

## ***Aula 35-Circunferência***

***1) Circunferência (definição)***

***2) Equação reduzida***

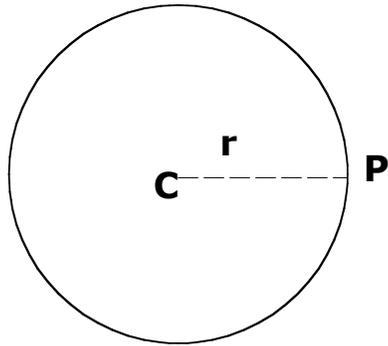
***3) Equação geral***

***4) Posições relativas***

***5) Resolução de exercícios***

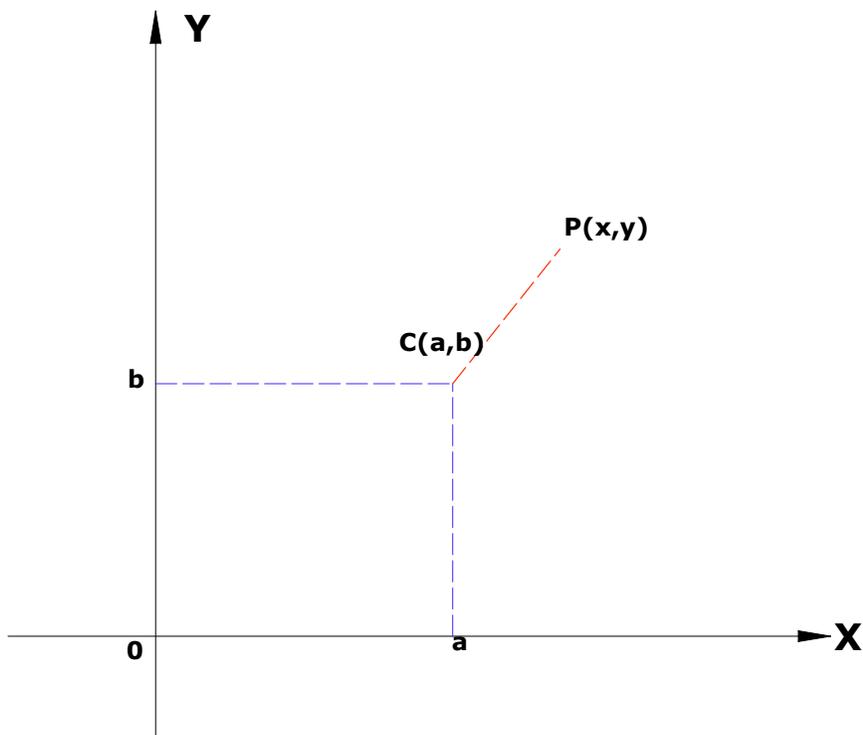
## 1) Circunferência – definição.

A **circunferência** é o lugar geométrico definido como: **Conjunto de pontos que eqüidistam do ponto C, chamado de centro, a uma distância  $r$  ( $r > 0$ ), chamada de raio.** Veja o desenho abaixo:



## 2) Equação reduzida da circunferência.

Podemos colocar a circunferência no gráfico cartesiano, e sendo assim determinarmos uma equação para os pontos que formam a **circunferência**.



Vamos aplicar a fórmula de distância entre dois pontos dada por:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

, com

Utilizamos os pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , e aplicado na fórmula  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ , obtemos:

$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ , mas  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = r$  então ficamos com:

$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = r^2$ , e elevando-se os dois lados ao quadrado,

obtemos finalmente:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Essa equação é denominada **equação reduzida** da **circunferência**.

### 3) Equação geral da circunferência.

Para obtermos a equação geral da **circunferência**, basta desenvolvermos a equação reduzida, vejamos:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

e ordenando de maneira conveniente, obtemos:

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

Essa equação é denominada **equação geral** da **circunferência**.

Observação: É comum escrevermos a **equação geral** da seguinte maneira:

substitui-se

e, finalmente ficamos com:

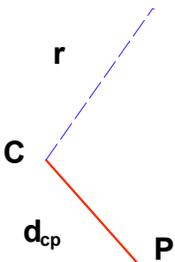
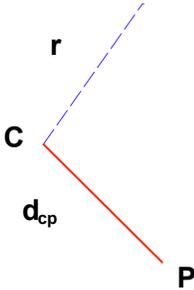
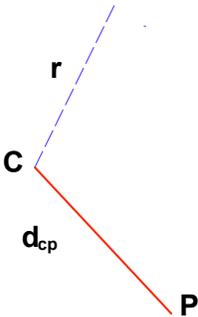


#### 4) Posições relativas da circunferência.

##### 4.1- Posição de um ponto em relação a uma circunferência.

Um ponto  $P(x; y)$  do plano, em relação a uma **circunferência** de centro  $C$  e raio  $r$ , pode ser interno, externo ou pertencer à circunferência.

