

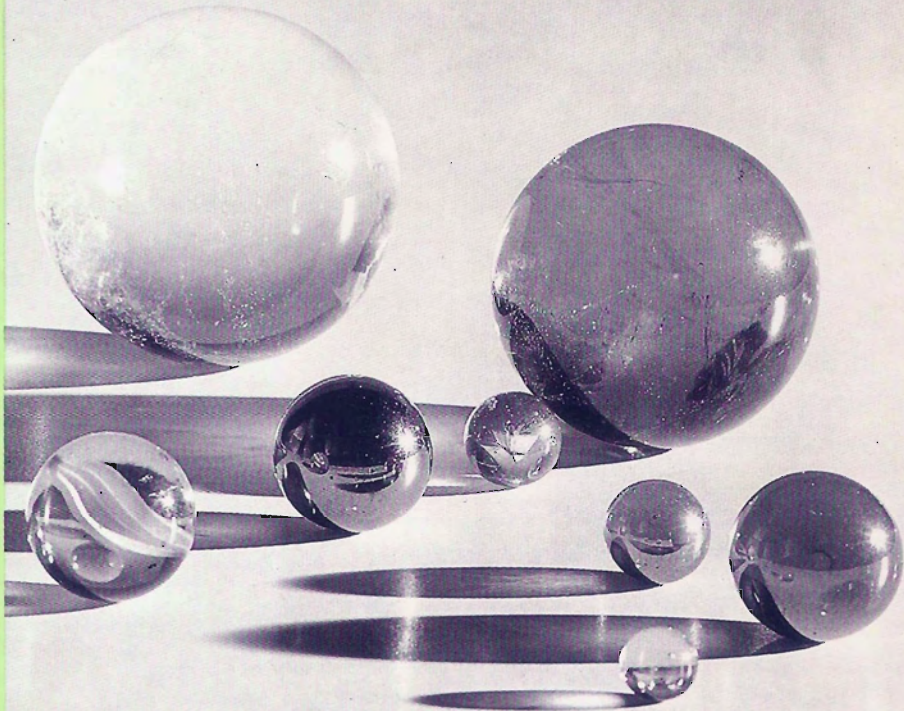
10

Para mais, acesse: <http://fuvestibular.com.br/>

# Fundamentos de Matemática Elementar

---

Oswaldo Dolce  
José Nicolau Pompeo



• geometria espacial  
posição e métrica

Para mais, acesse: <http://fuvestibular.com.br/>



ATUAL  
EDITORIA

**OSVALDO DOLCE**  
**JOSÉ NICOLAU POMPEO**

**FUNDAMENTOS DE**

# **MATEMÁTICA 10**

# **ELEMENTAR**

**GEOMETRIA ESPACIAL**  
**POSIÇÃO E MÉTRICA**

116 exercícios resolvidos  
1128 exercícios propostos com resposta  
273 testes de vestibulares com resposta

5ª edição

6ª reimpressão



**ATUAL**  
**EDITORA**

# Sumário

<b>CAPÍTULO I — INTRODUÇÃO</b> .....	1
I. Conceitos primitivos e postulados .....	1
II. Determinação de plano .....	4
III. Posições das retas .....	8
IV. Interseção de planos .....	11
<b>CAPÍTULO II — PARALELISMO</b> .....	17
I. Paralelismo de retas .....	17
II. Paralelismo entre retas e planos .....	19
III. Posições relativas de uma reta e um plano .....	21
IV. Duas retas reversas .....	23
V. Paralelismo entre planos .....	25
VI. Posições relativas de dois planos .....	27
VII. Três retas reversas duas a duas .....	29
VIII. Ângulo de duas retas — Retas ortogonais .....	31
<b>CAPÍTULO III — PERPENDICULARIDADE</b> .....	35
I. Reta e plano perpendiculares .....	35
II. Planos perpendiculares .....	48
<b>CAPÍTULO IV — APLICAÇÕES</b> .....	52
I. Projeção ortogonal sobre um plano .....	52
II. Segmento perpendicular e segmentos oblíquos a um plano por um ponto .....	56
III. Distâncias geométricas .....	59
IV. Ângulo de uma reta com um plano .....	68
V. Reta de maior declive de um plano em relação a outro ...	69
VI. Lugares geométricos .....	71
Leitura: Tales, Pitágoras e a geometria demonstrativa .....	78

<b>CAPÍTULO V — DIEDROS</b> .....	80
I. Definições .....	80
II. Secções .....	82
III. Diedros congruentes — Bissetor — Medida .....	84
IV. Secções igualmente inclinadas — Congruência de diedros .	93
<b>CAPÍTULO VI — TRIEDROS</b> .....	101
I. Conceitos e elementos .....	101
II. Relações entre as faces .....	102
III. Congruência de triedros .....	106
IV. Triedros polares ou suplementares .....	107
V. Critérios ou casos de congruência entre triedros .....	113
VI. Ângulos poliédricos convexos .....	119
<b>CAPÍTULO VII — POLIEDROS CONVEXOS</b> .....	123
I. Poliedros convexos .....	123
II. Poliedros de Platão .....	130
III. Poliedros regulares .....	132
<b>CAPÍTULO VIII — PRISMA</b> .....	137
I. Prisma ilimitado .....	137
II. Prisma .....	139
III. Paralelepípedos e romboedros .....	143
IV. Diagonal e área do cubo .....	145
V. Diagonal e área do paralelepípedo retângulo .....	146
VI. Razão entre paralelepípedos retângulos .....	151
VII. Volume de um sólido .....	153
VIII. Volume do paralelepípedo retângulo e do cubo .....	153
IX. Área lateral e área total do prisma .....	162
X. Princípio de Cavalieri .....	164
XI. Volume do prisma .....	166
XII. Secções planas do cubo .....	176
XIII. Problemas gerais sobre prismas .....	180
Leitura: Cavalieri e os indivisíveis .....	183
<b>CAPÍTULO IX — PIRÂMIDE</b> .....	185
I. Pirâmide ilimitada .....	185
II. Pirâmide .....	186
III. Volume da pirâmide .....	189
IV. Área lateral e área total da pirâmide .....	194

<b>CAPÍTULO X — CILINDRO</b> .....	215
I. Preliminar: noções intuitivas de geração de superfícies cilíndricas .....	215
II. Cilindro .....	217
III. Áreas lateral e total .....	220
IV. Volume do cilindro .....	220
<b>CAPÍTULO XI — CONE</b> .....	233
I. Preliminar: noções intuitivas de geração de superfícies cônicas .....	233
II. Cone .....	236
III. Áreas lateral e total .....	238
IV. Volume do cone .....	239
<b>CAPÍTULO XII — ESFERA</b> .....	250
I. Definições .....	250
II. Área e volume .....	252
III. Fuso e cunha .....	254
IV. Dedução das fórmulas das áreas do cilindro, do cone e da esfera .....	263
Leitura: Lobachevski' e as geometrias não euclidianas .....	266
<b>CAPÍTULO XIII — SÓLIDOS SEMELHANTES — TRONCOS</b> .....	268
I. Secção de uma pirâmide por um plano paralelo à base ...	268
II. Tronco de pirâmide de bases paralelas .....	277
III. Tronco de cone de bases paralelas .....	284
IV. Problemas gerais sobre sólidos semelhantes e troncos .....	289
V. Tronco de prisma triangular .....	294
VI. Tronco de cilindro .....	296
<b>CAPÍTULO XIV — INSCRIÇÃO E CIRCUNSCRIÇÃO DE SÓLIDOS</b> .....	300
I. Esfera e cubo .....	300
II. Esfera e octaedro regular .....	302
III. Esfera e tetraedro regular .....	304
IV. Inscrição e circunscrição envolvendo poliedros regulares ..	307
V. Prisma e cilindro .....	310
VI. Pirâmide e cone .....	312
VII. Prisma e pirâmide .....	313
VIII. Cilindro e cone .....	316

IX. Cilindro e esfera .....	318
X. Esfera e cone reto .....	321
XI. Esfera, cilindro equilátero e cone equilátero .....	327
XII. Esfera e tronco de cone .....	329
XIII. Exercícios gerais sobre inscrição e circunscrição de sólidos	331
<b>CAPÍTULO XV — SUPERFÍCIES E SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO</b>	<b>333</b>
I. Superfícies de revolução .....	333
II. Sólidos de revolução .....	335
<b>CAPÍTULO XVI — SUPERFÍCIES E SÓLIDOS ESFÉRICOS</b>	<b>348</b>
I. Superfícies — Definições .....	348
II. Áreas das superfícies esféricas .....	349
III. Sólidos esféricos: definições e volumes .....	354
IV. Deduções das fórmulas de volumes dos sólidos esféricos .	364
Leitura: Riemann, o grande filósofo da geometria .....	370
<b>RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS</b> .....	<b>372</b>
<b>TESTES DE VESTIBULARES</b> .....	<b>395</b>
<b>RESPOSTAS DOS TESTES</b> .....	<b>440</b>

## Introdução

### I. Conceitos primitivos e postulados

**1.** As noções (*conceitos, termos, entes*) geométricas são estabelecidas por meio de *definições*. Em particular, as primeiras noções, os *conceitos primitivos* (noções primitivas) da Geometria, são adotadas sem definição.

