Aula 36 – Cônicas

1-Elipse

2- Hipérbole

3- Parábola

Elipse

1) Elipse (definição)

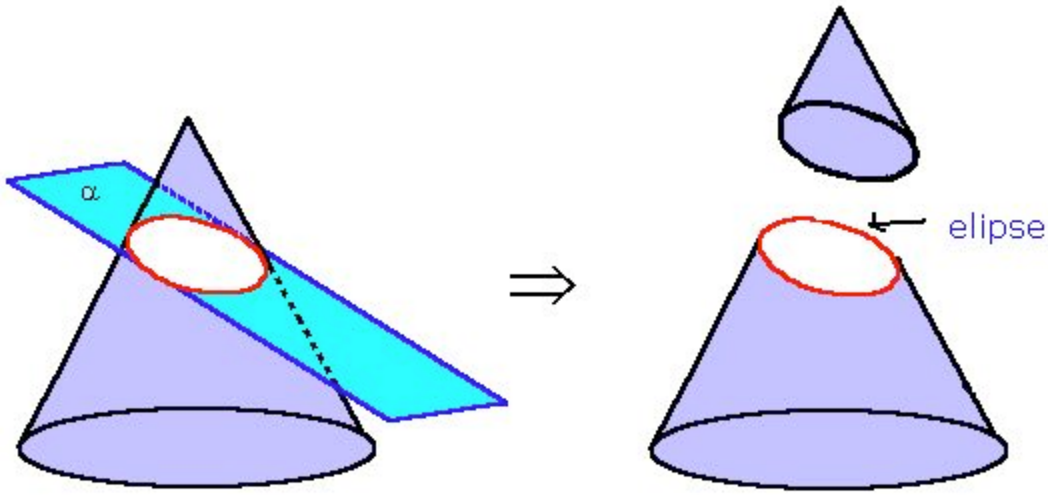
2) Propriedades da Elipse

3) Equação reduzida

4) Resolução de exercícios

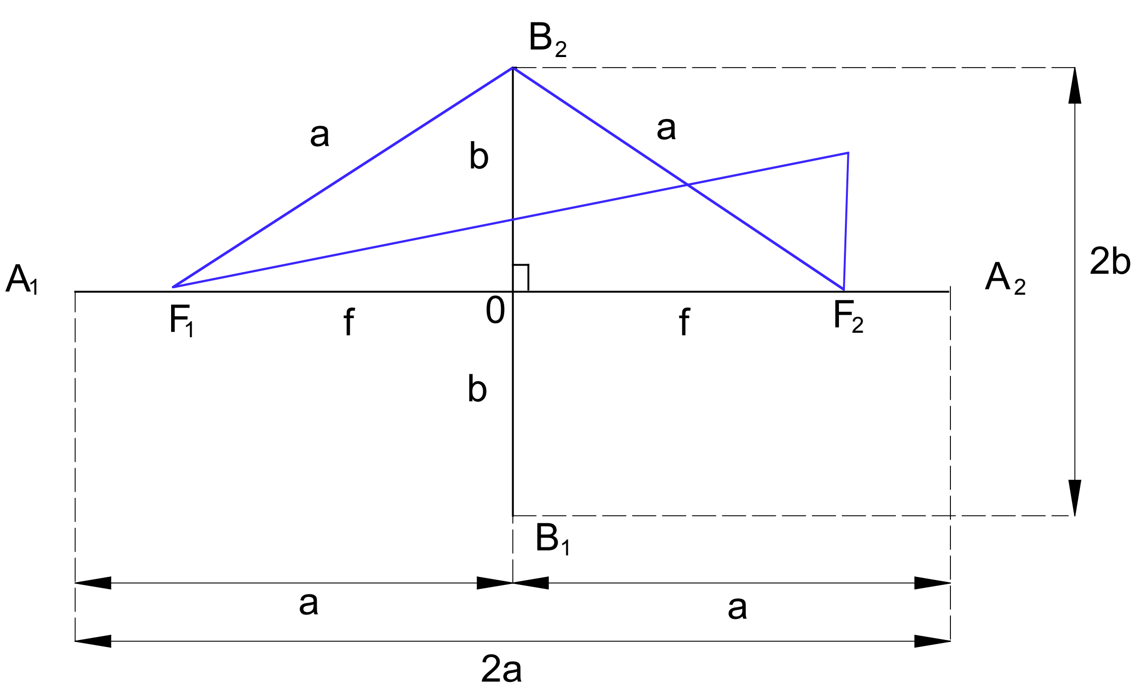
1) Elipse – definição.

Ao seccionarmos com um plano α a superfície de um cone, conforme figura, resulta em uma curva denominada **elipse**.



Elipse é o conjunto dos pontos **P** de um plano de modo que a soma das distâncias de é constante .Assim:

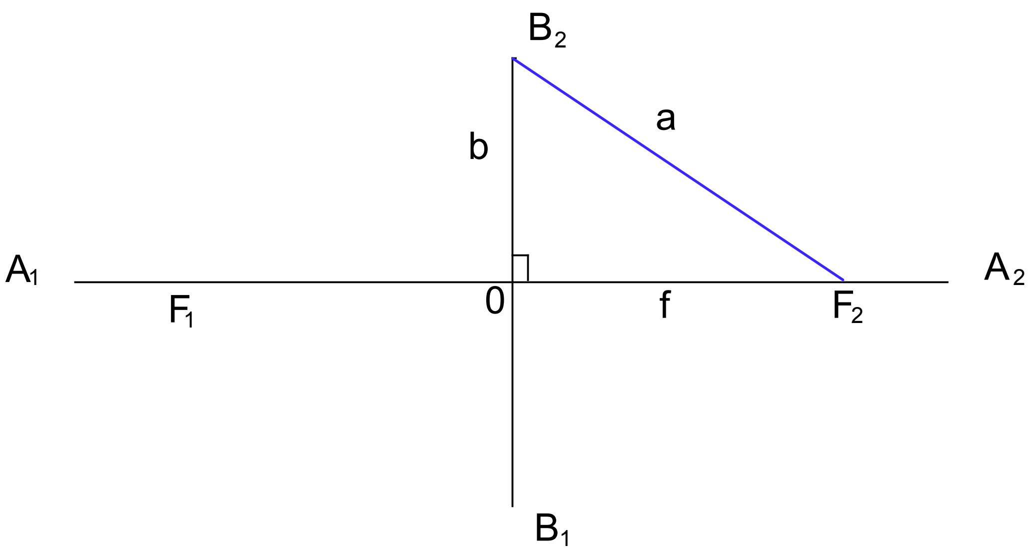
Elementos da elipse



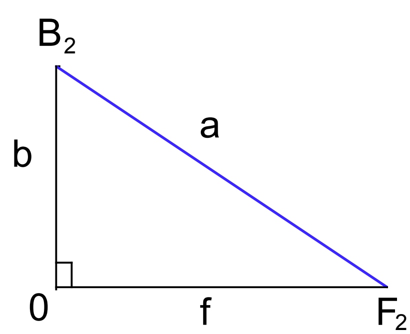
Focos são os pontos .
Vértices são os pontos .
Eixo maior é o segmento e mede 2a
Eixo menor é o segmento e mede 2b.
Distância Focal é a distância entre os focos e mede 2f.

Excentricidade é a razão .

2) Propriedades da elipse – relação fundamental



Se destacarmos o triângulo ,e aplicarmos Pitágoras:



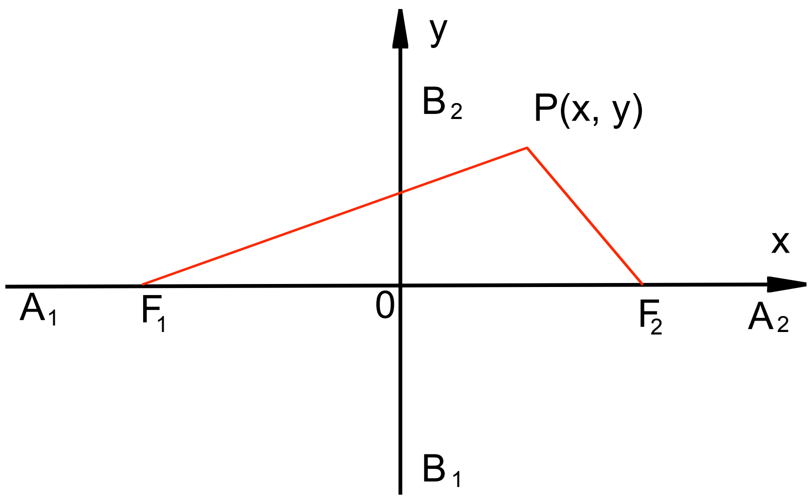
Obtemos a relação fundamental:

3) Equação reduzida da elipse.

Temos que analisar quatro casos de **elipse** no plano cartesiano.

1º caso

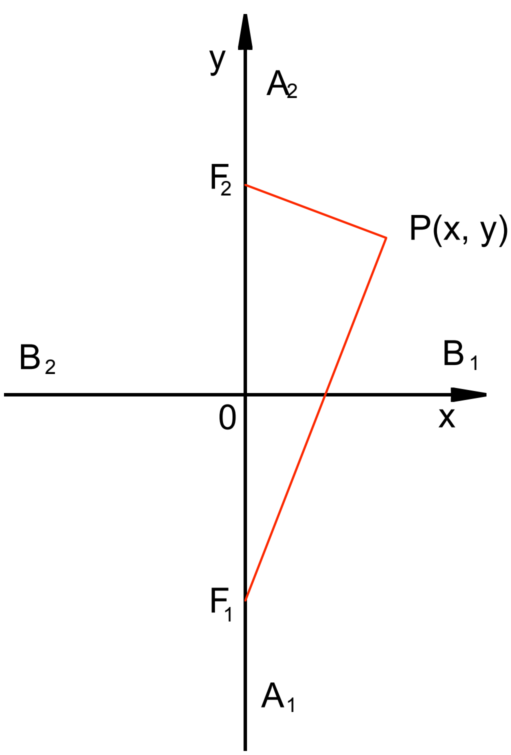
Elipse centrada na origem e eixo maior sobre o eixo das abscissas.



