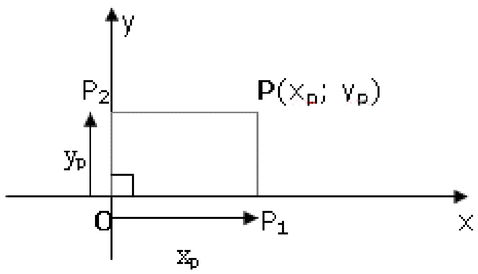
Aula 32

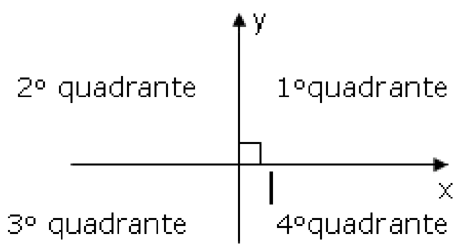
Geometria Analítica

COORDENADAS CARTESIANAS

Consideremos o plano determinado por dois eixos $\overline{Ox}$ e $\overline{Oy}$ perpendiculares em **O**.
Considere um ponto **P** qualquer do plano, e trace por ele as paralelas aos eixos, que cortarão $\overline{Ox}$ e $\overline{Oy}$ respectivamente em P_1 e P_2 . Observe a figura:



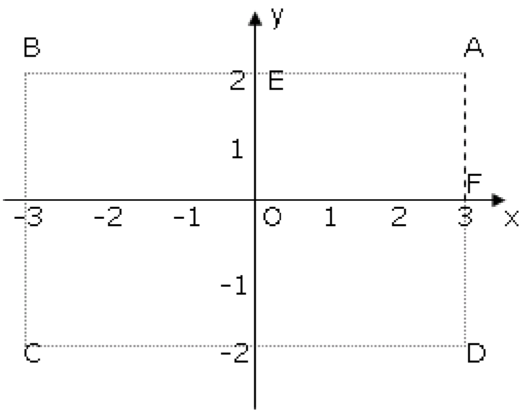
Assim, temos a seguinte nomenclatura:
a) **abscissa** de **P** é o número real $\mathbf{x_p}$ = OP1 (distância de O a P_1)
b) **ordenada** de **P** é o número real $\mathbf{y_p}$ = OP2 (distância de O a P_2)
c) as coordenadas de **P** são os números reais xp e yp indicados na forma de um par ordenado, ou seja, $(x_p; y_p)$.
d) O eixo dos x ou $\overline{Ox}$ será chamado **eixo das abscissas**.
e) O eixo dos y ou $\overline{Oy}$ será chamado **eixo das ordenadas**.
f) O plano formado pelo par de eixos $\overline{Ox}$ e $\overline{Oy}$ será chamado plano cartesiano.
g) O sistema de eixos formados por $\overline{Ox}$ e $\overline{Oy}$ é chamado **sistema cartesiano ortogonal**, onde **O** representa a origem desse sistema.
h) Observe que os eixos citados determinam, no plano cartesiano, quatro regiões angulares que serão denominadas **quadrantes**. Veja a figura abaixo:



Seja P um ponto pertencente ao 1° quadrante, observe que $x_p > 0$ e $y_p > 0$.
Se P for um ponto do 2° quadrante, então $x_p < 0$ e $y_p > 0$.
Caso P pertença ao 3° quadrante, temos $x_p < 0$ e $y_p < 0$.
E, por fim, se P for um ponto do 4° quadrante temos $x_p > 0$ e $y_p < 0$.
Ou seja, pontos pertencentes aos quadrantes ímpares (1° e 3°) têm coordenadas de mesmo sinal, enquanto pontos pertencentes aos quadrantes pares (2° e 4°) têm coordenadas de sinal contrário.
Já os pontos que pertencem ao eixo das abscissas terão ordenada nula, ou seja, $y_p = 0$, enquanto os que pertencem ao eixo das ordenadas terão abscissa nula, ou seja, $x_p = 0$.

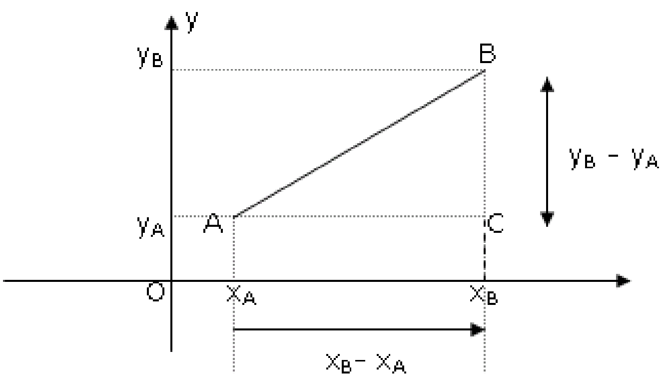
Exemplos:

a) A(3 ;2) $\in$1° quadrante, pois suas coordenadas são positivas.
b) B(-3 ;2) $\in$2° quadrante, pois $X_B < 0$ e $Y_B > 0$.
Observe que A e B são simétricos em relação ao eixo das ordenadas.
c) C(-3 ;-2) $\in$3° quadrante, pois suas coordenadas são negativas.
Observe que B e C são simétricos em relação ao eixo das abscissas.
d) D(3 ;-2) $\in$4° quadrante, pois $X_D > 0$ e $Y_D < 0$.
e) E(0;2) $\in \overrightarrow{Oy}$, pois $X_E = 0$.
f) F(3;0) $\in \overrightarrow{Ox}$, pois $Y_F = 0$.
Observe a representação dos pontos citados acima, na figura:



DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Dados dois pontos A(X_A; Y_A) e B(X_B;Y_B) distintos, para calcularmos a distância entre os pontos A e B, vamos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo ABC da figura.



A distância entre os pontos A e B será indicada por d_{AB}.
Assim, temos:

$$(d_{AB})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \quad \Leftrightarrow d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemplos:
Determine a distância entre os pontos :
a) A (2;1) e B (-2;0)
b) C (-2;2) e D (-1;5)

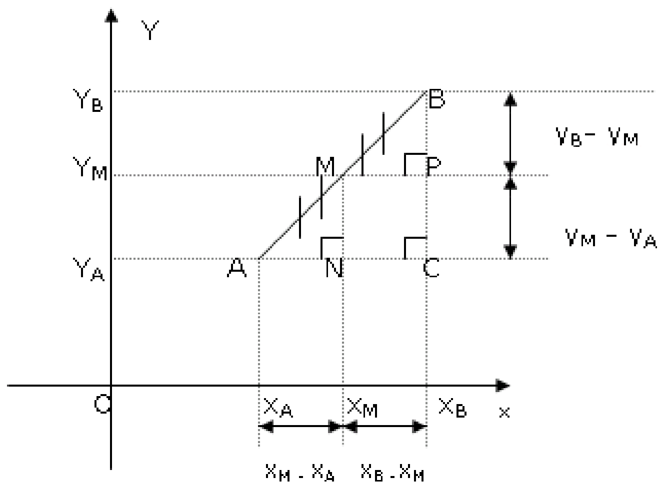
Resolução:

a) $d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-2-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

b) $d_{CD} = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{[-1-(-2)]^2 + (5-2)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

Dados os pontos A(xA; yA) e B(xB; yB), distintos, as coordenadas do ponto M, médio de $\overline{AB}$, são obtidas aplicando-se o Teorema de Tales, na figura abaixo.



I) Como $\overline{MN} // \overline{BC}$, temos:

$AM = MB \Leftrightarrow AN = NC \Leftrightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \Leftrightarrow 2x_M = x_A + x_B \Leftrightarrow x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$

II) Como $\overline{MP} // \overline{AC}$, temos:

$AM = MB \Leftrightarrow CP = PB \Leftrightarrow y_M - y_A = y_B - y_M \Leftrightarrow 2y_M = y_A + y_B \Leftrightarrow y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

Assim, temos as coordenadas do ponto médio do segmento AB, ou seja:

$$\mathbf{M}\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Exemplos:

a) Determine o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, onde A(8;7) e B(-2;-3).

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{8 - 2}{2} = 3$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{7 - 3}{2} = 2$$

Logo, M(3;2)

b) Sendo M(-2;5) o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, determinar o ponto B dado o ponto A(7;-1).

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow -2 = \frac{7 + x_B}{2} \Rightarrow -4 = 7 + x_B \Rightarrow x_B = -11$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 5 = \frac{-1 + y_B}{2} \Rightarrow 10 = -1 + y_B \Rightarrow y_B = 11$$

Logo, B(-11;11)

CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO E ÁREA DO TRIÂNGULO

1) Condição de alinhamento

Os pontos A(x_A; y_A), B(x_B; y_B) e C(x_C; y_C) estão alinhados se, e somente se, o determinante D é nulo.