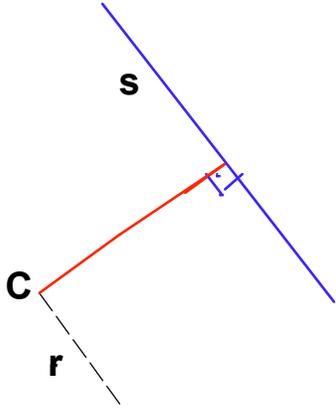
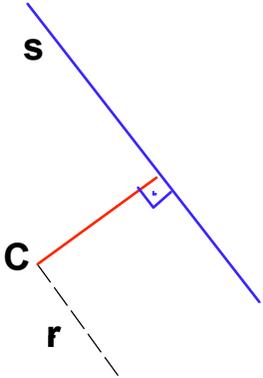
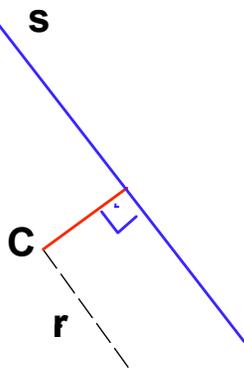
Para sabermos em qual situação o ponto se enquadra, basta calcularmos a distância do centro ao ponto, e compará-la com a medida do raio. Observe o quadro.

| <b>P interno à circunferência</b>   | <b>P pertence à circunferência</b>  | <b>P externo à circunferência</b>   |
|---|---|---|
|  |  |  |

##### 4.2- Posição de uma reta em relação a uma circunferência.

Uma reta  $s$  do plano, em relação a uma **circunferência** de centro  $C$  e raio  $r$ , pode ser exterior, tangente ou secante à circunferência.

Para sabermos em qual situação a reta se enquadra, basta calcularmos a distância do centro à reta, e compará-la com a medida do raio. Observe o quadro.

| <b>s é exterior à circunferência</b>  | <b>s é tangente à circunferência</b>   | <b>s é secante à circunferência</b>   |
|---|--|---|
|  |  |  |
|   |  |   |

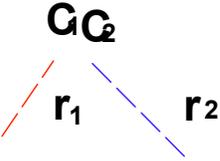
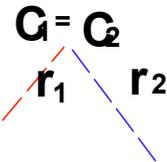
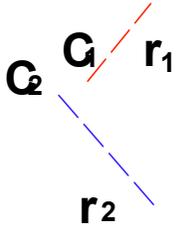
### 4.3- Posição de uma circunferência em relação a outra circunferência.