Adotaremos sem definir os conceitos de:

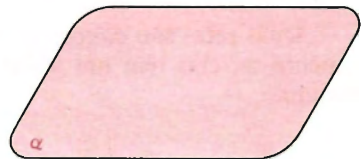
PONTO, RETA e PLANO.



O ponto  $A$ .



A reta  $r$ .



O plano  $\alpha$ .

Do ponto, da reta e do plano temos um conhecimento intuitivo decorrente da experiência e da observação.

O *espaço* é o conjunto de todos os pontos. Nesse conjunto desenvolveremos a Geometria Espacial.

**2.** As *proposições (propriedades)* geométricas são aceitas mediante *demonstrações*. Em particular, as primeiras proposições, as *proposições primitivas* ou *postulados* são aceitos sem demonstração.

Assim, iniciamos a Geometria com alguns *postulados*, relacionando o ponto, a reta e o plano.

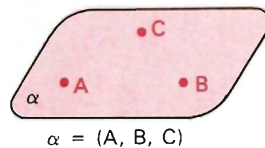
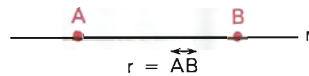
**3. Postulado da existência**

- a) Existe reta e numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.
- b) Existe plano e num plano, bem como fora dele, há infinitos pontos.

**4. Postulado da determinação**

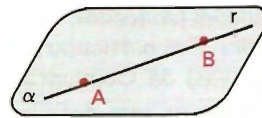
a) Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles.

b) Três pontos *não colineares* determinam um único plano que passa por eles.



**5. Postulado da inclusão**

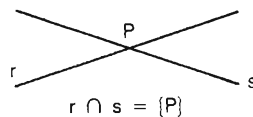
Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então ela está contida no plano.



$$(A \neq B, r = \overleftrightarrow{AB}, A \in \alpha, B \in \alpha) \Rightarrow r \subset \alpha.$$

**6. Retas concorrentes — definição**

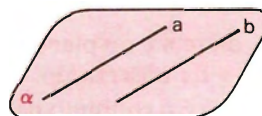
Duas retas são *concorrentes* se, e somente se, elas têm um único ponto comum.



**7. Retas paralelas — definição**

Duas retas são *paralelas* se, e somente se, ou são coincidentes ou são coplanares e não têm ponto comum.

$$\frac{a}{a} = \frac{b}{b} \Rightarrow a = b \Rightarrow a \parallel b$$



$$(a \subset \alpha, b \subset \alpha \text{ e } a \cap b = \emptyset) \Rightarrow a \parallel b$$



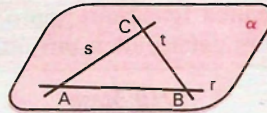
# EXERCÍCIOS

1. Demonstre que num plano existem infinitas retas.

## Solução

Consideremos um plano  $\alpha$  e nele dois pontos distintos  $A$  e  $B$ . Estes pontos determinam uma reta  $r$ , que está contida em  $\alpha$ , pois tem dois pontos distintos em  $\alpha$ . Consideremos em  $\alpha$  e fora de  $r$  um ponto  $C$ . Os pontos  $A$  e  $C$  determinam uma reta  $s$ , que está em  $\alpha$ . Os pontos  $B$  e  $C$  determinam uma reta  $t$  que está em  $\alpha$ .

Desse modo podemos construir em  $\alpha$  “tantas retas quantas quisermos”, isto é, “infinitas” retas.



2. Quantas retas há no espaço? Demonstre.
3. Quantas e quais são as retas determinadas por pares de pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , dois a dois distintos, se:
- a)  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares.      b)  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  não são coplanares.
4. Quantos são os planos determinados por quatro pontos distintos dois a dois?
5. Três retas, duas a duas concorrentes, não passando por um mesmo ponto, estão contidas no mesmo plano.

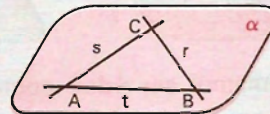
## Solução

Sejam  $r$ ,  $s$  e  $t$  as retas tais que  
 $r \cup s = \{C\}$ ,  $r \cup t = \{B\}$ ,  $s \cup t = \{A\}$   
 e  $A$ ,  $B$  e  $C$  não colineares.

Pelo postulando da determinação existe o plano  $\alpha = (A, B, C)$ .

Pelo postulando da inclusão, temos:  $(A \neq B; A, B \in \alpha) \Rightarrow t \subset \alpha$ .

Analogamente temos:  $A \subset \alpha$  e  $r \subset \alpha$ .



6. É comum encontrarmos mesas com 4 pernas que, mesmo apoiadas em um piso plano, balançam e nos obrigam a colocar um calço em uma das pernas se a quisermos firme. Explique, usando argumentos de geometria, por que isso não acontece com uma mesa de 3 pernas.

## II. Determinação de plano

8. Existem quatro modos de determinar planos.

- 1º modo: por três pontos não colineares.
- 2º modo: por uma reta e um ponto fora dela.
- 3º modo: por duas retas concorrentes.
- 4º modo: por duas retas paralelas distintas.

O primeiro modo é postulado e os demais são os três teoremas que seguem.

### 9. Teorema 1

Se uma reta e um ponto são tais que o ponto não pertence à reta, então eles determinam um único plano que os contém.

*Hipótese*

*Tese*

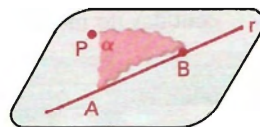
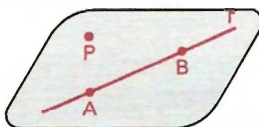
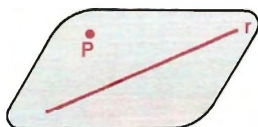
$$(P \notin r) \Rightarrow (\exists \alpha \mid P \in \alpha \text{ e } r \subset \alpha)$$

*Demonstração*

Sendo um problema de existência e unicidade, dividimos a demonstração nestas duas partes.

1ª parte: Existência

a) Construção:



Tomamos em r dois pontos distintos, A e B.

Os pontos A, B e P, não sendo colineares ( $A, B \in r$  e  $P \notin r$ ), determinam um plano  $\alpha$ .

b) Prova de que  $\alpha$  é o plano de r e P.

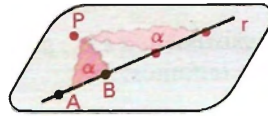
$$\alpha = (A, B, P) \Rightarrow P \in \alpha \quad \left. \begin{array}{l} \alpha = (A, B, P) \\ A \neq B; A, B \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r \subset \alpha$$

Logo, existe pelo menos o plano  $\alpha$  construído por r e P. Indicaremos por  $\alpha = (r, P)$ . (1)

**2ª parte: Unicidade**

Provemos que  $\alpha$  é o único plano determinado por  $r$  e  $P$ .

