

AULA 3
FATORAÇÃO:
PROF. PAULO

DEFINIÇÃO:

Fatorar é transformar uma soma de duas ou mais parcelas em um produto de dois ou mais fatores.

Podemos separar a fatoração em seis casos.

PRIMEIRO CASO – FATOR COMUM

Este caso é usado quando algum elemento é comum a todas as parcelas.

Exemplo:

$$ab + ac = a.(b + c)$$

Obs.₁:

Havendo potências, colocamos em evidencia somente as comuns de menor expoente.

Exemplos:

1) $a^4 b^5 c^2 - a^2 b^7 c = a^2 b^5 c.(a^2 c - b^2)$

2) $x^3 y^7 + x^2 y^3 = x^2 y^3.(xy^4 + 1)$

3) $x^2 y^9 z^2 - x^3 y^4 w = x^2 y^4.(y^5 z^2 - xw)$

Obs.₂:

Havendo números, colocamos em evidencia o máximo divisor comum.

Exemplos:

1) $27x^2 y + 12xy^2 = 3xy(9x + 4y)$

2) $48x^4 - 36x^2 + 24x = 12x.(4x^3 - 3x + 2)$

3) $64a^5 c^4 - 20a^3 = 4a^3.(16a^2 c^4 - 5)$

SEGUNDO CASO – AGRUPAMENTO

Exemplos:

Fatore:

1) $ax + ay + bx + by$

Resolução:

$$\underbrace{ax + ay} + \underbrace{bx + by} =$$

$$a.(x + y) + b.(x + y) =$$
$$(x + y).(a + b)$$

2) $5ax - 10ay + 4bx - 8by$

Resolução:

$$\underbrace{5ax - 10ay} + \underbrace{4bx - 8by} =$$

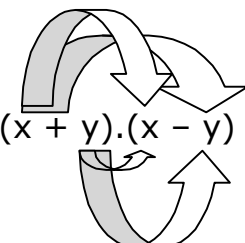
$$= 5a.(x - 2y) + 4b.(x - 2y) =$$

$$= (x - 2y).(5a + 4b)$$

TERCEIRO CASO - DIFERENÇA DE QUADRADOS

O produto da soma de dois números pela diferença é a diferença entre os quadrados dos dois números.

$(x + y).(x - y) = x^2 - y^2$, pois:



$$(x + y).(x - y) = x^2 - \cancel{xy} + \cancel{xy} - y^2 = x^2 - y^2$$

Exemplos₁:

Desenvolva:

1) $(a + b).(a - b)$

Resolução:

$$(a + b).(a - b) = a^2 - b^2$$

2) $(5 + 7a).(5 - 7a)$

Resolução:

$$(5 + 7a).(5 - 7a) = 5^2 - (7a)^2 = 25 - 49a^2$$

3) $(12x - 3y).(12x + 3y)$

Resolução:

$$(12x - 3y).(12x + 3y) = (12x)^2 - (3y)^2 = 144x^2 - 9y^2$$

Exemplos₂:

Fatore:

1) $x^2 - 49$

Resolução:

$$x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x - 7).(x + 7)$$

2) $64x^4 - 36z^2$

Resolução:

$$64x^4 - 36z^2 = (8x^2 - 6z).(8x^2 + 6z)$$

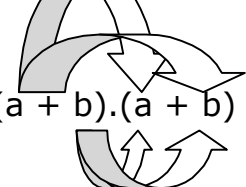
3) $1 - x^4$

Resolução:

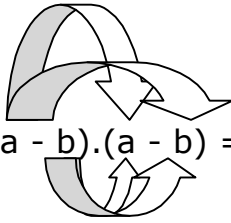
$$1 - x^4 = (1 - x^2).(1 + x^2) = (1 - x).(1 + x).(1 + x^2)$$

QUARTO CASO - QUADRADO PERFEITO

DEFINIÇÃO:



$$(a + b)^2 = (a + b).(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Portanto:

- O quadrado da soma de dois números é igual ao quadrado do primeiro **mais** duas vezes o primeiro vezes o segundo mais o quadrado do segundo.
- O quadrado da diferença de dois números é igual ao quadrado do primeiro **menos** duas vezes o primeiro vezes o segundo mais o quadrado do segundo.

Assim:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Exemplos₁:

Desenvolva:

$$1) (x + 3y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3y + (3y)^2 = x^2 + 6xy + 9y^2$$

$$1) (7 - 2z)^2 = 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 2z + (2z)^2 = 49 - 28z + 4z^2$$

$$1) (4a - 3b)^2 = (4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot 3b + (3b)^2 = 16a^2 - 24ab + 9b^2$$

Exemplos₂:

Fatore:

$$1) 36p^2 + 48kp + 16k^2$$

Resolução:

$$36p^2 + 48kp + 16k^2 = (6p)^2 + 2 \cdot 6p \cdot 4k + (4k)^2 = (6p + 4k)^2$$

$$2) 9 - 30x^2 + 25x^4$$

Resolução:

$$9 - 30x^2 + 25x^4 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5x^2 + (5x^2)^2 = (3 - 5x^2)^2$$

QUINTO CASO - SOMA E DIFERENÇA DE CUBOS

$$(a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

Exemplos₁:

Desenvolva:

$$1) (2 - x) \cdot (4 + 2x + x^2)$$

Resolução:

$$(2 - x) \cdot (4 + 2x + x^2) = 2^3 - x^3 = 8 - x^3$$

$$1) (x + 3y) \cdot (x^2 - 3xy + 9y^2)$$

Resolução:

$$(x + 3y).(x^2 - 3xy + 9y^2) = x^3 + (3y)^3 = x^3 + 27y^3$$

$$1) (2a - 3b).(4a^2 + 6ab + 9b^2)$$

Resolução:

$$(2a - 3b).(4a^2 + 6ab + 9b^2) = (2a)^3 - (3b)^3 = 8a^3 - 27b^3$$

Exemplos₂ :

Fatorar:

$$1) x^3 - 64$$

Resolução:

$$x^3 - 64 = x^3 - 4^3 = (x - 4).(x^2 + 4x + 16)$$

$$1) 27a^3 + 8c^6$$

Resolução:

$$27a^3 + 8c^6 = (3a)^3 + (2c^2)^3 = (3a + 2c^2).(9a^2 - 6ac^2 + 4c^4)$$

$$1) 1000 + g^3$$

Resolução:

$$1000 + g^3 = 10^3 + g^3 = (10 + g).(100 - 10g + g^2)$$

SEXTO CASO – CUBO PERFEITO

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

O cubo da **soma** de dois números é igual ao cubo do primeiro **mais** três vezes o quadrado do primeiro vezes o segundo mais três vezes o primeiro vezes o quadrado do segundo **mais** o cubo do segundo.

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

O cubo da **diferença** de dois números é igual ao cubo do primeiro **menos** três vezes o quadrado do primeiro vezes o segundo mais três vezes o primeiro vezes o quadrado do segundo **menos** o cubo do segundo.

Exemplos₁ :

Desenvolva:

$$1) (2 + x)^3$$

Resolução:

$$(2 + x)^3 = 2^3 + 3.2^2.x + 3.2.x^2 + x^3 = 8 + 12x + 6x^2 + x^3$$

$$2) (x - 4y)^3$$

Resolução:

$$\begin{aligned}(x - 4y)^3 &= x^3 - 3.x^2.4y + 3.x.(4y)^2 - (4y)^3 = \\ &= x^3 - 12x^2y + 48xy^2 - 64y^3\end{aligned}$$

$$3) (2x - 3)^3$$

Resolução:

$$(2x - 3)^3 = (2x)^3 - 3.(2x)^2.3 + 3.2x.3^2 - 3^3 = \\ = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$$

Exemplos₂ :

Fatore:

$$1) 64 - 48x + 12x^2 - x^3$$

Resolução:

$$64 - 48x + 12x^2 - x^3 = 4^3 - 3.4^2x + 3.4.x^2 - x^3 = (4 - x)^3$$

$$2) 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

Resolução:

$$1 + 3x + 3x^2 + x^3 = 1^3 + 3.1^2.x + 3.1.x^2 + x^3 = (1 + x)^3$$

$$3) 27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$$

Resolução:

$$27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3 = \\ = (3x)^3 + 3.(3x)^2.2y + 3.3x.(2y)^2 + (2y)^3 = (3x + 2y)^3$$

Exercícios:

1) Simplifique as frações, supondo o denominador diferente de zero:

a) $\frac{ax + ay}{az + aw}$

b) $\frac{x^2 - 3xy}{2xy^2 - 6y^3}$

c) $\frac{10ax + 6ay - 5x - 3y}{15x + 9y}$

2) Calcular o valor de $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$, sabendo que $x = 1527$ e $y = 1511$

3) Calcule $7865^2 - 7864^2$

4) Calcular o valor de $\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$, sabendo que $a = 132$ e $b = 131$

5) Simplifique a expressão, supondo os denominadores diferentes de zero.

$$\frac{a^2 - ab}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x^2 - 2xy + y^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{ax - bx + ay - by}{a}$$

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS:

1)

$$\text{a) } \frac{ax + ay}{az + aw} = \frac{a(x + y)}{a(z + w)} = \frac{x + y}{z + w}$$

$$\text{b) } \frac{x^2 - 3xy}{2xy^2 - 6y^3} = \frac{x(x - 3y)}{2y^2(x - 3y)} = \frac{x}{2y^2}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{10ax + 6ay - 5x - 3y}{15x + 9y} &= \frac{2a(5x + 3y) - 1(5x + 3y)}{3(5x + 3y)} = \\ &= \frac{(5x + 3y) \cdot (2a - 1)}{3(5x + 3y)} = \frac{2a - 1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{2) } \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{(x + y)^2}{(x - y) \cdot (x + y)} = \frac{x + y}{x - y}$$

como $x = 1527$ e $y = 1511$, então:

$$\frac{x + y}{x - y} = \frac{1527 + 1511}{1527 - 1511} = \frac{3038}{16} = \frac{1519}{8}$$

$$\text{3) } 7865^2 - 7864^2 = (7865 - 7864) \cdot (7865 + 7864) = 1 \cdot (15729) = 15729$$

$$\text{4) } \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = \frac{(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)}{(a^2 + ab + b^2)} = a - b$$

como $a = 132$ e $b = 131$, então:

$$a - b = 132 - 131 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{5) } \frac{a^2 - ab}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x^2 - 2xy + y^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{ax + bx + ay + by}{a} &= \\ = \frac{a \cdot (a - b)}{(x - y) \cdot (x + y)} \cdot \frac{(x - y)^2}{(a - b) \cdot (a + b)} \cdot \frac{x(a + b) + y(a + b)}{a} &= \end{aligned}$$

$$= \frac{\cancel{a} \cdot (a - b)}{(x - y) \cdot (x + y)} \cdot \frac{(x - y) \cdot \cancel{(x - y)}}{(\cancel{a - b}) \cdot (a + b)} \cdot \frac{(\cancel{a + b}) \cdot (x + y)}{\cancel{a}} = x - y$$