A equação reduzida fica:

2º caso

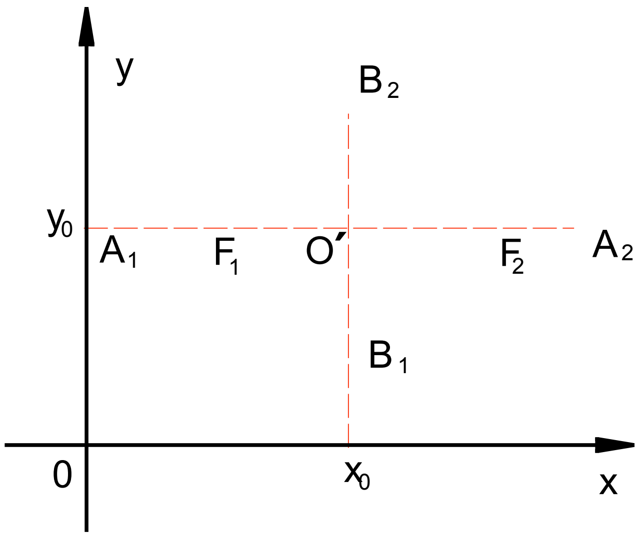
Elipse centrada na origem e eixo maior sobre o eixo das ordenadas.



A equação reduzida fica:

3º caso

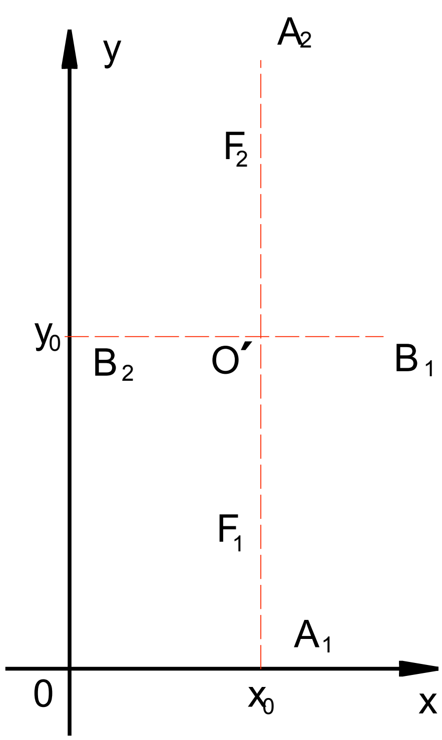
Elipse centrada num ponto e com o eixo paralelo ao eixo das abscissas.



A equação reduzida fica:

4º caso

Elipse centrada num ponto e com o eixo paralelo ao eixo das ordenadas.

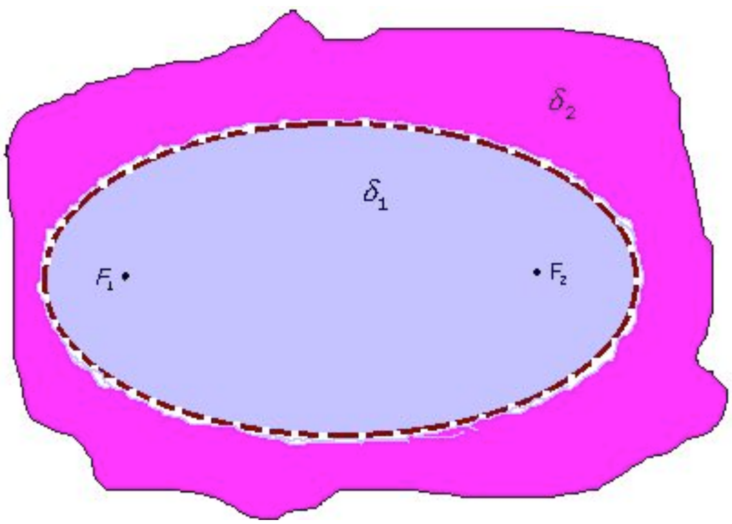


A equação reduzida fica:

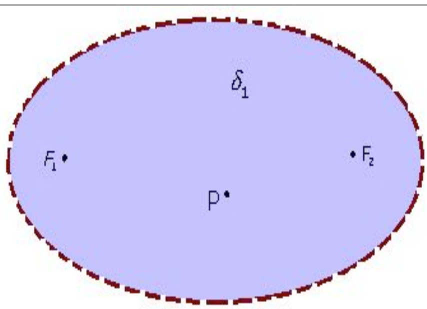
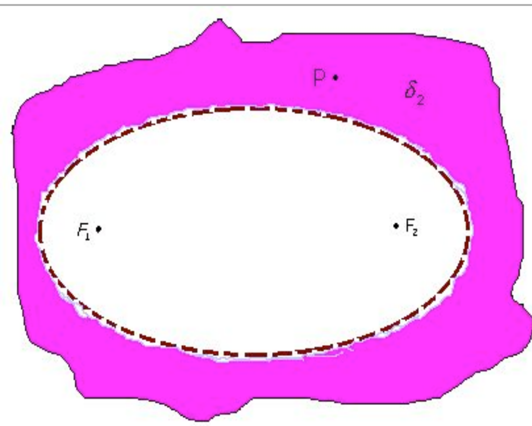
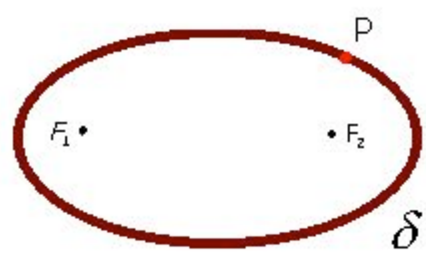
4) Posições relativas da elipse.

4.1- Posição de um ponto em relação a uma elipse.

Uma ***elipse*** de focos separa o plano α , que a contém, em duas regiões . Temos então que o conjunto dos pontos que formam é denominado **interior** da **elipse** e é denominado **exterior** da ***elipse*** .Teremos então:

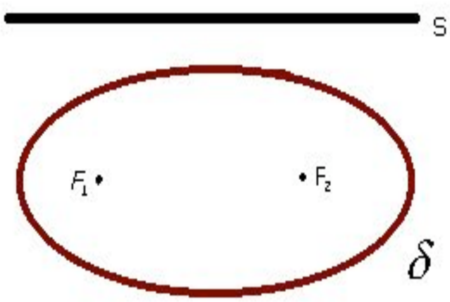
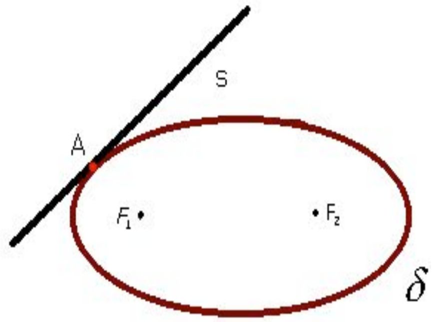
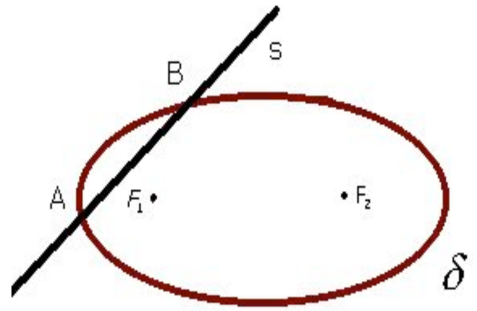


Um ponto P(x; y) do plano, em relação a uma ***elipse*** pode ser interno, externo ou pertencer à ***elipse***.

P interno à *elipse*	**P externo à *elipse***	**P pertence à *elipse***
		

4.2- Posição de uma reta em relação a uma elipse.

Uma reta do plano, em relação a uma ***elipse*** pode ser **exterior**, **tangente** ou **secante**.

s é exterior à elipse	**s é tangente à elipse**	**s é secante à elipse**
		

5) Resolução de exercícios

1) Dada a equação , determinar:

a) a distância focal.

Resolução:

Comparando a equação , com a equação reduzida ,

encontramos Lembrando da relação fundamental ,e substituindo os valores obtemos:

$\sqrt{}$, e como ,então:

$\boxed{\sqrt{}}$

b) a excentricidade.

Resolução:

A excentricidade é obtida por .Então $\boxed{\frac{\sqrt{}}{}}$

2) Calcular a distância focal da elipse de equação .