Se existissem  $\alpha$  e  $\alpha'$  por  $r$  e  $P$ , teríamos:



$$\left. \begin{aligned} (\alpha = (r, P); A, B \in r) &\Rightarrow \alpha = (A, B, P) \\ (\alpha' = (r, P); A, B \in r) &\Rightarrow \alpha' = (A, B, P) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha = \alpha'$$

Logo, não existe mais que um plano  $(r, P)$ . (2)

Conclusão: ((1) e (2))  $\Rightarrow \exists \alpha \mid P \in \alpha$  e  $r \subset \alpha$ .

**10. Teorema 2**

Se duas retas são concorrentes, então elas determinam um único plano que as contém.

*Hipótese*

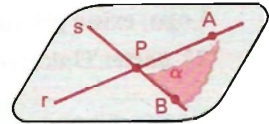
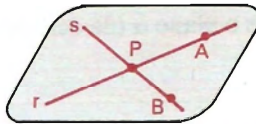
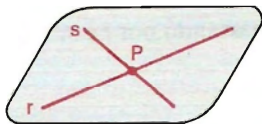
*Tese*

$$(r \cap s = \{P\}) \Rightarrow (\exists \alpha \mid r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha)$$

*Demonstração*

**1ª parte: Existência**

a) Construção:



Tomamos um ponto  $A$  em  $r$  e um ponto  $B$  em  $s$ , ambos distintos de  $P$ . Os pontos  $A, B$  e  $P$ , não sendo colineares ( $A, P \in r$  e  $B \notin r$ ), determinam um plano  $\alpha$ .

b) Prova de que  $\alpha$  é o plano de  $r$  e  $s$ .

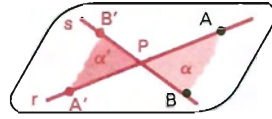
$$(\alpha = (A, B, P); A, P \in r; A \neq P) \Rightarrow r \subset \alpha$$

$$(\alpha = (A, B, P); B, P \in s; B \neq P) \Rightarrow s \subset \alpha$$

Logo, existe pelo menos o plano  $\alpha$  construído, passando por  $r$  e  $s$ . Indicaremos por  $\alpha = (r, s)$ . (1)

**2ª parte: Unicidade**

Se existissem  $\alpha$  e  $\alpha'$ , por  $r$  e  $s$  con-  
correntes, teríamos:



$$\left. \begin{aligned} (\alpha = (r, s); A, P \in r; B \in s) &\Rightarrow \alpha = (A, B, P) \\ (\alpha' = (r, s); A, P \in r; B \in s) &\Rightarrow \alpha' = (A', B', P) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha = \alpha'$$

Logo, não existe mais que um plano  $(r, s)$ . (2)

Conclusão: ((1) e (2))  $\Rightarrow \exists ! \alpha \mid r \subset \alpha$  e  $s \subset \alpha$ .

**11. Teorema 3**

Se duas retas são paralelas entre si e distintas, então elas determinam um único plano que as contém.

*Hipótese*

*Tese*

$$(t \parallel s, r \neq s) \Rightarrow (\exists ! \alpha \mid r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha)$$

*Demonstração*

**1ª parte: Existência**

A existência do plano  $\alpha = (r, s)$  é conseqüência da definição de retas paralelas (ou da existência dessas retas), pois:

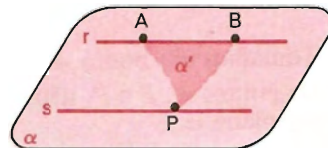
$$(r \parallel s, r \neq s) \Rightarrow (\exists \alpha \mid r \subset \alpha, s \subset \alpha \text{ e } r \cap s = \emptyset).$$

Logo, existe pelo menos o plano  $\alpha$  (da definição), passando por  $r$  e  $s$ . (1)

**2ª parte: Unicidade**

Vamos supor que por  $r$  e  $s$  passam dois planos  $\alpha$  e  $\alpha'$  e provemos que eles coincidem.

Se existissem  $\alpha$  e  $\alpha'$ , por  $r$  e  $s$  paralelas e distintas, tomando-se  $A$  e  $B$  distintos em  $r$  e  $P$  em  $s$ , teríamos:



$$\left. \begin{aligned} (\alpha = (r, s); A, B \in r; P \in s) &\Rightarrow \alpha = (A, B, P) \\ (\alpha' = (r, s); A, B \in r; P \in s) &\Rightarrow \alpha' = (A, B, P) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha = \alpha'$$

Logo, não existe mais que um plano  $(r, s)$ . (2)

Conclusão: ((1) e (2))  $\Rightarrow \exists ! \alpha \mid r \subset \alpha$  e  $s \subset \alpha$ .

# EXERCÍCIOS

7. Quantos são os planos que passam por uma reta?

## Solução

Infinitos.

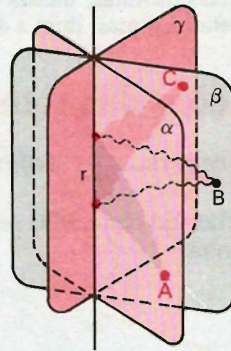
a) Construção:

Seja  $r$  a reta. Tomamos um ponto  $A$  fora de  $r$ . A reta  $r$  e o ponto  $A$  determinam um plano  $\alpha$ . Fora de  $\alpha$ , tomamos um ponto  $B$ . A reta  $r$  e o ponto  $B$  determinam um plano  $\beta$ . Fora de  $\alpha$  e  $\beta$ , tomamos um ponto  $C$ . A reta  $r$  e o ponto  $C$  determinam um plano  $\gamma$ .

Desse modo podemos construir, por  $r$ , tantos planos quantos quisermos, isto é, construímos infinitos planos.

b) Prova:

Todos os planos assim construídos passam por  $r$ , que com os pontos correspondentes os está determinando.



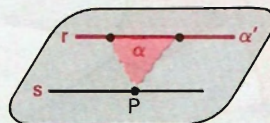
8. Quantos planos passam por dois pontos distintos?

9. Prove que duas retas paralelas distintas e uma concorrente com as duas são coplanares.

10. Se duas retas são paralelas e distintas, todo plano que contém uma delas e um ponto da outra, contém a outra.

## Solução

Sejam  $r$  e  $s$  as duas retas,  $P$  um ponto de  $s$  e  $\alpha$  o plano  $(r, P)$ . As retas  $r$  e  $s$  determinam um plano  $\alpha'$ . Temos, então:



$(\alpha' = (r, s), P \in s) \Rightarrow \alpha' = (r, P) \Rightarrow \alpha' = \alpha$ .  
Se  $\alpha = \alpha'$  contém  $s$ , então o plano  $\alpha$  contém a reta  $s$ .

11. Num plano  $\alpha$  há uma reta  $r$  e um ponto  $P$  não pertencente a  $r$ . Prove que: se conduzimos por  $P$  uma reta  $s$ , paralela a  $r$ , então  $s$  está contida em  $\alpha$ .
12. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):
- Três pontos distintos determinam um plano.
  - Um ponto e uma reta determinam um único plano.
  - Duas retas distintas paralelas e uma concorrente com as duas determinam dois planos distintos.
  - Três retas distintas, duas a duas paralelas, determinam um ou três planos.
  - Três retas distintas, duas a duas concorrentes, determinam um ou três planos.

### III. Posições das retas

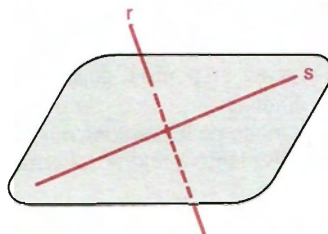
#### 12. Retas reversas — definição

Duas retas são chamadas retas *reversas* se, e somente se, não existe plano que as contenha.



