MATEMÁTICA

Aula 31

Sistemas Lineares

OBTENÇÃO DA INVERSA(dispositivo prático)

Calcular o det A

Matriz dos cofatores (A_c)

Transposta da matriz dos cofatores $(A_c)^t$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}.(A_c)^t$$

Pode-se ter:

det A $\neq$ 0	-	A é **inversível** ou não singular.
det A = 0	-	A é **não inversível** ou singular.

Exemplo de aplicação:

Obter a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolução:

1) $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.3 - 1.2 = \boxed{-2} \neq 0 \Rightarrow$ inversível.

2) Matriz dos cofatores: $\boxed{A_c = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}$

3) Transposta da matriz dos cofatores:

$$(A_c)^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^t = \boxed{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$4)\ A^{-1} = \frac{1}{\det A} . (A_c)^t = \frac{1}{-2} . \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

Propriedades da inversa

A^{-1} é única.

$(A^{-1})^{-1} = A$.

$(A.B)^{-1} = B^{-1}. A^{-1}$.

$(A^{-t})^{-1} = (A^{-1})^t$.

Propriedades da inversa

$A \,.\, A^{-1} = I \quad \Rightarrow \quad \det(A \,.\, A^{-1}) = \det I$

$\Rightarrow \quad \det A \,.\, \det A^{-1} = \det I$

$$\Rightarrow \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Elemento b_{ij} da inversa

$$b_{ij} \text{ da } A^{-1} = \frac{\text{cofator do } a_{ji} \text{ da } A}{\det A}$$

Exemplo de Aplicação

$$\text{Sendo } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

qual o elemento da terceira linha e primeira coluna de sua inversa?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$b_{31} \text{ da } A^{-1} = \frac{\text{cofator do } a_{13} \text{ da } A}{\det A} = \frac{(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{11} = \boxed{\frac{9}{11}}$$

Teorema de Cramer

$$\{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)\} = \left\{\left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \frac{D_3}{D}, \ldots, \frac{D_n}{D}\right)\right\}$$

D : determinante do sistema.

D_i : troca-se a iésima coluna pela independente.

Exemplo de Aplicação:

Sabendo que x, y e z são números reais e

$$(2x + y - z)^2 + (x - y)^2 + (z - 3)^2 = 0$$

quanto vale $x + y + z$?

Resolução:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1y - 1z = 0 \\ 1x - 1y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 1z = 3 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D = -3$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D = -3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D_x = -3 \Rightarrow x = \frac{D_x}{D} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D = -3$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D_y = -3 \Rightarrow y = \frac{D_y}{D} = \frac{-3}{-3} = \boxed{1}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D = -3$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow D_z = -9 \Rightarrow z = \frac{D_z}{D} = \frac{-9}{-3} = \boxed{3}$$

$\{(x,y,z)\} = \{(1,1,3)\}$

$x + y + z = 1 + 1 + 3 = \boxed{5}$

MÉTODO DE GAUSS(escalonamento)

Exemplo:

$$\begin{cases} x - y + z = -2 & (a_1) \quad \times(-1) \quad \times(-2) \\ x - 2y - 2z = -1 & (b_1) \\ 2x + y + 3z = 1 & (c_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = -2 & (a_1) \\ -y - 3z = 1 & (b_2) \\ 3y + z = 5 & (c_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = -2 & (a_1) \\ - y - 3z = 1 & (b_2) \quad x\ 3 \\ 3y + z = 5 & (c_2) \quad + \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = -2 & (a_1) \\ - y - 3z = 1 & (b_2) \\ - 8z = 8 & (c_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = -2 & \Rightarrow x = 1 \\ - y - 3z = 1 & \Rightarrow y = 2 \\ - 8z = 8 & \Rightarrow z = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{V = \{(1;2;-1)\}}$$