Resolução:

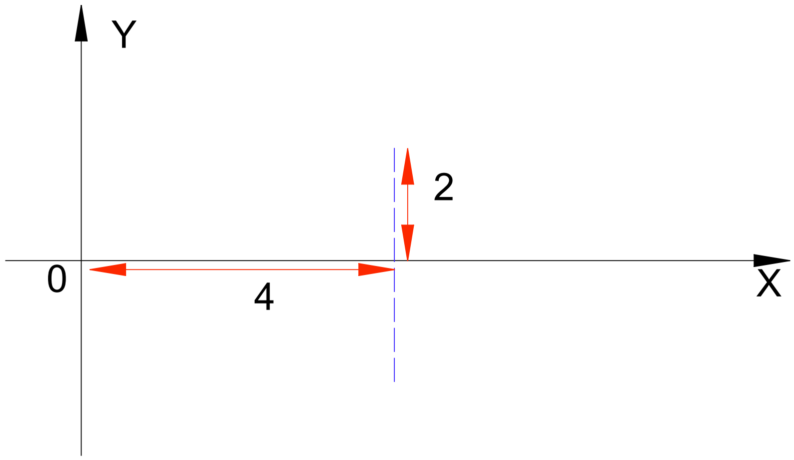
Dividindo-se a equação dada por 24, obtemos:

Essa equação é do tipo com centro na origem e eixo maior sobre o eixo das ordenadas.Lembrando da relação fundamental e substituindo os valores obtemos:

$\sqrt{}$ e como , então:

$\boxed{\sqrt{}}$

3) Determinar a equação reduzida da elipse da figura abaixo:



Resolução:

Como a elipse não esta centrada na origem utilizaremos a equação:

.Na figura observamos que o centro C(4,0), a = 4 e b = 2. Então ficamos com:

, logo:

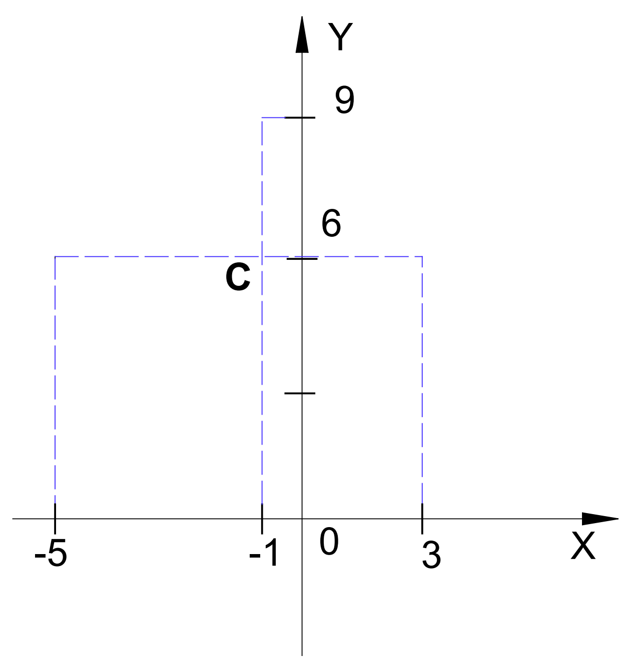
4) Esboçar o gráfico da elipse em cada um dos casos seguintes:

a)

Resolução:

Como o **maior denominador** está na fração de numerador que contém x, concluímos que o **eixo maior** é paralelo ao eixo das abscissas. Temos então:

O gráfico fica:

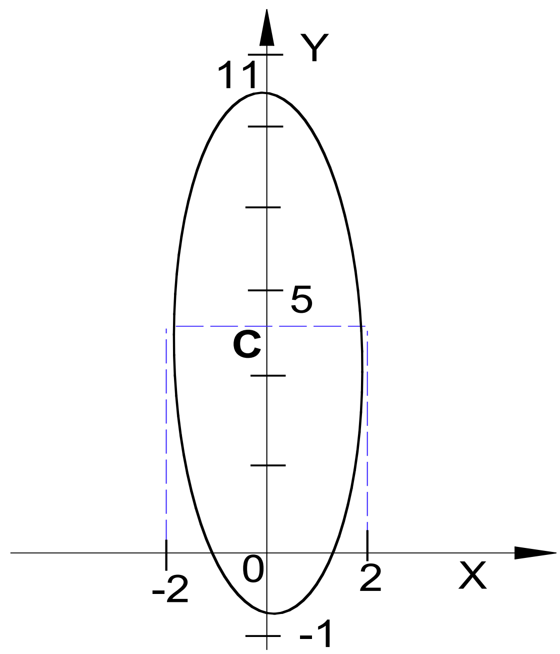


b)

Resolução:

Como o **maior denominador** está na fração de numerador quem contém y, concluímos que o **eixo maior** é paralelo ao eixo das ordenadas. Temos então:

O gráfico fica:

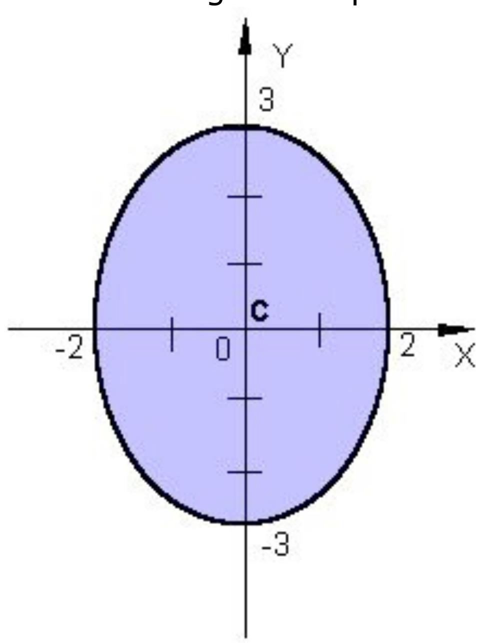


5) Representar no plano cartesiano os pontos que satisfazem a inequação .

Resolução:

Observando a inequação , encontramos .Portanto

, então temos a seguinte representação gráfica para a inequação:



Hipérbole

1) Hipérbole (definição)

2) Propriedades da Elipse

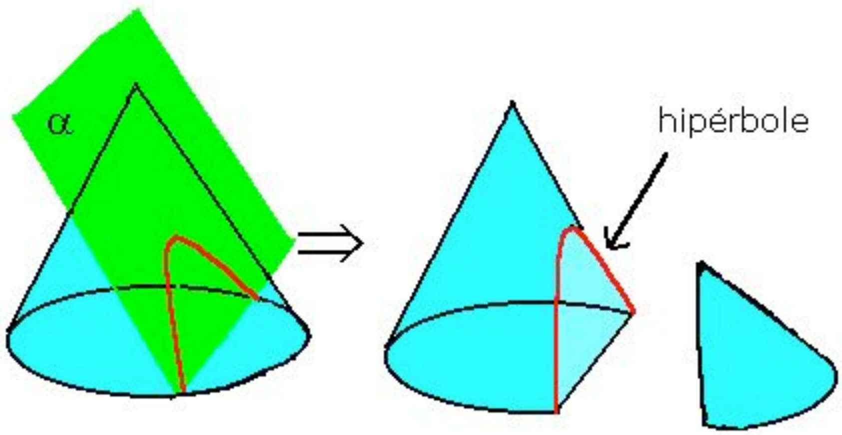
3) Equação reduzida

4) Hipérbole Eqüilátera e Assíntotas

5) Resolução de exercícios

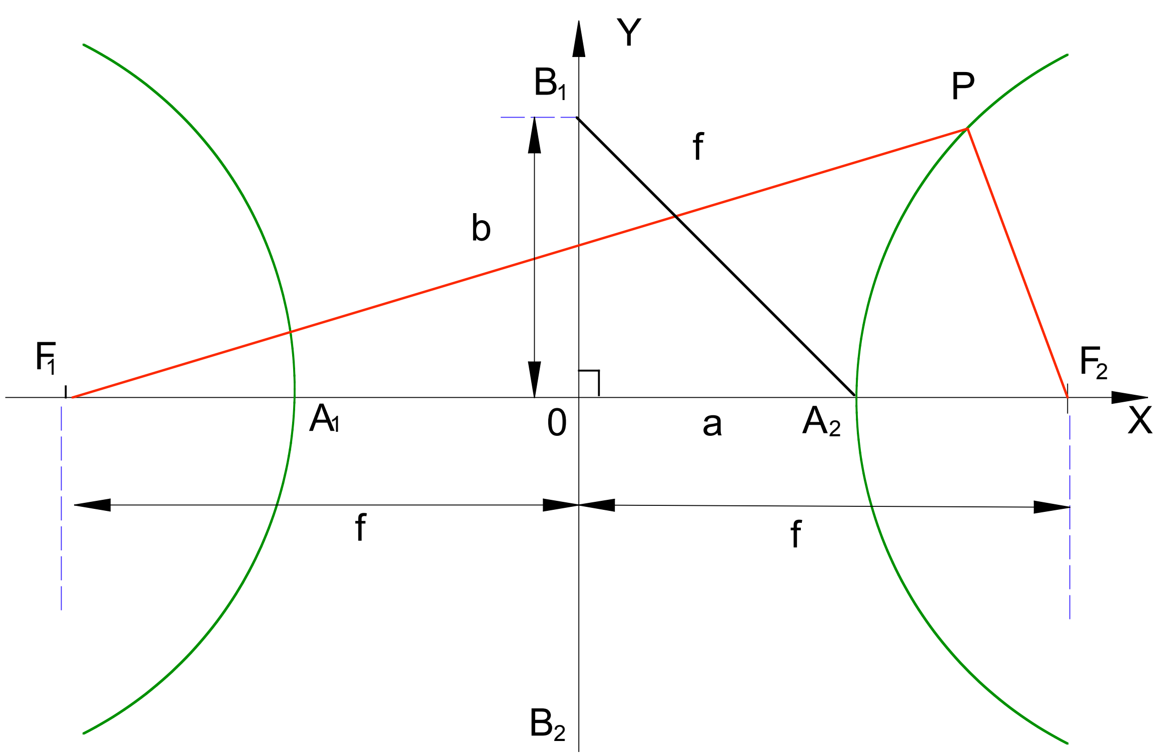
1) Hipérbole – definição.

A intersecção de um plano α com a superfície de um cone pelo vértice, conforme figura, resulta em uma curva denominada ***hipérbole.***



Hipérbole é o conjunto dos pontos **P** de um plano de modo que a diferença em módulo distâncias de é constante e menor que a distância .Assim:

Elementos da h*ipérbole*



Focos são os pontos .

