MATEMÁTICA

Aula 38

Análise Combinatória

Em uma situação de contagem, temos casos em que a ordem importa e casos em que a ordem não importa. É fundamental identificar essa característica.
Imagine um sorteio de 2 prêmios diferentes, um carro e uma bicicleta, entre 10 pessoas.
Temos 10 possíveis ganhadores para o primeiro prêmio e 9 para o segundo o segundo prêmio.

Prêmios Distintos

$$10 \cdot 9 = \boxed{90}$$ possíveis duplas de ganhadores

Neste caso a ordem importa.

Agora, e se os prêmios fossem iguais?
Dois carros idênticos, por exemplo.
A ordem não importa.
Não teremos mais 90 possíveis duplas e sim a metade. Desconta-se a permutação dos 2 elementos, 2 fatorial, resultando 90 sobre 2, 45 possíveis duplas de ganhadores.

Prêmios Iguais

$$\frac{10.9}{2!} = \frac{90}{2} = \boxed{45}$$ possíveis duplas de ganhadores

Na Análise Combinatória, situações em que a ordem não importa são chamadas de Combinações.

Vejamos situações que envolvem Combinações:

O setor de emergência de um hospital conta, para plantões noturnos, com 3 pediatras, 4 clínicos gerais e 5 enfermeiros. As equipes de plantão deverão ser constituídas por 1 pediatra, 1 clínico geral e 2 enfermeiros.

a) quantos pares distintos de enfermeiros podem ser formados;

b) quantas equipes de plantão distintas podem ser formadas.

Resolução:

a) 5 enfermeiros.

$$C_{5,2} = \frac{5.4}{2!} = \frac{5.4}{2} = \boxed{10 \text{ duplas}}$$

b) 3 pediatras, 4 clínicos e 5 enfermeiros

Cada equipe: 1 pediatra, 1 clínico geral e 2 enfermeiros.

$$3 \;.\; 4 \;.\; C_{5,2} = 3 \;.\; 4 \;.\; 10 = \boxed{120 \text{ equipes}}$$

As combinações correspondem aos arranjos descontando-se as permutações.

A combinação de n elementos tomados k a k é a relação dos arranjos de n elementos tomados k a k pela permutação desses k elementos. Resulta:

Combinações – A ordem NÃO importa

$$\boxed{C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}}$$

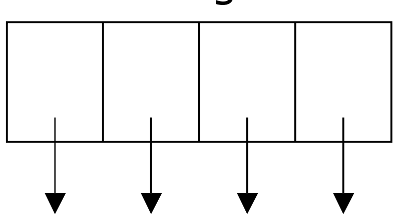
Vamos analisar agora situações de contagem em que há repetição de elementos.

Muda muito pouco do que vimos até aqui.

Veja um arranjo com repetição:

Um número capícua é aquele que não se altera quando lido da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita. 101, 2002 são alguns exemplos. Quantos capícuas de quatro algarismos se pode conseguir com os algarismos significativos?

Algarismos significativos: 1,2,3,4,5,6,7,8,9.



$$9 \,.\, 9 \,.\, 1 \,.\, 1 = \boxed{81 \text{ capícuas}}$$

Vários poetas árcades criavam anagramas permutando as letras de uma palavra dada.

É o caso de Iracema de José de Alencar, um anagrama da palavra América.

Quantos anagramas se pode formar a partir desta palavra?

A M É R I C A

$$P_7^A = \frac{7!}{2!} = 7.6.5.4.3 = \boxed{2520 \text{ anagramas}}$$

Combinações: Razão entre arranjos e permutações.

Combinações

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$$

Definiremos como número binomial de ordem n e classe k, ao número obtido por:

Números Binomiais

$$\begin{cases} \boxed{\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!.(n-k)!}} & \text{para } n > k \\ \dbinom{n}{k} = 0, \quad n < k. & \end{cases}$$

Vejamos alguns binomiais importantes:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!.n!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!.0!} = 1$$

Vamos construir uma tabela de números binomiais conhecida como triângulo de Pascal.

Pascal

$$\binom{0}{0}$$

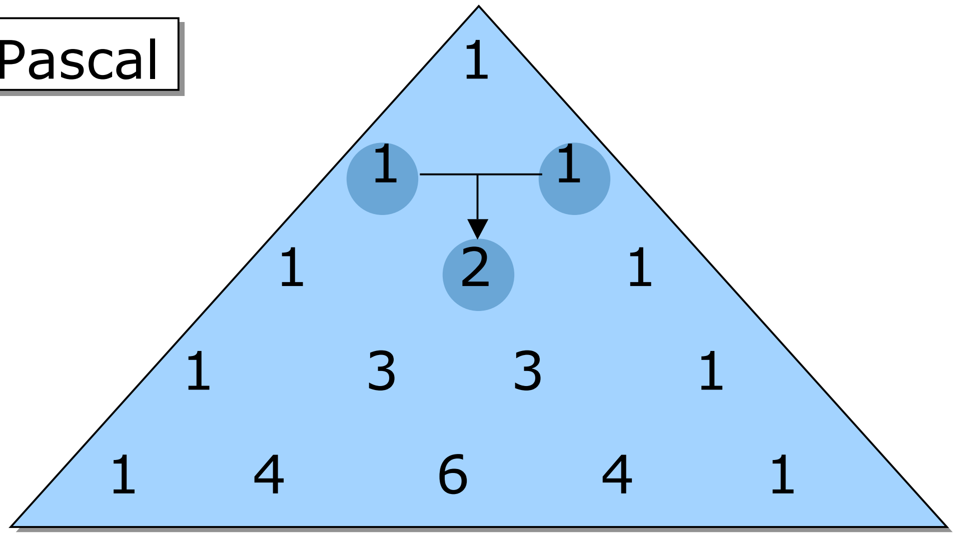
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

Pascal



Binômio de Newton

$(x+y)^0 = 1$

$(x+y)^1 = 1x + 1y$

$(x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$

$(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$

Para obter um termo qualquer do desenvolvimento:

$$(x+y)^n \longrightarrow \boxed{T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k}.y^k}$$

(Fórmula do Termo Geral)

Vamos resolver uma questão de vestibular:

Obter o termo independente de *x* no desenvolvimento de $\left(x^6 + \frac{1}{x^4}\right)^{10}$.

Resolução:

$$\boxed{T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k}.y^k}$$

$$\left(x^6 + \frac{1}{x^4}\right)^{10} \longrightarrow T_{k+1} = \binom{10}{k}(x^6)^{10-k}\left(\frac{1}{x^4}\right)^k$$

$$T_{k+1} = \binom{10}{k} x^{60-6k}.x^{-4k}$$

$$T_{k+1} = \binom{10}{k} x^{60-10k}$$

Termo <u>independente de x</u>: $60 - 10K = 0$

$$60 = 10k$$

$$\boxed{k = 6}$$

$$T_{k+1} = \binom{10}{k} x^{60-10k}$$

$$K = 6 \longrightarrow T_7 = \binom{10}{6} = \frac{10!}{6!.4!} = \boxed{210}$$