$a$  e  $b$  reversas

não existe plano  $(a, b)$  e  
 $a \cap b = \emptyset$

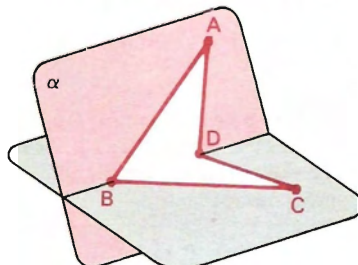
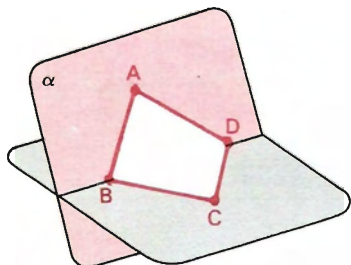


$r$  reversa com  $s$

não existe plano  $(r, s)$  e  
 $r \cap s = \emptyset$

#### 13. Quadrilátero reverso — definição

Um quadrilátero é chamado *quadrilátero reverso* se, e somente se, não existe plano contendo seus quatro vértices.



Se  $\alpha = (A, B, D)$  e  $C \notin \alpha$ , então  $ABCD$  é quadrilátero reverso.

## 14. Observação

Chamamos *figura* a todo conjunto de pontos. Uma *figura é plana* quando seus pontos pertencem a um mesmo plano, e os pontos são ditos *coplanares*; caso contrário, a figura é chamada *figura reversa* e os pontos, *não coplanares*.

## 15. Posições relativas de duas retas

Em vista de definições anteriores, dadas duas retas distintas  $r$  e  $s$ , ou elas são *concorrentes*, ou *paralelas* ou *reversas*. Essas posições podem ser sintetizadas da seguinte forma:

$$\begin{array}{l}
 r \text{ e } s \\
 \text{distintas}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 r \text{ e } s \\
 \text{coplanares} \\
 \text{ou} \\
 r \text{ e } s \text{ reversas}
 \end{array} \right.
 \left\{ \begin{array}{l}
 r \text{ e } s \text{ têm ponto comum} \rightarrow r \text{ e } s \text{ concorrentes} \\
 \text{ou} \\
 r \text{ e } s \text{ não têm ponto comum} \rightarrow r \text{ e } s \text{ paralelas}
 \end{array} \right.$$
  

$$\begin{array}{l}
 r \text{ e } s \\
 \text{distintas}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 r \text{ e } s \text{ têm ponto comum} \rightarrow r \text{ e } s \text{ são concorrentes} \\
 \text{ou} \\
 r \text{ e } s \text{ não} \\
 \text{têm ponto comum}
 \end{array} \right.
 \left\{ \begin{array}{l}
 r \text{ e } s \text{ coplanares} \rightarrow r \text{ e } s \text{ são paralelas} \\
 \text{ou} \\
 r \text{ e } s \text{ não coplanares} \rightarrow r \text{ e } s \text{ são reversas}
 \end{array} \right.$$

Se as retas  $r$  e  $s$  são *coincidentes* (ou iguais), elas são *paralelas*.

# EXERCÍCIOS

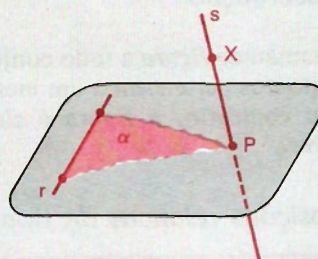
13. Prove a existência de retas reversas.

### Solução

a) Construção:

Consideremos uma reta  $r$  e um ponto  $P$  fora de  $r$ . A reta  $r$  e o ponto  $P$  determinam um plano  $\alpha = (r, P)$ .

Tomemos fora de  $\alpha$  um ponto  $X$ .  
Os pontos distintos  $P$  e  $X$  determinam uma reta  $s = \overleftrightarrow{PX}$ .



b) Prova de que  $r$  e  $s$  são reversas:

Se existe um plano  $\beta = (r, s)$ , temos:

$$(r \subset \beta \text{ e } P \in \beta) \Rightarrow \beta = (r, P) \Rightarrow \beta = \alpha$$

$$(\beta = \alpha, s \subset \beta, X \in s) \Rightarrow X \in \alpha \text{ (o que é absurdo, pois tomamos } X \notin \alpha).$$

Logo, não existe um plano contendo  $r$  e  $s$ .

Assim, obtivemos duas retas  $r$  e  $s$ , reversas.

14. Prove que um quadrilátero reverso não é paralelogramo.
15. As diagonais de um quadrilátero reverso são reversas.
16. Duas retas distintas  $r$  e  $s$ , reversas a uma terceira reta  $t$ , são reversas entre si?
17. Duas retas reversas e uma concorrente com as duas determinam dois planos distintos.

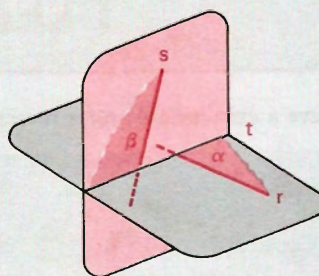
### Solução

Sejam  $r$  e  $s$  duas retas reversas e  $t$  uma reta concorrente com  $r$  e concorrente com  $s$ .

As retas concorrentes  $r$  e  $s$  determinam um plano  $\alpha$ .

As retas concorrentes  $s$  e  $t$  determinam um plano  $\beta$ .

Os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são distintos pois, se  $\alpha = \beta$ , as retas  $r$  (de  $\alpha$ ) e  $s$  (de  $\beta$ ) estariam neste plano  $\alpha = \beta$ , o que é absurdo, pois contraria a hipótese de serem reversas.





18. Classifique em verdadeiro (*V*) ou falso (*F*):

- Duas retas ou são coincidentes ou são distintas.
- Duas retas ou são coplanares ou são reversas.
- Duas retas distintas determinam um plano.
- Duas retas concorrentes têm um ponto comum.
- Duas retas concorrentes têm um único ponto comum.
- Duas retas que têm um ponto comum são concorrentes.
- Duas retas concorrentes são coplanares.
- Duas retas coplanares são concorrentes.
- Duas retas distintas não paralelas são reversas.
- Duas retas que não têm ponto comum são paralelas.
- Duas retas que não têm ponto comum são reversas.
- Duas retas coplanares ou são paralelas ou são concorrentes.
- Duas retas não coplanares são reversas.

Classifique em verdadeiro (*V*) ou falso (*F*):

- $r \cap s = \emptyset \implies r$  e  $s$  são reversas.
- $r$  e  $s$  são reversas  $\implies r \cap s = \emptyset$ .
- $r \cap s = \emptyset \implies r$  e  $s$  são paralelas.
- $r \parallel s, r \neq s \implies r \cap s = \emptyset$ .
- A condição  $r \cap s = \emptyset$  é necessária para que  $r$  e  $s$  sejam reversas.
- A condição  $r \cap s = \emptyset$  é suficiente para que  $r$  e  $s$  sejam reversas.
- A condição  $r \cap s = \emptyset$  é necessária para que duas retas distintas  $r$  e  $s$  sejam paralelas.
- A condição  $r \cap s = \emptyset$  é suficiente para que duas retas  $r$  e  $s$  sejam paralelas.

## IV. Interseção de planos

### 16. Postulado da interseção

Se dois planos distintos têm um ponto comum, então eles têm pelo menos um outro ponto comum.

$$(\alpha \neq \beta, P \in \alpha \text{ e } P \in \beta \implies (\exists Q \mid Q \neq P, Q \in \alpha \text{ e } Q \in \beta))$$

### 17. Teorema da interseção

Se dois planos distintos têm um ponto comum, então a interseção desses planos é uma única reta que passa por aquele ponto.

*Hipótese*

*Tese*

$$(\alpha \neq \beta, P \in \alpha, P \in \beta) \implies (\exists ! i \mid \alpha \cap \beta = i \text{ e } P \in i)$$

*Demonstração***1ª parte:** Existência

$$(\alpha \neq \beta, P \in \alpha, P \in \beta) \Rightarrow (\exists Q \neq P, Q \in \alpha \text{ e } Q \in \beta)$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \neq \beta, P \in \alpha, P \in \beta \\ Q \neq P, Q \in \alpha, Q \in \beta \end{array} \right\} \Rightarrow (\exists i \mid i = \overleftrightarrow{PQ}, i \subset \alpha \text{ e } i \subset \beta)$$

A reta  $i$  determinada pelos pontos  $P$  e  $Q$  é comum aos planos  $\alpha$  e  $\beta$ .