Vértices são os pontos

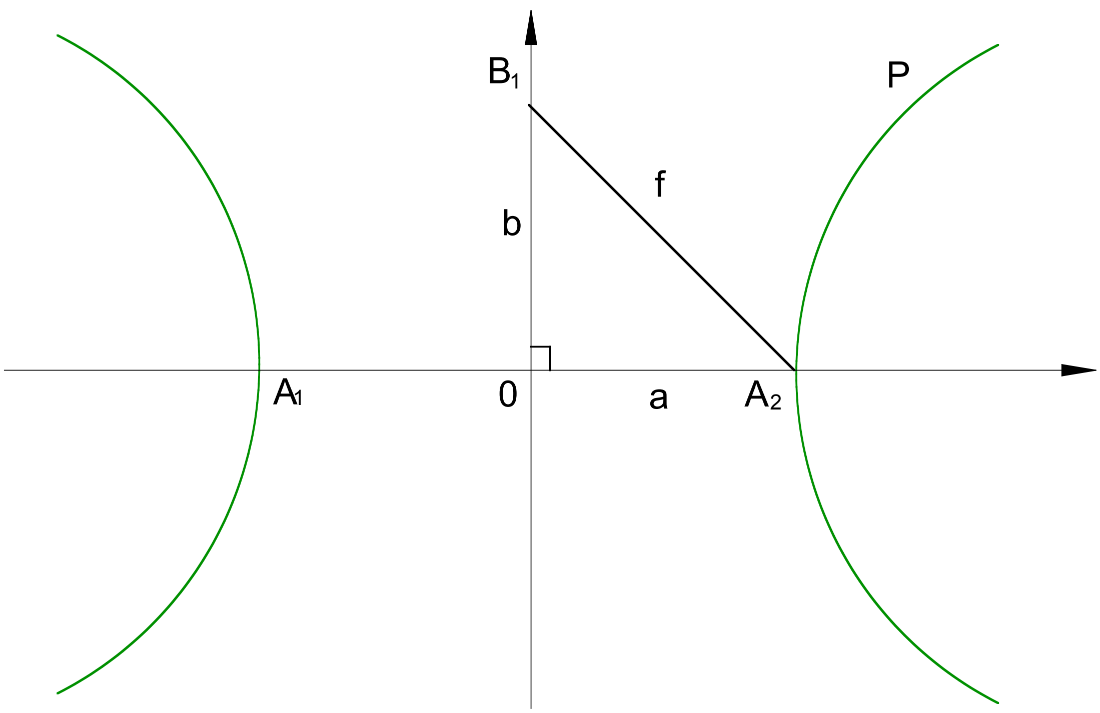
Eixo real é o segmento e mede 2a

Eixo imaginário é o segmento e mede 2b.

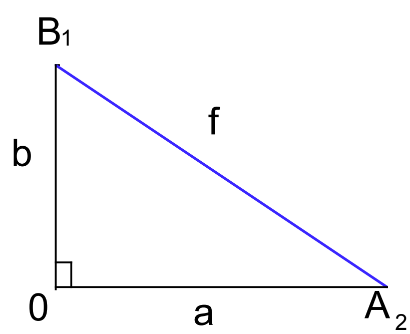
Distância Focal é a distância entre os focos e mede 2f.

Excentricidade é a razão — .

Propriedades da h*ipérbole* – relação fundamental



Se destacarmos o triângulo ,e aplicarmos Pitágoras:



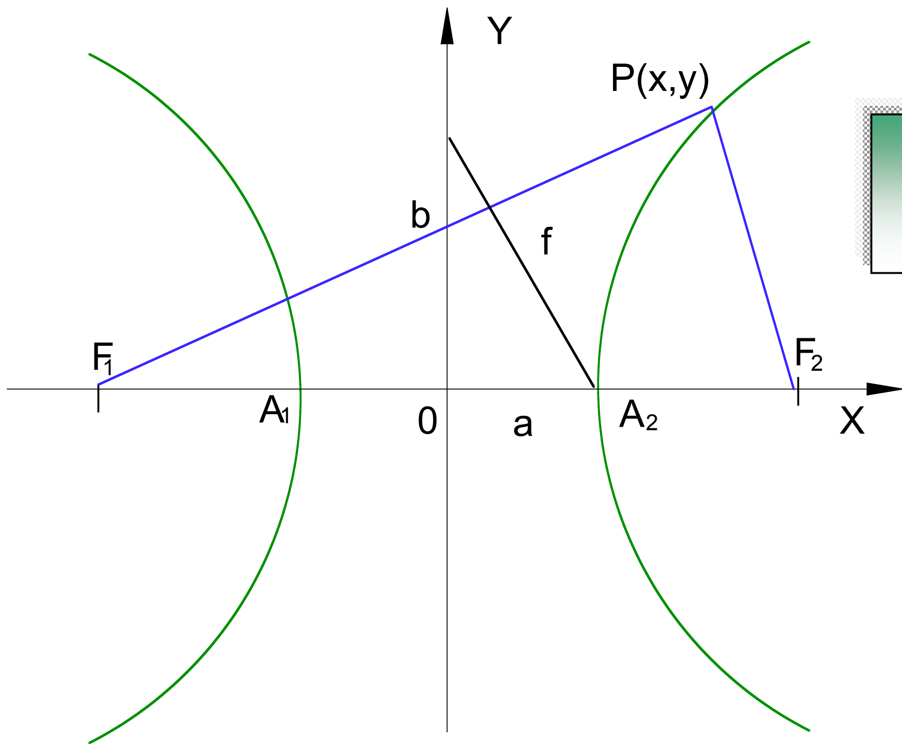
obtemos a relação fundamental.

2) Equação reduzida da **hipérbole.**

Temos que analisar quatro casos de **hipérbole** no plano cartesiano.

1º caso

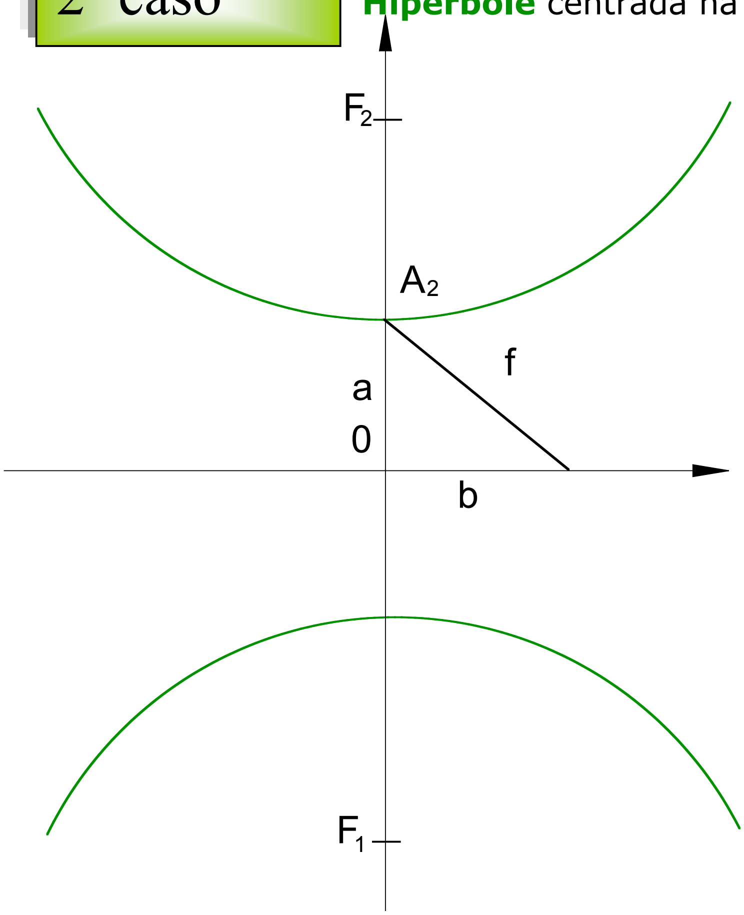
Hipérbole centrada na origem e eixo real sobre o eixo das abscissas.



A equação reduzida fica:

2º caso

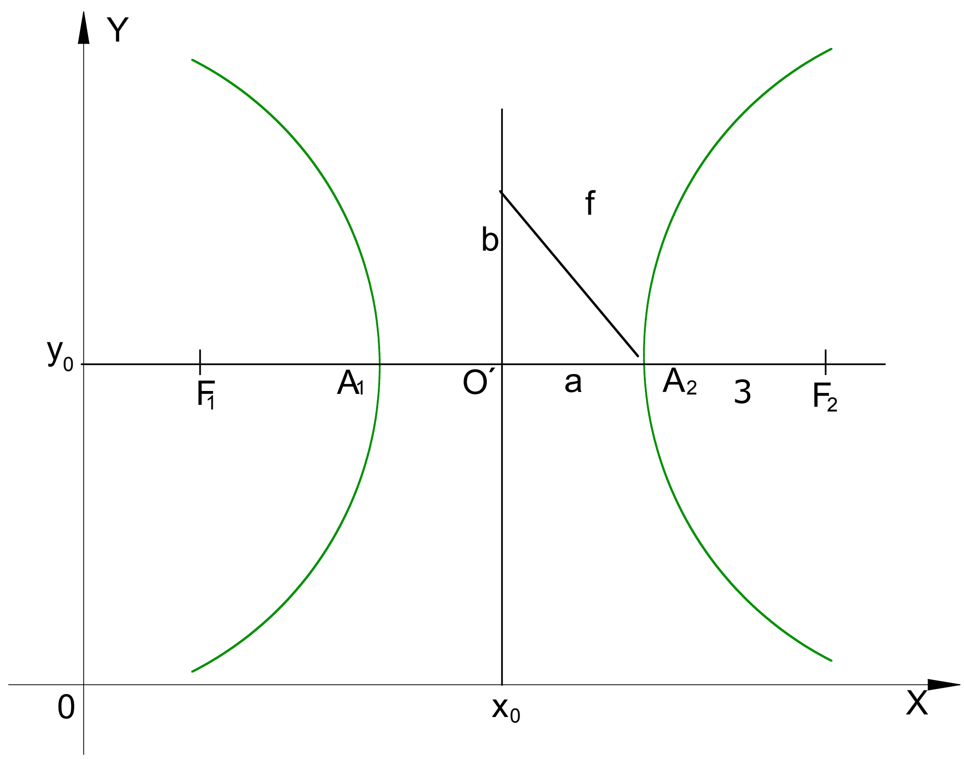
Hipérbole centrada na origem e eixo maior sobre o eixo das ordenadas.