Vamos considerar as circunferências abaixo:

~~~~~

consideremos  $d$  a distância entre seus centros. A medida desta distância vai determinar que as circunferências podem ser:

| Externas                                                                          | Tangentes externamente                                                            | Secantes                                                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |
|                                                                                   |                                                                                   |                                                                                     |

| Tangentes internamente                                                              | Concêntricas                                                                        | Internas não concêntricas                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |
|  |                                                                                     |  |

**5) Resolução de exercícios**

1) Obter a equação reduzida das circunferências nos seguintes casos:

a)  $C(4,6)$  e  $r = 3$ .

**Resolução:**

Temos que a equação reduzida é dada por:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  e substituindo **a** por **4**, **b** por **6** e **r** por **3**, obtemos  $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 3^2$  e finalmente:

$$(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 9$$

b)  $C(-3,1)$  e  $r = \frac{1}{2}$ .

**Resolução:**

Temos que a equação reduzida é dada por:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  e substituindo **a** por **-3**, **b** por **1** e **r** por  $\frac{1}{2}$ , obtemos  $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$  e, finalmente:

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$$

c)  $C(0,0)$  e  $r = 5$ .

**Resolução:**

Temos que a equação reduzida é dada por:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  e substituindo **a** por **0**, **b** por **0** e **r** por **5**, obtemos  $x^2 + y^2 = 5^2$  e, finalmente:

$$x^2 + y^2 = 25$$

2) Dadas as equações das circunferências, obter o centro e o raio, respectivos:

a)

**Resolução:**

Temos que a equação reduzida é dada por:

e comparando com

, observamos que:

Então temos que:

b)

**Resolução:**

Temos que a equação reduzida é dada por:

e comparando com

, observamos que:

Então temos que:

c)

**Resolução:**

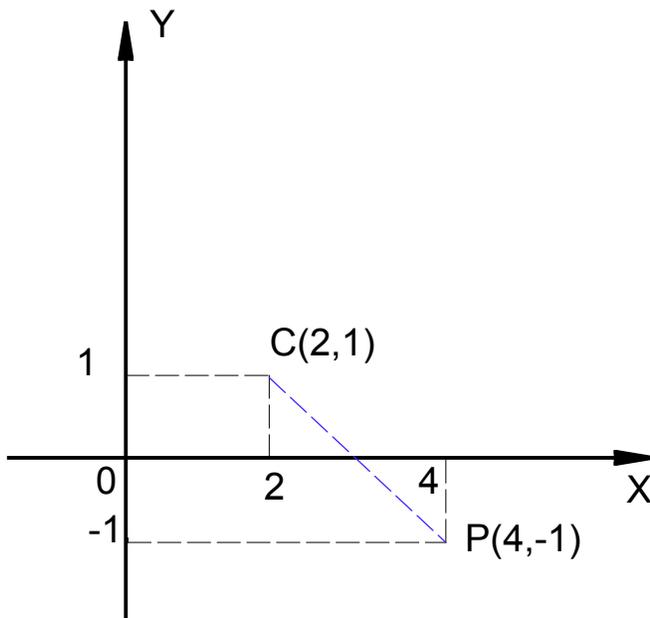
Temos que a equação reduzida é dada por:

e comparando com

observamos que:

Então temos que:

3) Obter a equação reduzida da circunferência cujo gráfico é:



**Resolução:**

Sabemos que

então:

$$\frac{y - 1}{x - 2} = \frac{-1 - 1}{4 - 2} = -1$$

Portanto temos que

$$y - 1 = -1(x - 2) \Rightarrow y - 1 = -x + 2 \Rightarrow y = -x + 3$$

logo a equação reduzida fica:

4) Obter a equação geral do exercício anterior.

**Resolução:**

Basta desenvolvermos

, que fica:

logo a equação geral é:

5) Determinar o centro e o raio da circunferência de equação:

**Resolução:**

Lembrando da equação

e comparando com a equação

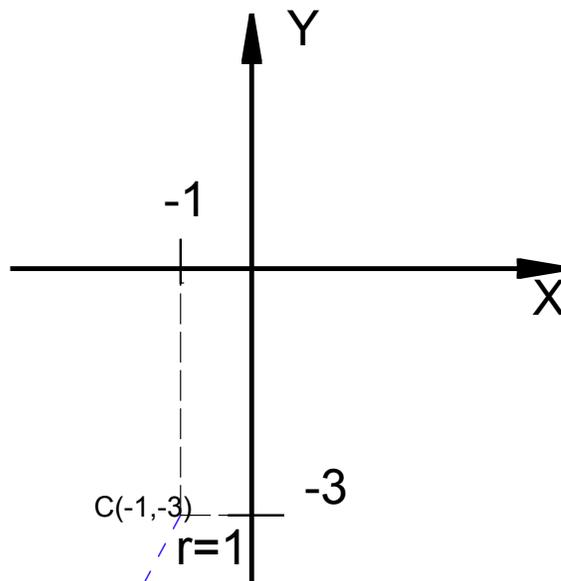
obtemos:



Então temos que:



Teríamos o seguinte gráfico desta equação:



5) Determinar o centro e o raio da circunferência de equação:

**Resolução:**

Lembrando da equação

e comparando com a equação

obtemos:



Então temos que:

6) Qual a posição do ponto P em relação à circunferência  $\lambda$ , em cada um dos casos abaixo?

**Resolução:**

Basta substituir os valores de  $x = 3$  e  $y = 1$  na equação

, então:

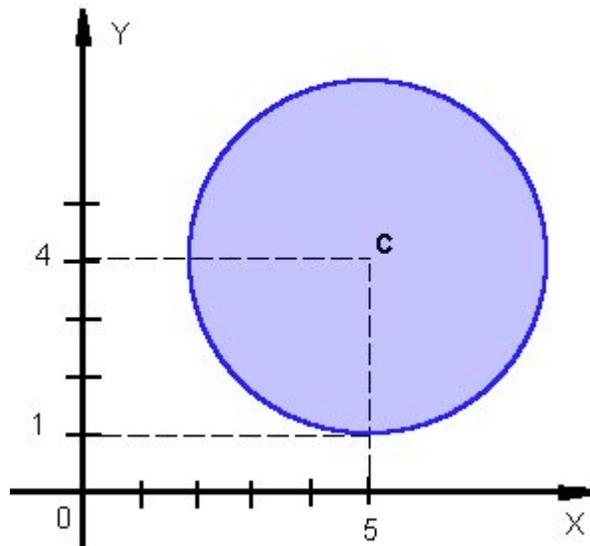
Logo:

b)

Basta substituir os valores de  $x = 3$  e  $y = 1$  na equação  $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 16$ , então:

Logo:  $P$  é exterior a  $\lambda$ .

7) Esboçar o gráfico das seguintes inequações das circunferências.



Observação: essa região é denominada **círculo**.