**2ª parte:** Unicidade

Da 1ª parte concluímos que todos os pontos de  $i$  estão em  $\alpha$  e em  $\beta$ . Para provarmos que  $i$  é a interseção de  $\alpha$  e  $\beta$ , basta provarmos que todos os pontos que estão em  $\alpha$  e em  $\beta$  estão em  $i$ . É o que segue:

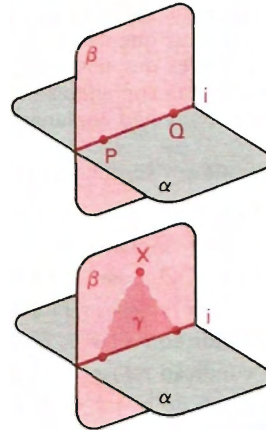
Se existe um ponto  $X$  tal que  $X \in \alpha, X \in \beta$  e  $X \notin i$ , temos:

$$X \notin i \Rightarrow \exists \gamma \mid \gamma = (i, X)$$

$$\left. \begin{array}{l} (i \subset \alpha, X \in \alpha, \gamma = (i, X)) \Rightarrow \gamma = \alpha \\ (i \subset \beta, X \in \beta, \gamma = (i, X)) \Rightarrow \gamma = \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \beta$$

Os planos  $\alpha$  e  $\beta$  coincidem com o plano  $\gamma = (i, X)$ , o que é absurdo, pois contraria a hipótese de que  $\alpha \neq \beta$ .

Logo,  $i$  é a interseção de  $\alpha$  e  $\beta$ .

**18. Planos secantes — definição**

Dois planos distintos que se interceptam (ou se cortam) são chamados *planos secantes* (ou *concorrentes*). A reta comum é a *interseção* desses planos ou o *traço* de um deles no outro.

**19. Observações**

1ª) Para se obter a interseção de dois planos distintos, basta obter dois pontos distintos comuns a esses planos.

2ª) Para se provar que três ou mais pontos do espaço são colineares, basta provar que eles pertencem a dois planos distintos.

# EXERCÍCIOS

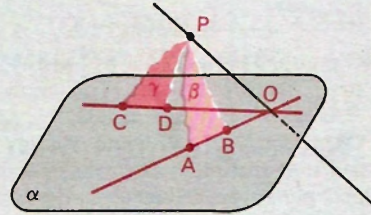
- 20.** Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):
- Se dois planos distintos têm um ponto comum, então eles têm uma reta comum que passa pelo ponto.
  - Dois planos distintos que têm uma reta comum, são secantes.
  - Se dois planos têm uma reta comum, eles são secantes.
  - Se dois planos têm uma única reta comum, eles são secantes.
  - Dois planos secantes têm interseção vazia.
  - Dois planos secantes têm infinitos pontos comuns.
  - Dois planos secantes têm infinitos pontos comuns.
  - Se dois planos têm um ponto comum, eles têm uma reta comum.
- 21.** Num plano  $\alpha$  há duas retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{CD}$  concorrentes num ponto  $O$ . Fora de  $\alpha$  há um ponto  $P$ . Qual é a interseção dos planos  $\beta = (P, A, B)$  e  $\gamma = (P, C, D)$ ?

### Solução

Os planos  $\beta$  e  $\gamma$  são distintos e  $P$  pertence a ambos.

$$\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{O\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} O \in \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow O \in \beta \\ O \in \overleftrightarrow{CD} \Rightarrow O \in \gamma \end{cases}$$



Logo,  $\beta \cap \gamma = \overleftrightarrow{OP}$ .

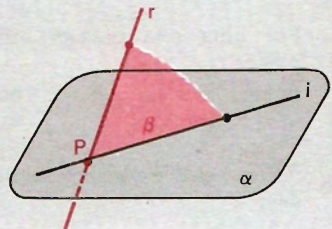
- 22.** Num plano  $\alpha$  há dois segmentos de reta  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , contidos em retas não paralelas e, fora de  $\alpha$ , há um ponto  $P$ . Qual é a interseção dos planos  $\beta = (P, A, B)$  e  $\gamma = (P, C, D)$ ?
- 23.** Um ponto  $P$  é o traço de uma reta  $r$  num plano  $\alpha$ . Se  $\beta$  é um plano qualquer que passa por  $r$ , o que ocorre com a interseção  $\alpha \cap \beta = i$ ?

### Solução

$$(P \in r, r \subset \beta) \Rightarrow P \in \beta$$

$$(\alpha \neq \beta, P \in \alpha, P \in \beta) \Rightarrow P \in i$$

Logo, a interseção de  $\beta$  com  $\alpha$  passa por  $P$ .



24. Duas retas  $r$  e  $s$  são reversas. Em  $r$  há um ponto  $R$  e em  $s$  há um ponto  $S$ . Qual é a interseção dos planos  $\alpha = (r, S)$  e  $\beta = (s, R)$ ?
25. Qual é a interseção de duas circunferências de raios congruentes, centros comuns e situadas em planos distintos?
26. As retas que contêm os lados de um triângulo  $ABC$  furam um plano  $\alpha$  nos pontos  $O, P$  e  $R$ . Prove que  $O, P$  e  $R$  são colineares.
27. Os triângulos não coplanares  $ABC$  e  $A'B'C'$  são tais que as retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{A'B'}$  são concorrentes em  $O$ ;  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{A'C'}$  são concorrentes em  $P$ ;  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{B'C'}$  são concorrentes em  $R$ . Prove que  $O, P$  e  $R$  são colineares.

**Solução**

Seja  $\alpha = (A, B, C)$  e  $\alpha' = (A', B', C')$ , temos:

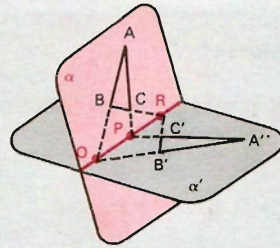
$$\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{O\} \Rightarrow O \in \overleftrightarrow{AB} \text{ e } O \in \overleftrightarrow{A'B'}$$

$$(O \in \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AB} \subset \alpha) \Rightarrow O \in \alpha$$

$$(O \in \overleftrightarrow{A'B'}, \overleftrightarrow{A'B'} \subset \alpha') \Rightarrow O \in \alpha'$$

O ponto  $O$  pertence a  $\alpha$  e  $\alpha'$  distintos. Analogamente,  $P \in \alpha$  e  $P \in \alpha'$ ,  $R \in \alpha$  e  $R \in \alpha'$ .

Os pontos  $O, P$  e  $R$ , sendo comuns a  $\alpha$  e  $\alpha'$  distintos, são colineares, pois pertencem à interseção desses planos, que é uma *única* reta.



**28. Teorema dos três planos secantes**

Se três planos  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  são distintos e dois a dois secantes, segundo três retas  $a, b, c$  ( $\beta \cap \gamma = a, \alpha \cap \gamma = b, \alpha \cap \beta = c$ ), estude essas três retas.

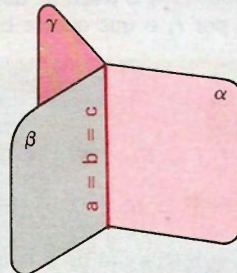
**Solução**

1º caso:

Por uma reta passam infinitos planos.

Então, por  $a = b = c$  passam  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ .

As retas  $a, b$  e  $c$  podem ser coincidentes.



2.º caso:

Supondo que as retas  $a$ ,  $b$  e  $c$  são duas a duas distintas ( $a \neq b$ ,  $a \neq c$ ,  $b \neq c$ ), para estudarmos as três, começaremos por duas delas:  $a$  e  $b$ . Essas duas retas ( $a$  e  $b$ ) são distintas e coplanares ( $a \subset \gamma$  e  $b \subset \gamma$ ) pela hipótese. Então, ou  $a$  e  $b$  são concorrentes, ou  $a$  e  $b$  são paralelas.