A equação reduzida fica:

3º caso

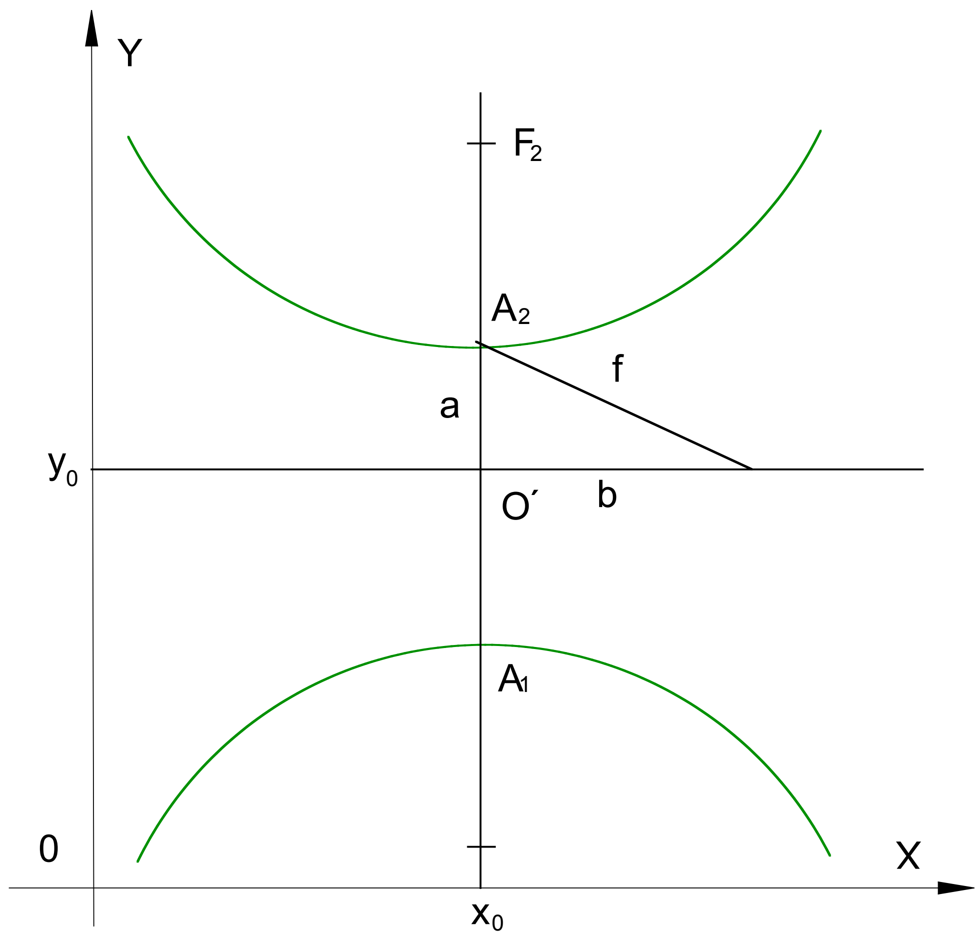
Hipérbole centrada num ponto e com o eixo paralelo ao eixo das abscissas.



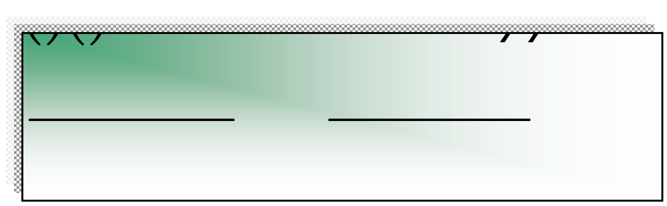
A equação reduzida fica:

4º caso

Hipérbole centrada num ponto e com o eixo paralelo ao eixo das ordenadas.



A equação reduzida fica:

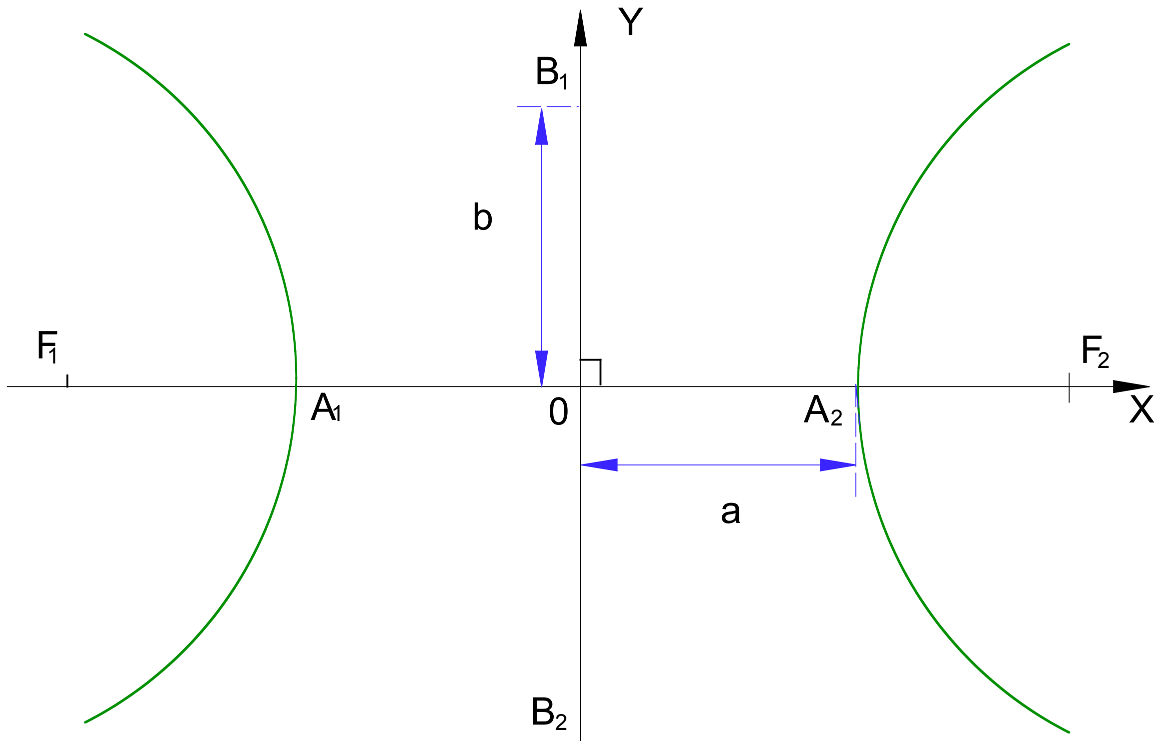


4) Hipérbole Eqüilátera e Assíntotas.

4.1 Hipérbole eqüilátera.

Uma hipérbole é dita eqüilátera se as medidas dos eixos real e imaginário são iguais. Ou seja:

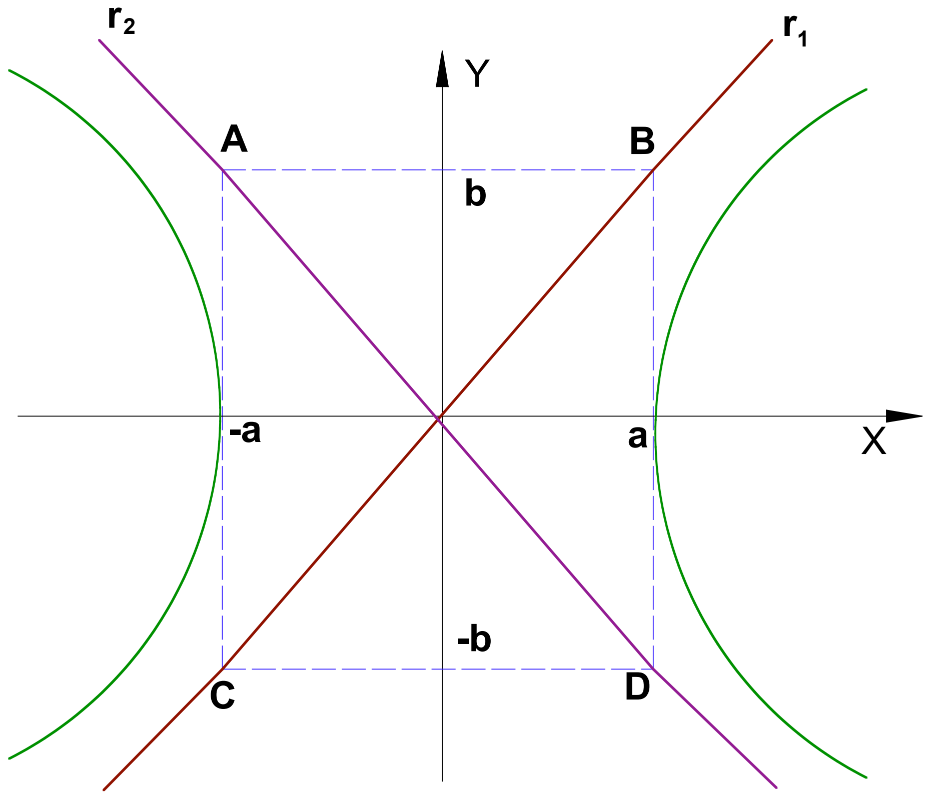
Graficamente teríamos, por exemplo, **hipérbole** com centro na origem e eixo real sobre as abscissas:



$$\boxed{a = b \longrightarrow 2a = 2b}$$

4.2 Assíntotas de uma hipérbole.

Consideremos a hipérbole de equação ,cujo gráfico é:



As retas , que contêm as diagonais do retângulo ABCD são denominadas assíntotas da hipérbole e, e têm as seguintes equações:

Equação da assíntota :

Equação da assíntota :

5) Resolução de exercícios

1. Dada a hipérbole de equação determinar:

    a) a distância focal

Resolução:

Comparando a equação , com a equação reduzida ,

encontramos Lembrando da relação fundamental ,e substituindo os valores obtemos:

$\sqrt{}$, e como , então: $\boxed{\sqrt{}}$

    b) a medida do eixo imaginário

Temos que , e a medida do eixo real é dada por:

    c) a medida do eixo real

Temos que , e a medida do eixo real é dada por:

2. Dada a hipérbole de equação determinar as coordenadas dos focos , dos vértices e das extremidades do eixo imaginário.

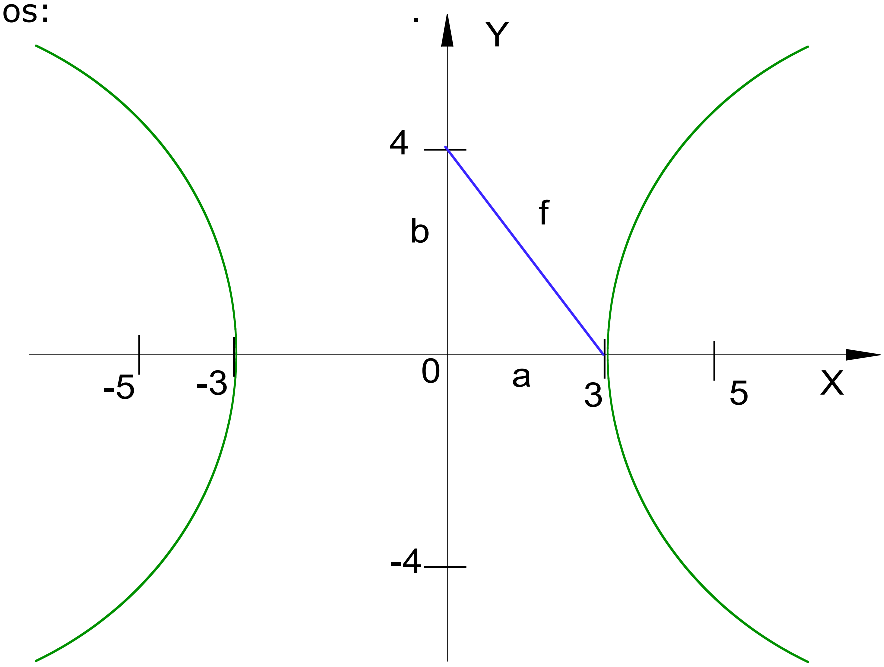
Resolução:

Comparando a equação , com a equação reduzida ,

encontramos Lembrando da relação fundamental ,e substituindo os valores obtemos:

Portanto temos:

que graficamente representam:



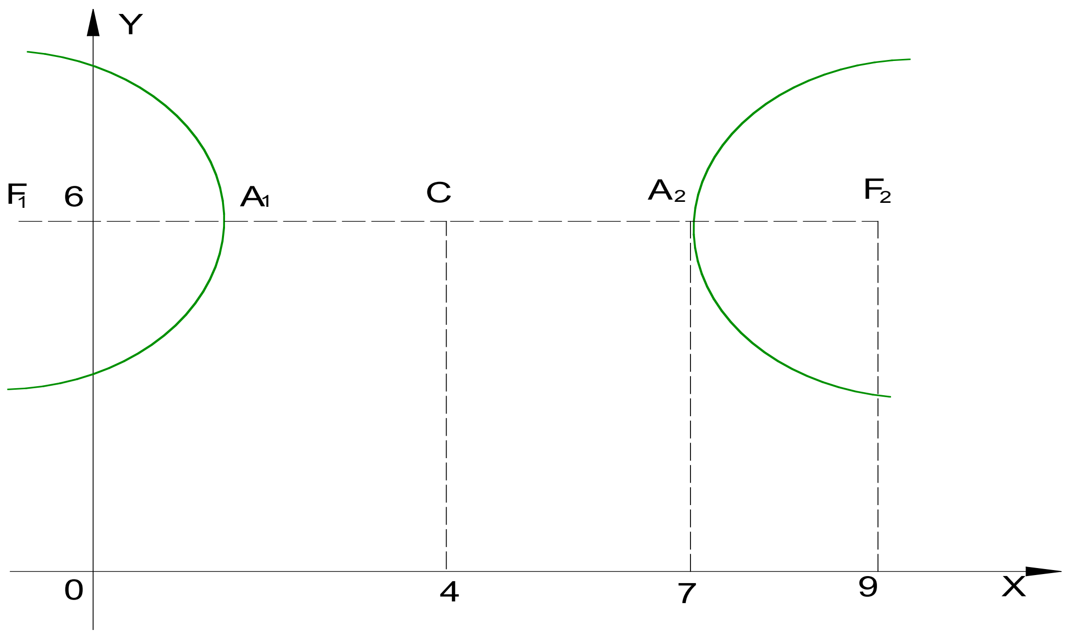
Logo as coordenadas são:

3) Determinar a equação da hipérbole que tem centro no ponto e eixo real paralelo ao eixo das abscissas.São dados a = 2 e b = 1.

Resolução:

A equação é do tipo então teremos:

4) Obter a equação reduzida da hipérbole do gráfico abaixo.



Resolução:

Observando o gráfico obtemos:

Centro tem coordenadas , a medida do semi-eixo real é .A medida da semidistância focal é . A medida do semi-eixo imaginário é obtida utilizando-se a relação fundamental, daí:

Como o eixo real é paralelo ao eixo das abscissas utilizamos a equação:

5) Dada a hipérbole de equação , determinar a equação das assíntotas.

Resolução:

Da equação observamos que

As assíntotas têm equações do tipo:

Logo as equações são:

Parábola

1) Parábola (definição)

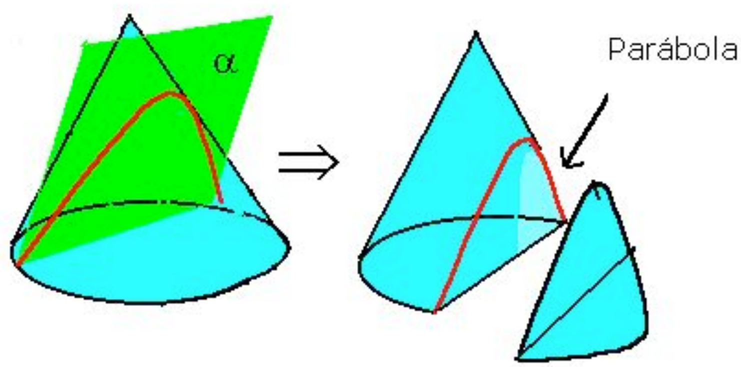
2) Propriedades da Parábola

3) Equação reduzida

4) Resolução de exercícios

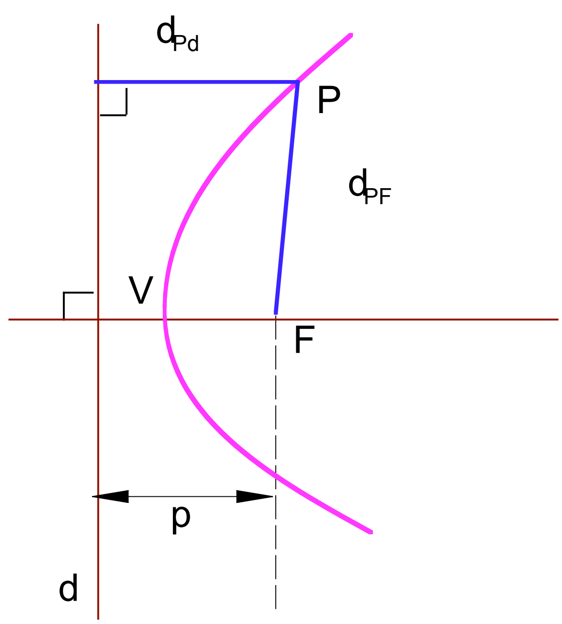
1) Parábola – definição.

A intersecção de um plano α com a superfície de um cone, conforme figura, resulta em uma curva denominada **parábola.**



Parábola é o conjunto dos pontos P de um plano eqüidistantes de uma reta **d** e de um ponto **F** fixo desse plano. Assim:

Elementos da parábola



F é o **foco.**
V é o **Vértice.**
D é a **diretriz** (reta).
P é o **parâmetro** da parábola.

é o eixo de simetria e —.

