \in \{1,2,3,\ldots,m\}$$
$$j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$$

Exemplo de aplicação

Como podemos escrever uma matriz $A = (a_{ij})_{2x3}$

definida por $a_{ij} = \begin{cases} i - j & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$?

Do texto obtemos a ordem:

$A = (a_{ij})_{2x3} \quad \Rightarrow \quad$ ordem 2x3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Calculo dos elementos da primeira linha:

$$a_{ij} = \begin{cases} i - j & \text{se } i \neq j \\ i + j & \text{se } i = j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 1 + 1 = 2 \\ a_{12} = 1 - 2 = -1 \\ a_{13} = 1 - 3 = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ & & \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} i - j & \text{se } i \neq j \\ i + j & \text{se } i = j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{21} = 2 - 1 = 1 \\ a_{22} = 2 + 2 = 4 \\ a_{32} = 3 - 2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}}$$

Matrizes especiais

Matriz Linha

$$A_{1xn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

$$A_{1x4} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Matriz Coluna

$$A_{mx1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \qquad A_{3x1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Matriz nula

$$0_{mxn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$0_{2x5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Quadrada

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

O conjunto dos elementos que tem os dois índices iguais, formam a diagonal principal.

$$A_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$\{a_{ij} \mid i = j\}$ = Diagonal Principal

O conjunto dos elementos que tem soma dos índices igual a n+1, formam a diagonal secundária.

$$A_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz Diagonal

$$A_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Identidade

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Igualdade de Matrizes

Duas matriz A e B são iguais, se e somente se, o elemento que ocupa a posição ij de A é igual ao elemento que ocupa a posição ij de B:

$$A_{mxn} = B_{mxn} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij}$$

para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo de aplicação

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & z \\ w & y \end{bmatrix}$$

Da igualdade entre as matrizes temos:

$x=1$, $y=2$, $z=3$ e $w=4$.

Adição de Matrizes

$$A_{mxn} + B_{mxn} = S_{mxn} \quad \Leftrightarrow \quad s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

A adição de duas matrizes dá uma outra matriz, em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B.

Exemplo de aplicação

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$$

Exercício

Três amigos saíram juntos para comer no sábado e no domingo. As tabelas a seguir resumem quantas garrafas de refrigerante cada um consumiu e como a despesa foi dividida:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

S refere-se às despesas de sábado e **D** às despesas de domingo.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cada elemento a_{ij} das matrizes nos dá o número de refrigerantes que i pagou a j, sendo Paulo o número 1, Sandra o número 2 e Edna o número 3.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

No sábado, por exemplo, Paulo pagou 1 refrigerante que ele próprio bebeu, 2 de Sandra e 3 de Edna (primeira linha da matriz S).

Quem bebeu mais no fim de semana?

Matriz Oposta

Dada a matriz A, indica-se como oposta a matriz –A em que cada elemento é o oposto do correspondente em A.

$$A = (a_{ij})_{mxn} \quad \Rightarrow \quad \boxed{-A = (-a_{ij})_{mxn}}$$

para $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$.

Exemplo de aplicação

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad -A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Subtração de Matrizes

A subtração de matrizes corresponde à adição com a oposta.

$$\boxed{A_{mxn} - B_{mxn} = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})_{mxn}}$$

para $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$.

Exemplo de aplicação

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de número por Matriz

Dada a matriz A e um número real K, chama-se matriz produto de K por A a matriz obtida pelos elementos de A todos multiplicados por k.

$$k.A = (k.a_{ij})_{mxn}$$

com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo de aplicação

$$3.\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -12 & -6 \end{bmatrix}$$

Exercício

Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, obter X e Y tal que $\begin{cases} X + Y = A \\ X - Y = B \end{cases}$

Respostas

1) Edna com 11 refrigerantes.

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} X + Y = A \\ X - Y = B \end{cases} \quad +$$

$$2X = A + B \Rightarrow X = \frac{1}{2}(A + B)$$

$$X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}}$$

X + Y = A (1ª equação)

$$\Rightarrow \quad Y = A - X$$

$$\Rightarrow \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}$$