MATEMÁTICA

Aula 37

Análise Combinatória

$\boxed{\text{Fatorial de um Natural}}$

Na matemática, a expressão 4 acompanhado de um ponto de exclamação, representa o produto:

$4! = 4.3.2.1 = 24$ (lê-se 4 fatorial)

$3! = 3.2.1 = 6$

$2! = 2.1 = 2$

$$1! = \frac{2!}{2} = \frac{2}{2} \Rightarrow \boxed{1! = 1}$$

$$0! = \frac{1!}{1} = \frac{1}{1} \Rightarrow \boxed{0! = 1}$$

Podemos então definir que:

Fatorial de um Natural

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n.(n-1)! \quad \forall n \in N^* \end{cases}$$

Exemplos:

$$7! = 7.6! = 7.6.5! = ... = 7.6.5.4.3.2.1$$

$$\frac{7!}{5!} = \frac{7.6.5!}{5!} = 7.6 = \boxed{42}$$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n.(n-1).(n-2)!}{(n-2)!} = \boxed{n.(n-1)}$$

$$\frac{7!-6!}{5!} = \frac{7.6.5!-6.5!}{5!} = 42 - 6 = \boxed{36}$$

Exemplo de aplicação:

Vamos admitir que você resolva sair para uma festa e precisa escolher que roupa usar. Separa duas calças e três camisetas que você considera que são boas para a ocasião.

De quantas maneiras diferentes você pode si vestir? Quantos conjuntos distintos dá para formar?

Cada calça forma três conjuntos, um com cada camiseta.
Como são duas calças, temos duas vezes três, seis conjuntos.

Se você dispõe de dois pares de calçados, o número de maneiras distintas de si arrumar fica ainda multiplicado por 2.

Duas calças, três camisetas, dois pares de calçados: 2x3x2=12, 12 maneiras diferentes de se arrumar.

Existe uma parte da matemática que trata de situações de contagem como essa que acabamos de descrever. É a análise combinatória.

Embora vamos desenvolver nesse curso técnicas de contagem, é comum exercícios de vestibular que não fazem uso de nenhuma técnica, exigindo do aluno contagem de elemento por elemento.

Imagine que você vai efetuar um saque de 100 reais num caixa eletrônico. Se a máquina tiver apenas notas de 5 e 10 reais, de quantas formas ela pode efetuar o pagamento?

	Notas de 10	Notas de 5
1	1	18
2	2	16
3	3	14
.	.	.
.	.	.
.	.	.
10	10	nenhuma
11	nenhuma	20

Em uma situação de contagem, temos casos em que a ordem importa e casos em que a ordem não importa. É fundamental identificar essa característica.

Imagine um sorteio de 2 prêmios diferentes, um carro e uma bicicleta, entre 10 pessoas.
Vamos ao sorteio do carro: quantos possíveis ganhadores? 10

Portanto, temos 90 possíveis duplas de ganhadores.

Prêmios Distintos

$$10 \cdot 9 = 90$$ possíveis duplas de ganhadores

Note que a ordem neste caso importa. Nelson ganhar o carro e Marlene a bicicleta é uma situação diferente de Marlene ganhar o carro e Nelson a bicicleta.

Devemos considerar dois casos, pois a ordem importa.

Agora, e se os prêmios fossem iguais? Dois carros idênticos.

Há diferença entre Nelson ganhar o primeiro e Marlene o segundo prêmio ou, ao contrário, Marlene ganhar o primeiro e Nelson o segundo prêmio?

Não.

Devemos considerar como um único caso, pois a ordem não importa.

Não teremos mais 90 duplas possíveis e sim a metade.

Prêmios Iguais

$$\frac{10.9}{2} = 45$$ possíveis duplas de

Na Análise Combinatória, situações em que a ordem importa são chamadas de Arranjos.

Arranjos – Ordem Importa

$$A_{10,2} = 10.9 = 90$$

Pode-se também calcular o número de Arranjos pela fórmula:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$\boxed{A_{n,n}}$

Arranjos como esses são chamados de Permutações.

São sempre os mesmos elementos, mudando-se apenas a ordem.

A permutação de 5 elementos distintos dá 5!.

A permutação de n elementos distintos dá n!

Permutações

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_n = n!}$$

Exemplo de aplicação:

Quantos anagramas tem a palavra AMOR.

Obs.: Anagrama: palavra também de 5 letras, com sentido ou não, que se obtêm da palavra dada - amor - permutando suas letras.

Resolução:

Opções 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 5! = 120 anagramas