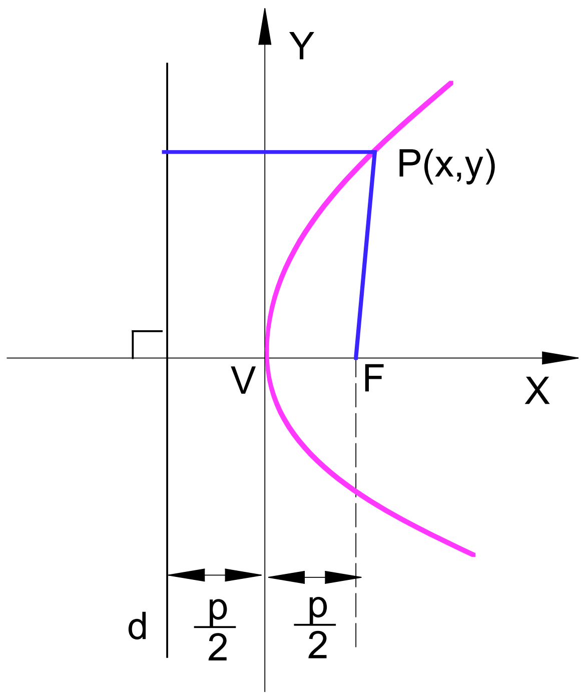
2) Equação reduzida da parábola.

Temos que analisar quatro casos de **parábola** no plano cartesiano.

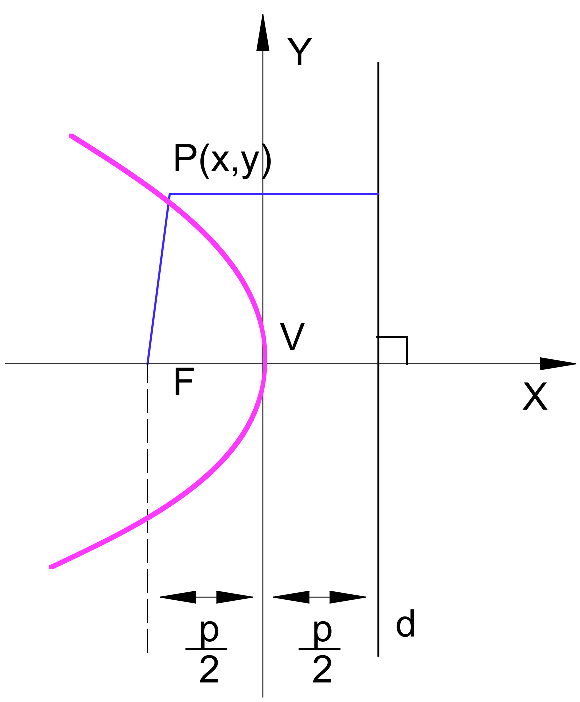
1º caso

Parábola com vértice na origem e foco no eixo das abscissas.

Quando o foco F estiver à direita de V, a equação reduzida fica:

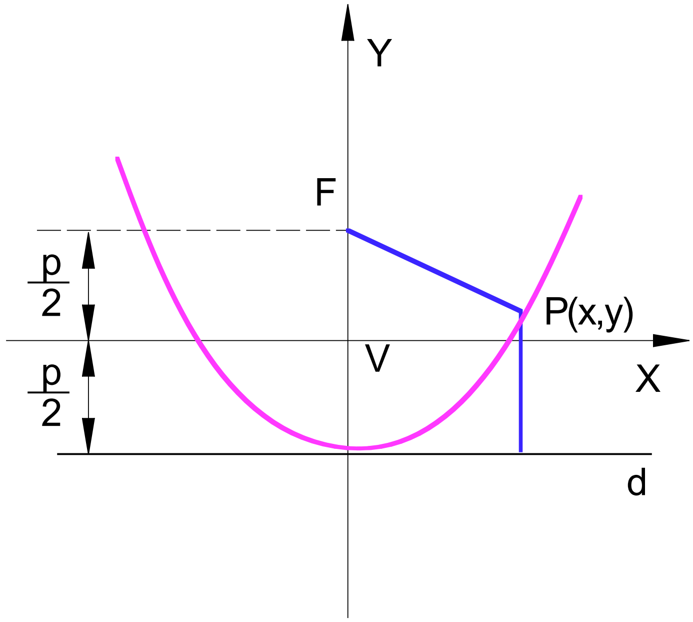


Quando o foco F estiver à esquerda de V, a equação reduzida fica:

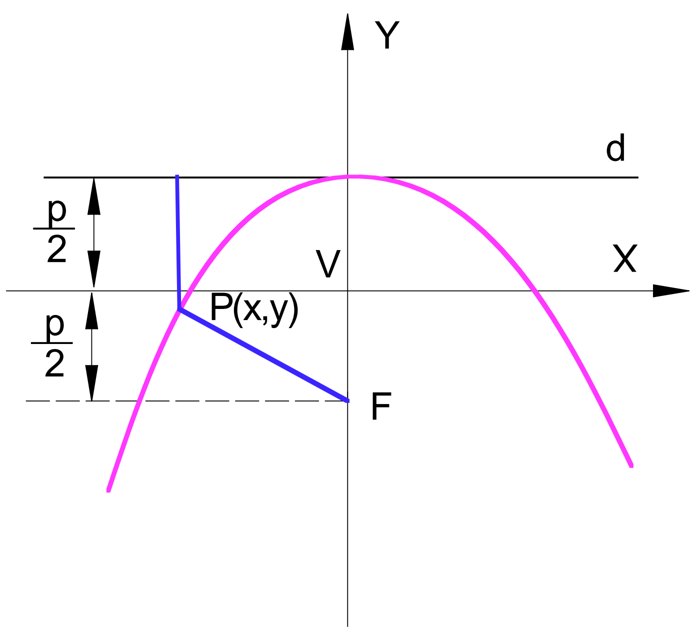


2º caso

Parábola com vértice na origem e foco no eixo das ordenadas.



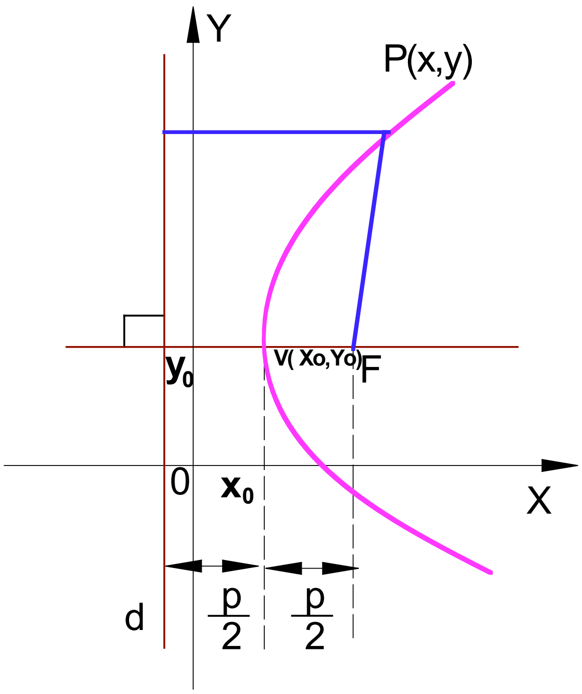
Quando o foco F estiver acima de V, a equação reduzida fica:



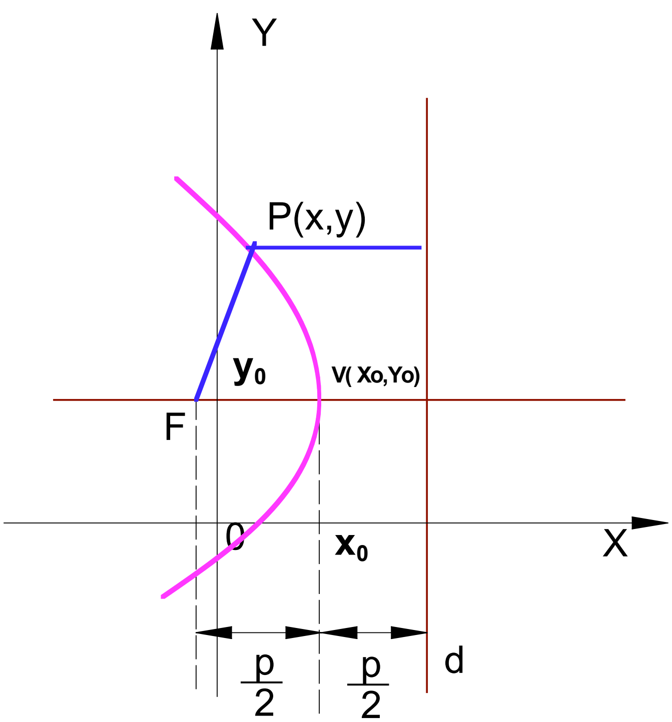
Quando o foco F estiver abaixo de V, a equação reduzida fica:

3º caso

Parábola com vértice no ponto e eixo de simetria paralelo ao eixo das abscissas.