Simbolicamente:

$$\textbf{A, B e C estão alinhados} \Leftrightarrow \textbf{D=0, onde D =} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

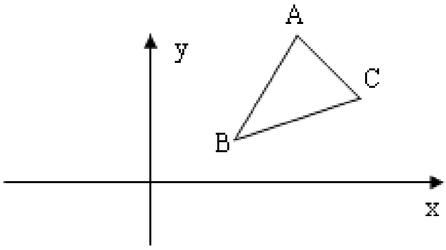
Dizer que **A, B e C estão alinhados** é o mesmo que dizer **A, B e C são colineares.**

A B C

2) Área do triângulo

Dados três pontos A(x_A; y_A), B(x_B; y_B) e C(x_C; y_C) **não colineares**,ou seja, não alinhados, é possível encontrarmos a área do triângulo ABC, a partir de seus vértices, aplicando a seguinte fórmula:

$\mathbf{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D|$ **, onde** $\mathbf{D} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$**, ou seja, a área do triângulo ABC é igual ao módulo do determinante dividido por dois.**



Exemplos:
a) Os pontos A(-2;-3), B(1;2) e C(5:4) estão alinhados?

$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 15 + 4 - 10 + 8 + 3 = -14$, logo, como $D \neq 0$, A, B e C não estão alinhados.

b) Determine a área do triângulo ABC, onde A(-2;3), B(4; -1) e C(5;7).

$D = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 15 + 28 + 5 + 14 - 12 = 52$

$A = \frac{1}{2} \cdot |D| = \frac{1}{2} \cdot |52| = \frac{1}{2} \cdot 52 = 26$, logo a área do triângulo ABC é 26.

Exercícios

1) Sejam A(a +1; 3) e B(2; -b +1) pontos coincidentes do plano cartesiano, determine o valor de a+b.

2) Determinar no eixo das ordenadas o ponto P, cuja distância até o ponto A(4;1) seja igual a 5 unidades.

3) Os pontos A(0;0), B(1;3), C(10;0) são vértices de um retângulo. Determinar as coordenadas do 4o vértice do retângulo.

4) Para que valores de m, os pontos A(0; m), B(-2; 4) e C(1; -3) estão alinhados?

5) Calcule a área do quadrilátero ABCD, dados os pontos A(2; 4), B(6;1), C(3;-2) e D(-2; 2).

Resolução:

1) Como A e B são coincidentes, então $X_A = X_B$ e $Y_A = Y_B$.

Assim $a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$ e $3 = -b + 1 \Rightarrow b = -2$. Logo $a + b = 1 - 2 = -1$

2) Se $P \in \overline{Oy}$ (eixo das ordenadas), $X_P=0$, ou seja, $P(0, Y_P)$.

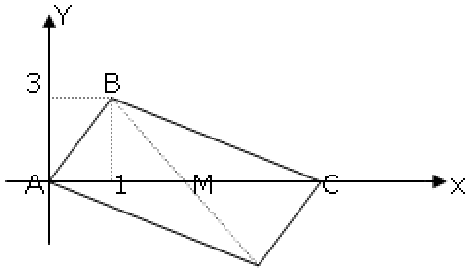
Temos $d_{AP} = 5$ e $A(4; 1)$, e pela fórmula da distância entre dois pontos :

$$d_{AP} = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{(0-4)^2 + (y_P - 1)^2} = \sqrt{16 + (y_P - 1)^2} = 5 \Rightarrow 16 + (y_P - 1)^2 = 25 \Rightarrow$$

$$(y_P - 1)^2 = 9 \Rightarrow y_P - 1 = \pm 3 \Rightarrow y_P = 4 \text{ ou } y_P = -2$$

Logo, P(0; 4) ou P(0; -2)

3) Localizando os pontos A, B e C, temos



M é o ponto médio das diagonais do retângulo ABCD, logo:

$$x_M = \frac{x_B + X_D}{2} \Rightarrow 5 = \frac{1 + X_D}{2} \Rightarrow x_D = 9$$

$$y_M = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow 0 = \frac{3 + y_D}{2} \Rightarrow y_D = -3$$

Portanto: D(9; -3)

4) Pela condição de alinhamento temos:

A, B e C estão alinhados $\Leftrightarrow$ D=0, onde $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$

Logo, $\begin{vmatrix} 0 & m & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6 + m - 4 + 2m = 0 \Rightarrow 3m + 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{-2}{3}$

5) Dividindo o quadrilátero ABCD em dois triângulos, temos:
$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ACD}$, ou seja, a área do quadrilátero ABCD é igual a soma das áreas dos triângulos ACD e ABC.
Aplicando a fórmula para área do triângulo quando são conhecidos os seus vértices, temos:

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -21 \qquad D_{ACD} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 26$$

$$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ACD} = \frac{1}{2}|D_{ABC}| + \frac{1}{2}|D_{ACD}| = \frac{1}{2}|-21| + \frac{1}{2}|26| = \frac{21}{2} + \frac{26}{2} = \frac{47}{2}$$

Logo a área do quadrilátero ABCD é $\frac{47}{2}$