MATEMÁTICA

Aula 30

Determinantes

Determinante nulo

UMA FILA NULA

DUAS FILAS PARALELAS IGUAIS

DUAS FILAS PARALELAS PROPORCIONAIS

UMA FILA É COMBINAÇÃO LINEAR DE FILAS PARALELAS

Determinante se altera

TROCA DE SINAL, quando duas filas paralelas trocam entre si de posição.

Fica MULTIPLICADO POR **k** quando os elementos de uma fila são multiplicados por **k**.

FICA MULTIPLICADO POR $\mathbf{k}^{\mathbf{n}}$, quando a matriz é multiplicada por **k**.

Exemplo de aplicação:

Julgue o item.
Se a_1, a_2, a_3, ..., a_9 formam uma progressão geométrica de razão q, então

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} = a_1.q^9$$

Resolução:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1.q & a_1.q^2 \\ a_4 & a_4.q & a_4.q^2 \\ a_7 & a_7.q & a_7.q^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1.q & a_1.q^2 \\ a_4 & a_4.q & a_4.q^2 \\ a_7 & a_7.q & a_7.q^2 \end{vmatrix} = a_1.a_4.a_7 \begin{vmatrix} 1 & q & q^2 \\ 1 & q & q^2 \\ 1 & q & q^2 \end{vmatrix} = \boxed{0}$$

Determinante **não** se altera

Trocarmos ordenadamente as linhas pelas colunas
det A = det A^t.

Somarmos a uma fila uma combinação linear de outras filas paralelas.

Exemplo de aplicação:

Qual o conjunto-solução da equação

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 1 \\ 3-x & 1-x & 1 \\ 3-x & 1 & 1-x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (3-x).\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} \\ \text{x (-1)} \end{array} = 0 \Rightarrow (3-x).\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (3-x).\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-x).x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{V=\{0,3\}}$$

Teorema de Laplace:

$$a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + a_{i3}.A_{i3} + \ldots + a_{in}.A_{in} =$$

$$= a_{1j}.A_{1j} + a_{2j}.A_{2j} + a_{3j}.A_{3j} + \ldots + a_{nj}.A_{nj} = \det M$$

onde $A_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}$ é o cofator do elemento a_{ij}

Exemplo de aplicação:

Qual o determinante associado à matriz

$$\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & x & x & x \\ a & x & y & y \\ a & x & y & 1 \end{bmatrix} ?$$

Resolução:

$$\det\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & x & x & x \\ a & x & y & y \\ a & x & y & 1 \end{bmatrix} = a.\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & x & x & x \\ 1 & x & y & y \\ 1 & x & y & 1 \end{vmatrix}$$

$$a.\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & x & x & x \\ 1 & x & y & y \\ 1 & x & y & 1 \end{vmatrix}\ (-1)\ + \quad = a.\begin{vmatrix} 0 & a-x & a-y & a-1 \\ 0 & 0 & x-y & x-1 \\ 0 & 0 & 0 & y-1 \\ 1 & x & y & 1 \end{vmatrix}$$

$$a.\begin{vmatrix} 0 & a-x & a-y & a-1 \\ 0 & 0 & x-y & x-1 \\ 0 & 0 & 0 & y-1 \\ \boxed{1} & x & y & 1 \end{vmatrix} = a.1.(-1)^{4+1}.\begin{vmatrix} a-x & a-y & a-1 \\ 0 & x-y & x-1 \\ 0 & 0 & y-1 \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{-a.(a-x).(x-y).(y-1)}$$