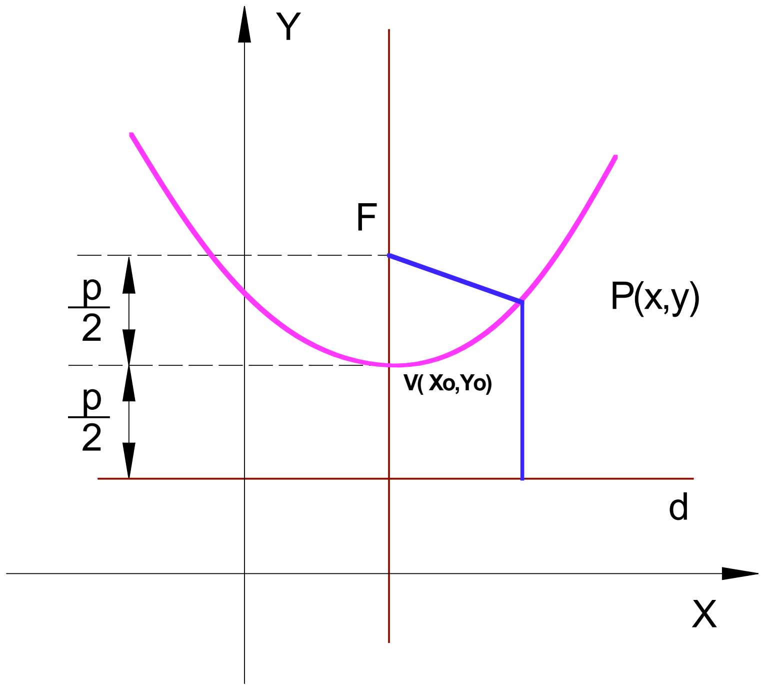
Quando o foco F estiver à direita de V, a equação reduzida fica:



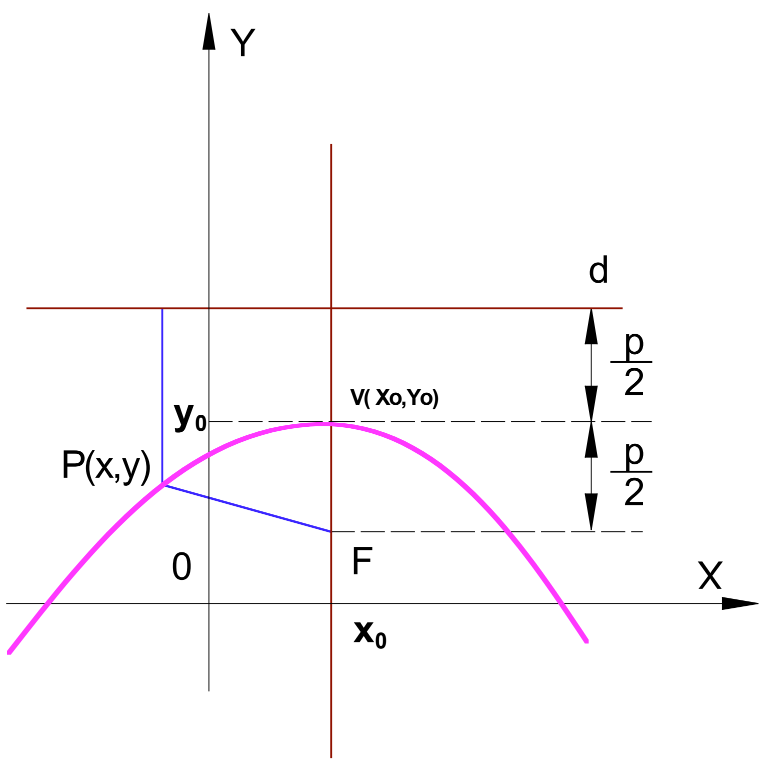
Quando o foco F estiver à esquerda de V, a equação reduzida fica:

4º caso

Parábola com vértice no ponto e eixo de simetria paralelo ao eixo das ordenadas.



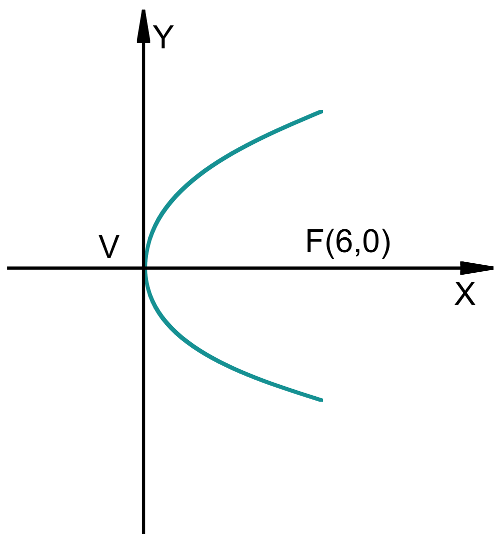
Quando o foco F estiver acima de V, a equação reduzida fica:



Quando o foco F estiver abaixo de V, a equação reduzida fica:

4) Resolução de exercícios

1) Dados os gráficos abaixo determinar suas equações:



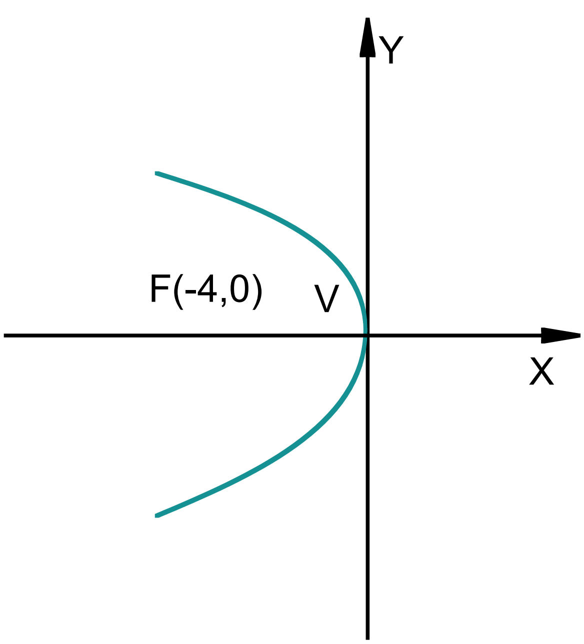
a) ***Resolução:***

Observando o gráfico verificamos que a parábola é do tipo .Vamos calcular o valor de p lembrando que:

Substituindo p =12 na fórmula, fica que:

Logo a equação é

b)



Resolução:

Observando o gráfico verificamos que a parábola é do tipo .Vamos calcular o valor de p, lembrando que:

Substituindo p=8 na fórmula, fica que:

Logo a equação é

2) Dada a equação da parábola determinar:

a) as coordenadas do foco.

Resolução:

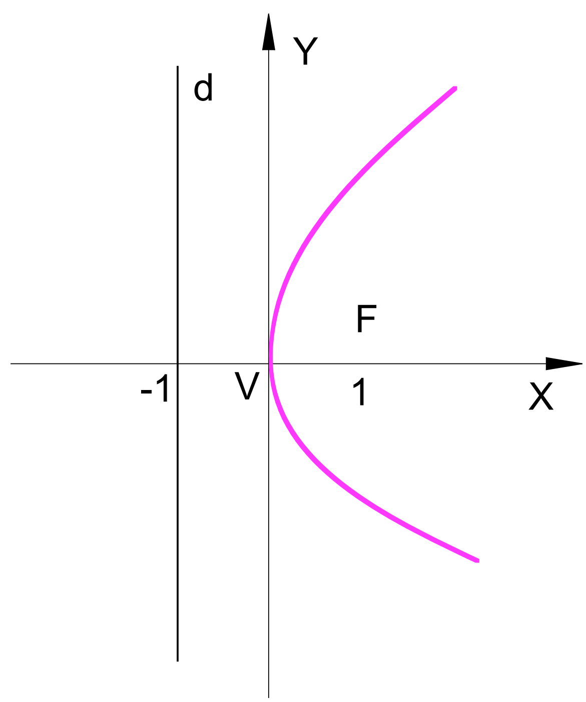
Comparando a equação com a equação do tipo ,
encontramos que .Sabemos que F tem coordenadas : logo
teremos

b) A equação da diretriz.

Resolução:

A equação da diretriz é do tipo , e no nosso caso , , daí:
.Ficamos então com

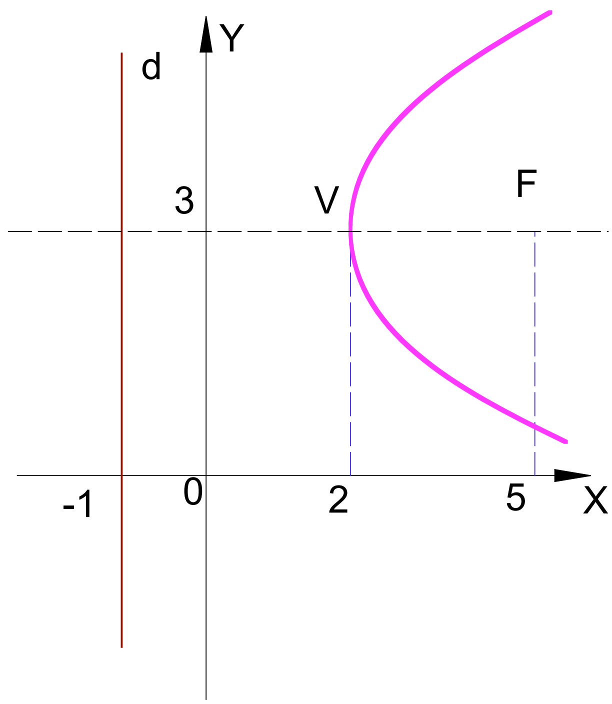
c) O gráfico.



3) Dado que uma parábola tem eixo de simetria paralelo ao eixo das abscissas , que o foco tem coordenadas e o vértice coordenadas , determine a equação da parábola.

Resolução:

Como a parábola tem e concluímos que o foco está à direita vértice e tendo o eixo de simetria paralelo ao eixo , ela tem equação do tipo .Teríamos o seguinte gráfico:



Agora como — e , então ficamos com

— .Assim a substituindo na equação:

portanto a equação fica:

$$\boxed{}$$

4) Esboçar o gráfico da parábola .

Resolução:

Comparando a equação com a equação do tipo , encontramos que .Então o vértice V e o parâmetro p são respectivamente Logo o gráfico fica: