MATEMÁTICA

Aula 29

Matrizes
e
Determinantes

Multiplicação de Matrizes

O produto existe se:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}$$

=

Existência do Produto

Multiplicação de Matrizes

A ordem da matriz produto é:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = AB_{m \times p}$$

ORDEM

Ordem do Produto

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 3}$$

=

Existe o Produto

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 3} = AB_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \end{bmatrix}$$

ORDEM

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$p_{11} = 1.5 + 2.3 = 11$

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 6 & \\ & & \end{bmatrix}$$

$p_{11} = 1.5 + 2.3 = 11$

$p_{12} = 1.6 + 2.0 = 6$

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 2 \\ & & \end{bmatrix}$$

$p_{11} = 1.5 + 2.3 = 11$

$p_{12} = 1.6 + 2.0 = 6$

$p_{13} = 1.0 + 2.1 = 2$

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 2 \\ -3 & & \end{bmatrix}$$

$p_{21} = -3.5 + 4.3 = -3$

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 2 \\ -3 & -18 & \end{bmatrix}$$

p_{21} = -3.5 + 4.3 = -3

p_{22} = -3.6 + 4.0 = -18

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 2 \\ -3 & -18 & 4 \end{bmatrix}$$

p_{21} = -3.5 + 4.3 = -3

p_{22} = -3.6 + 4.0 = -18

p_{32} = -3.0 + 4.1 = 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix} \quad A.B = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 2 \\ -3 & -18 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B_{2 \times 3} \; . \; A_{2 \times 2}$$

Não Existe o Produto

Exemplo de aplicação:

	Jaqueta 1	Jaqueta 2
Botões Pequenos	2	4
Botões Grandes	6	3

	Março	Abril
Jaqueta 1	10	12
Jaqueta 2	7	9

	Jaqueta 1	Jaqueta 2
B.Pequenos	2	4
B.Grandes	6	3

	Março	Abril
Jaq. 1	10	12
Jaq. 2	7	9

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20+28 & 24+36 \\ 60+21 & 72+27 \end{bmatrix}$$

	Jaqueta 1	Jaqueta 2
B.Pequenos	2	4
B.Grandes	6	3

	Março	Abril
Jaq. 1	10	12
Jaq. 2	7	9

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 60 \\ 81 & 99 \end{bmatrix}$$

Matriz Transposta

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^t = \begin{bmatrix} a & x \\ b & y \\ c & z \end{bmatrix}$$

Note que: "o que é linha em A vira coluna em A^t".

Propriedades da Transposta

$$(A^t)^t = A$$

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

$$(K.A)^t = K.A^t$$

$$(A.B)^t = B^t \,.\, A^t$$

Matriz Inversa

Definição: $A_n . A_n^{-1} = A_n^{-1} . A_n = I_n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinantes

Ordem 1

$A = [a_{11}]$

$\det A = |a_{11}| = a_{11}$

$A = [10] \Rightarrow \det A = |10| = 10$

Determinantes

Ordem 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$a_{12}.a_{21}$ $a_{11}.a_{22}$

$$\det A = a_{11}.a_{21} - a_{12}.a_{21}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

1.3 2.4

$$\det A = 8 - 3 = 5$$

$$M = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x \\ \cos x & \operatorname{sen} x \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x \\ \cos x & \operatorname{sen} x \end{vmatrix}$$

$- \cos^2 x$ $\operatorname{sen}^2 x$

$$\det M = \operatorname{sen}^2 x - (-\cos^2 x)$$

$$\det M = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = \boxed{1}$$

Determinantes

Ordem 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

SECUNDÁRIO   PRINCIPAL

det A = Principal - Secundário

Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 2 & y + z \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & z \\ y & -x \end{pmatrix}$

Se $A = B^t$, qual o determinante da matriz

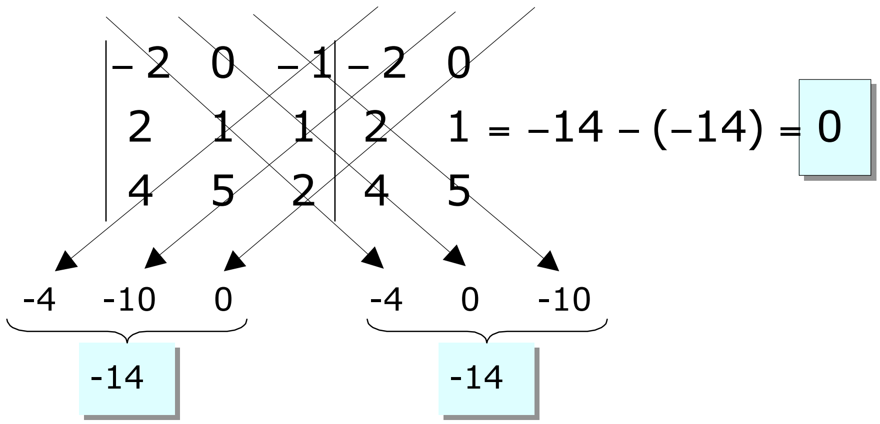
$$\begin{pmatrix} x & y & -1 \\ z & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} ?$$

Resolução:

$$\boxed{A = B^t}$$

$$A = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 2 & y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & y \\ z & -x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = 0 \\ z = 2 \\ y + z = -x \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & -1 \\ z & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$



−2 0 −1 −2 0
2 1 1 2 1 = −14 − (−14) = 0
4 5 2 4 5
-4 -10 0
-4 0 -10
-14
-14