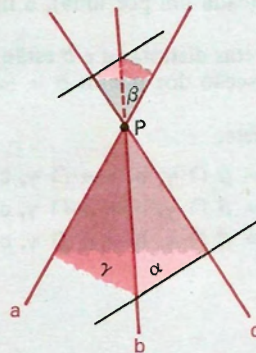
1.º)  $a$  e  $b$  são concorrentes:

Supondo, então, que existe  $P$  tal que  $a \cap b = \{P\}$  e usando as igualdades  $a = b \cap \gamma$ ,  $b = \alpha \cap \gamma$  e  $\alpha \cap \beta = c$ , para substituições, temos:

$$\begin{aligned} a \cap b = \{P\} &\Rightarrow (b \cap \gamma) \cap (\alpha \cap \gamma) = \{P\} \Rightarrow \alpha \cap \beta \cap \gamma = \{P\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\alpha \cap \beta) \cap \gamma = \{P\} \Rightarrow c \cap \gamma = \{P\} \Rightarrow P \in c. \end{aligned}$$

Logo, se  $a \cap b = \{P\}$ , então  $a \cap b \cap c = \{P\}$ .

*1.ª conclusão:* Se três planos são distintos e dois a dois secantes, segundo três retas distintas, e duas dessas retas são concorrentes, então todas as três incidem num mesmo ponto.



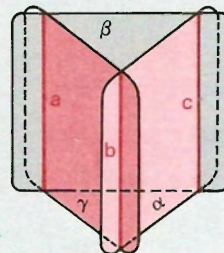
2.º)  $a$  e  $b$  são paralelas (distintas):

Estudemos as retas  $a$  e  $c$ . As retas  $a$  e  $c$  distintas são coplanares ( $a, c \subset \beta$ ) por hipótese.

Se  $\exists Q \mid a \cap c = \{Q\}$ , temos, pelo item anterior:

$$a \cap c = \{Q\} \Rightarrow a \cap b \cap c = \{Q\},$$

o que é absurdo, por contrariar a hipótese em estudo ( $a$  e  $b$  não têm ponto comum).



Logo,  $a$  e  $c$  são paralelas.

Considerando  $b$  e  $c$ , de modo análogo, concluímos que  $b$  e  $c$  são paralelas.

**2ª conclusão:** Se três planos são distintos e dois a dois secantes, segundo três retas distintas, e duas dessas retas são paralelas, todas as três são paralelas (duas a duas).

Reunindo as conclusões, temos o teorema dos três planos secantes:

Se três planos distintos são dois a dois secantes, segundo três retas, ou essas retas passam por um mesmo ponto ou são paralelas duas a duas.

- 29.** Se dois planos que se cortam passam respectivamente por duas retas paralelas distintas (cada um por uma), a interseção desses planos é paralela às retas.
- 30.** Duas retas distintas  $a$  e  $b$  estão num plano  $\alpha$  e fora de  $\alpha$  há um ponto  $P$ . Estude a interseção dos planos  $\beta = (a, P)$  e  $\gamma = (b, P)$  com relação às retas  $a$  e  $b$ .
- 31.** Complete:
- a)  $(a = \beta \cap \gamma, b = \alpha \cap \gamma, c = \alpha \cap \beta \text{ e } a \cap c = \{P\}) \Rightarrow \dots$
- b)  $(a = \beta \cap \gamma, b = \alpha \cap \gamma, c = \alpha \cap \beta \text{ e } a \parallel c) \Rightarrow \dots$
- c)  $(a = \beta \cap \gamma, b = \alpha \cap \gamma, c = \alpha \cap \beta) \Rightarrow \dots$

# Paralelismo

## I. Paralelismo de retas

### 20. Postulado das paralelas – postulado de Euclides

Por um ponto existe uma *única* reta paralela a uma reta dada.

### 21. Transitividade do paralelismo de retas

Se duas retas são paralelas a uma terceira, então elas são paralelas entre si.

$$\begin{array}{ll} \textit{Hipótese} & \textit{Tese} \\ (a \parallel c, b \parallel c) & \implies (a \parallel b) \end{array}$$

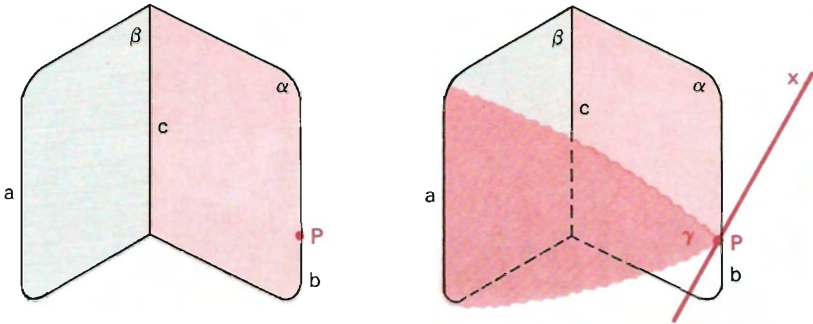
#### *Demonstração*

Consideremos o caso mais geral:  $a \neq b$ ,  $a \neq c$ ,  $b \neq c$  e  $a$ ,  $b$ ,  $c$  não coplanares:

1. Pelo postulado das paralelas concluímos que  $a$  e  $b$  não têm ponto comum.

2. As retas  $a$  e  $c$  determinam um plano  $\beta$ ;  $b$  e  $c$  determinam um plano  $\alpha$  e  $c = \alpha \cap \beta$ .

Tomemos um ponto  $P$  em  $b$  e teremos  $\gamma = (\beta, P)$ .



Os planos distintos  $\alpha$  e  $\gamma$  têm o ponto  $P$  comum, então têm uma reta comum que nomearemos de  $x$  (não podemos dizer que é  $b$  para não admitirmos a tese).

$$(a = \beta \cap \gamma, x = \alpha \cap \gamma, c = \alpha \cap \beta \text{ e } a \parallel c) \implies (a \parallel x \text{ e } c \parallel x)$$

O ponto  $P$  pertence, então, às retas  $b$  e  $x$  e ambas são paralelas à reta  $c$ . Logo, pelo postulado das paralelas,  $x = b$ .

Como  $a \parallel x$  e  $x = b$ , vem que  $a \parallel b$ .

## EXERCÍCIOS

32. Os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso são vértices de um paralelogramo.
33. Num quadrilátero reverso  $ABCD$ , os pontos  $M, N, P, Q, R$  e  $S$  são respectivamente pontos médios de  $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{CD}, \overline{BC}, \overline{BD}$  e  $\overline{AC}$ . Prove que  $MNPQ, MSPR$  e  $NSQR$  são paralelogramos.
34. Considere um quadrilátero reverso e três segmentos: o primeiro com extremidades nos pontos médios de dois lados opostos, o segundo com extremidades nos pontos médios dos outros dois lados opostos, o terceiro com extremidades nos pontos médios das diagonais. Prove que esses três segmentos se interceptam num ponto.

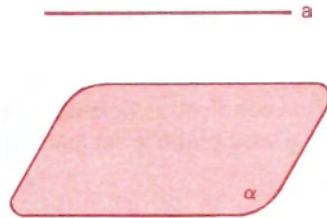


## II. Paralelismo entre retas e planos

### 22. Definição

Uma reta é paralela a um plano (ou o plano é paralelo à reta) se, e somente se, eles não têm ponto comum.

$$a // \alpha \Leftrightarrow a \cap \alpha = \emptyset$$



### 23. Teorema da existência de retas e planos paralelos

#### a) Condição suficiente

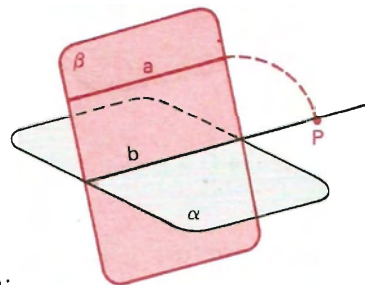
Se uma reta não está contida num plano e é paralela a uma reta do plano, então ela é paralela ao plano.

<i>Hipótese</i>	<i>Tese</i>
$(a \not\subset \alpha, a // b, b \subset \alpha)$	$\Rightarrow a // \alpha$

#### *Demonstração*

$$(a // b, a \cap b = \emptyset) \Rightarrow \exists \beta = (a, b)$$

$$(b \subset \alpha, b \subset \beta, \alpha \neq \beta) \Rightarrow b = \alpha \cap \beta$$



Se  $a$  e  $\alpha$  têm um ponto  $P$  comum, vem:

$$(P \in a, a \subset \beta) \Rightarrow P \in \beta$$

com  $P \in \beta$  e  $P \in \alpha$ , decorre  $P \in b$ . Então  $P \in a$  e  $P \in b$ , o que é absurdo visto que  $a \cap b = \emptyset$ .

Logo  $a$  e  $\alpha$  não têm ponto comum, isto é,  $a // \alpha$ .

## 24. Observações

1ª) Outro enunciado do teorema acima:

Se duas retas são paralelas e distintas, todo plano que contém uma e não contém a outra, é paralelo a essa outra.

2ª) O teorema acima dá a seguinte *condição suficiente*:

Uma condição suficiente para que uma reta, não contida num plano, seja paralela a esse plano é ser paralela a uma reta do plano.

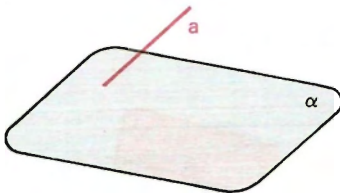
### b) Condição necessária

Se uma reta é paralela a um plano, então ela é paralela a uma reta do plano.

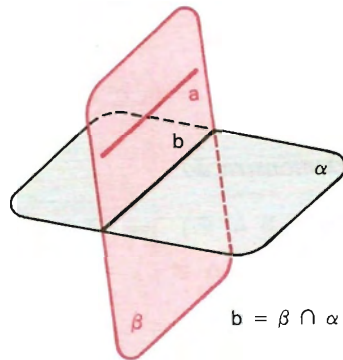
*Hipótese*

$$a \parallel \alpha \Rightarrow (\exists b \subset \alpha \mid a \parallel b)$$

*Tese*



$$a \cap \alpha = \emptyset$$



$$b = \beta \cap \alpha$$

### *Demonstração*

Conduzimos por  $a$  um plano  $\beta$  que intercepta  $\alpha$  em  $b$ .

As retas  $a$  e  $b$  são coplanares, pois estão em  $\beta$ , e não têm ponto comum, pois:

$$(a \cap \alpha = \emptyset, b \subset \alpha) \Rightarrow a \cap b = \emptyset$$

Logo,  $a \parallel b$ .

## 25. Observações

1ª) Outros enunciados do teorema anterior:

Se dois planos são secantes e uma reta de um deles é paralela ao outro, então essa reta é paralela à interseção.

$$(\beta \cap \alpha = b, a \subset \beta, a \parallel \alpha) \implies a \parallel b$$

Se uma reta dada é paralela a um plano dado, então qualquer plano que passa pela reta e intercepta o plano dado, o faz segundo uma reta paralela à reta dada.

$$(a \parallel \alpha, \beta \supset a, \beta \cap \alpha = b) \implies b \parallel a$$

2ª) Condição necessária e suficiente:

Uma condição necessária e suficiente para que uma reta ( $a$ ), não contida num plano ( $\alpha$ ), seja paralela a esse plano, é ser paralela a uma reta ( $b$ ), contida no plano.

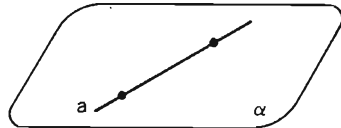
## III. Posições relativas de uma reta e um plano

26. Uma reta e um plano podem apresentar em comum:

1º) dois pontos distintos:

a reta está contida no plano.

$$a \subset \alpha, a \cap \alpha = a$$



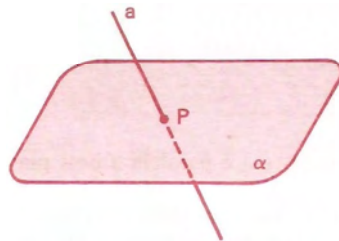
2º) um único ponto:

a reta e o plano são concorrentes

ou

a reta e o plano são secantes.

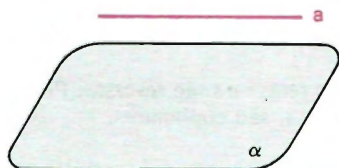
$$a \cap \alpha = \{P\}$$



3º) nenhum ponto comum:

a reta e o plano são paralelos.

$$a \cap \alpha = \emptyset$$



# EXERCÍCIOS

- 35.** Construa uma reta paralela a um plano dado.
- 36.** Construa um plano paralelo a uma reta dada.
- 37.** Se uma reta é paralela a um plano e por um ponto do plano conduzimos uma reta paralela à reta dada, então a reta conduzida está contida no plano.

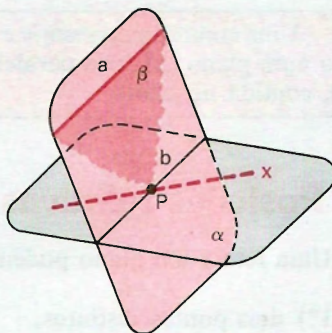
**Solução**

<i>Hipótese</i>	<i>Tese</i>
$(a \parallel \alpha, P \in \alpha, P \in b, b \parallel a) \Rightarrow$	$b \subset \alpha$

*Demonstração*

O plano  $(a, P) = \beta$  intercepta o plano  $\alpha$  numa reta  $x$  que passa por  $P$  e é paralela à reta  $a$ , pois  $a \parallel \alpha$ .

$$(\beta \cap \alpha = x, a \subset \beta, a \parallel \alpha) \Rightarrow a \parallel x$$



Pelo postulado das paralelas, as retas  $x$  e  $b$  coincidem, pois passam por  $P$  e são paralelas à reta  $a$ .

Logo:  $x = b$ .

$$\text{Então: } (x = b, x = \beta \cap \alpha) \Rightarrow b = \beta \cap \alpha \Rightarrow b \subset \alpha.$$

- 38.** Se uma reta é paralela a dois planos secantes, então ela é paralela à interseção.
- 39.** Se duas retas paralelas são dadas e uma delas é paralela a um plano, então a outra é paralela ou está contida no plano.
- 40.** Dadas duas retas reversas  $r$  e  $s$ , construa por  $s$  um plano paralelo a  $r$ .
- 41.** Duas retas  $r$  e  $s$  são reversas. Prove que as retas paralelas a  $r$ , conduzidas por pontos de  $s$ , são coplanares.
- 42.** Construa por um ponto uma reta paralela a dois planos secantes.

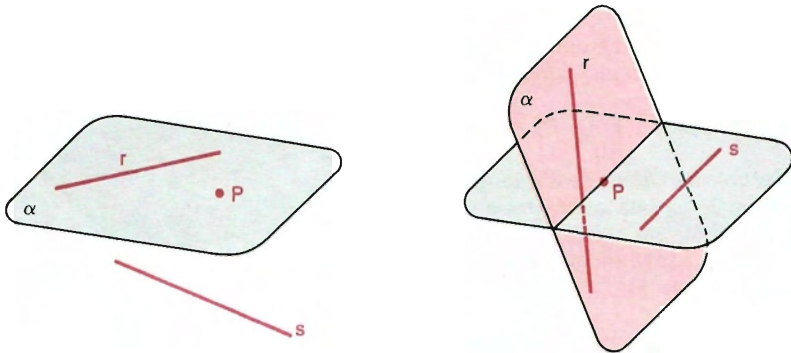
## IV. Duas retas reversas

**27.** Problemas que se referem a duas retas reversas ( $r$  e  $s$ ) e a um ponto ( $P$ ) devem ser analisados em três possíveis hipóteses:

1.º caso: O ponto pertence a uma das retas.

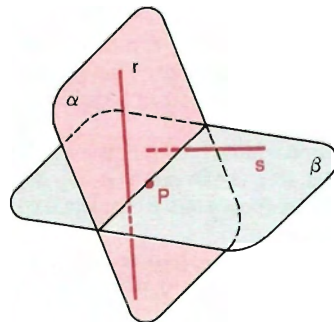
2.º caso: O ponto e uma das retas determinam um plano paralelo à outra reta.

Por exemplo:  $\alpha = (r, P)$  e  $\alpha \parallel s$ .



3.º caso: O ponto e qualquer uma das retas determinam um plano não paralelo à outra.

$\alpha = (r, P)$  e  $\alpha$  não paralelo a  $s$  e  
 $\beta = (s, P)$  e  $\beta$  não paralelo a  $r$ .

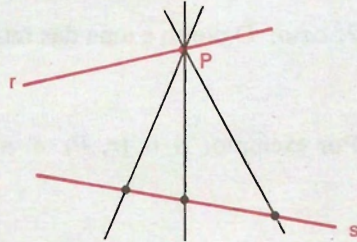


# EXERCÍCIOS

43. Construa por um ponto  $P$  uma reta que se apóia em duas retas reversas  $r$  e  $s$  dadas.

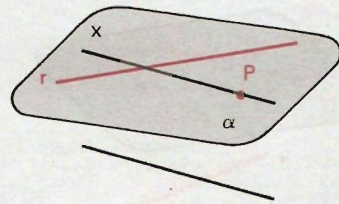
**Solução**

1º caso: O ponto pertence a uma das retas. Por exemplo:  $P \in r$ . O problema tem *infinitas* soluções.



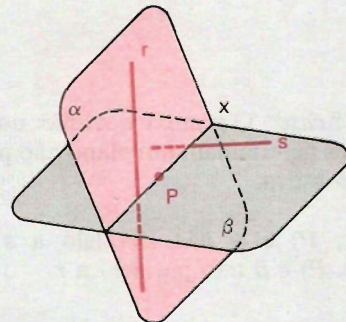
São as retas determinadas por  $P$  e pelos pontos de  $s$ , tomados um a um.

2º caso: O ponto e uma das retas determinam um plano paralelo a outra. Por exemplo:  $\alpha = (r, P)$  e  $\alpha \parallel s$ .



O problema *não tem* solução, porque qualquer reta  $x$ , que passa por  $P$  e se apóia em  $r$ , está em  $\alpha$  e por isso não pode se apoiar em  $s$ , visto que  $s \cap \alpha = \emptyset$ .

3º caso:  $\alpha = (r, P)$ ,  $\alpha$  não paralelo a  $s$  e  $\beta = (s, P)$ ,  $\beta$  não paralelo a  $r$ . O problema admite *uma única* solução, que é a reta  $x$  interseção de  $\alpha$  e  $\beta$ .



$x$  é concorrente com  $r$ , pois  $x$  e  $r$  são coplanares (estão em  $\alpha$ ) e não são paralelas (pois  $r$  não é paralela a  $\beta$ ).

$x$  é concorrente com  $s$ , pois  $x$  e  $s$  são coplanares (estão em  $\beta$ ) e não são paralelas (pois  $s$  não é paralela a  $\alpha$ ).

A reta  $x$  é única, pois se existisse outra reta  $x'$ , distinta de  $x$ , nas condições pedidas, teríamos o plano  $(x, x')$  com  $r \subset (x, x')$  e  $s \subset (x, x')$ , o que é absurdo.

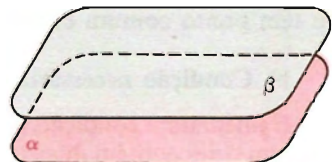
- 44.** Construa por um ponto  $P$  um plano paralelo a duas retas reversas  $r$  e  $s$  dadas.
- 45.** Dadas duas retas reversas, existem pontos  $P$  pelos quais não passa nenhuma reta que se apóie em ambas?
- 46.** Dadas duas retas reversas, prove que o plano paralelo a uma delas, conduzida pela outra, é único.
- 47.** Classifique em verdadeiro ( $V$ ) ou falso ( $F$ ):
- Uma reta e um plano que têm um ponto comum são concorrentes.
  - Uma reta e um plano secantes têm um único ponto comum.
  - Uma reta e um plano paralelos não têm ponto comum.
  - Um plano e uma reta secantes têm um ponto comum.
  - Se uma reta está contida num plano, eles têm um ponto comum.
  - Se uma reta é paralela a um plano, ela é paralela a qualquer reta do plano.
  - Se um plano é paralelo a uma reta, qualquer reta do plano é reversa à reta dada.
  - Se uma reta é paralela a um plano, existe no plano uma reta concorrente com a reta dada.
  - Se uma reta e um plano são concorrentes, então a reta é concorrente com qualquer reta do plano.
  - Se uma reta é paralela a um plano, ela é paralela a infinitas retas do plano.
  - Se duas retas distintas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.
  - Uma condição necessária e suficiente para uma reta ser paralela a um plano é ser paralela a uma reta do plano e não estar nele.
  - Por um ponto fora de um plano passam infinitas retas paralelas ao plano.
  - Por um ponto fora de uma reta passa um único plano paralelo à reta.
- 48.** Classifique em verdadeiro ( $V$ ) ou falso ( $F$ ):
- Dadas duas retas reversas, qualquer reta que encontra uma, encontra a outra.
  - Dadas duas retas reversas, sempre existe reta que se apóie em ambas.
  - Dadas duas retas reversas, qualquer plano que passa por uma, encontra a outra.
  - Por qualquer ponto é possível conduzir uma reta que se apóia em duas retas reversas dadas.

## V. Paralelismo entre planos

### 28. Definição

Dois planos são paralelos se, e somente se, eles não têm ponto comum ou são iguais (coincidentes).

$$a // \beta \Leftrightarrow (\alpha \cap \beta = \emptyset \text{ ou } \alpha = \beta)$$



## 29. Teorema da existência de planos paralelos

### a) Condição suficiente

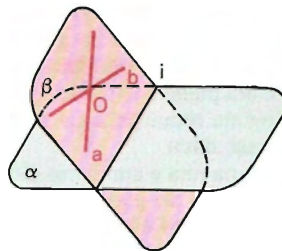
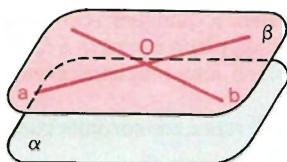
Se um plano contém duas retas *concorrentes*, ambas paralelas a um outro plano, então esses planos são paralelos.

*Hipótese*

$$(a \subset \beta, b \subset \beta; a \cap b = \{O\}; a \parallel \alpha, b \parallel \alpha) \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$

*Tese*

$$\alpha \parallel \beta$$



### *Demonstração*

Os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são distintos. Provemos que eles são paralelos, pelo método indireto de demonstração.

Se existisse uma reta  $i$  tal que  $i = \alpha \cap \beta$ , teríamos:

$$(a \parallel \alpha, a \subset \beta, i = \alpha \cap \beta) \Rightarrow a \parallel i$$

$$(b \parallel \alpha, b \subset \beta, i = \alpha \cap \beta) \Rightarrow b \parallel i$$

O fato de  $a$  e  $b$  serem concorrentes e ambas paralelas a  $i$  é um absurdo, pois contraria o postulado das paralelas (postulado de Euclides). Logo,  $\alpha$  e  $\beta$  não têm ponto comum e, portanto,  $\alpha \parallel \beta$ .

### b) Condição necessária e suficiente

É imediata a condição necessária: Se dois planos distintos são paralelos, então um deles contém duas retas *concorrentes*, ambas paralelas ao outro. Daí temos a condição que segue:

Uma condição necessária e suficiente para que dois planos distintos sejam paralelos é que um deles contenha duas retas *concorrentes*, ambas paralelas ao outro.



## VI. Posições relativas de dois planos

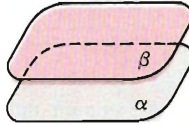
30. Dois planos podem ocupar as seguintes posições relativas:

1º) coincidentes  
(ou iguais)



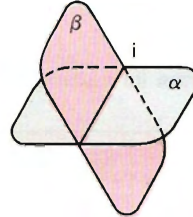
$$\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$$

2º) paralelos  
distintos



$$\alpha \cap \beta = \emptyset$$

3º) secantes



$$\alpha \cap \beta = i$$

## EXERCÍCIOS

49. Se dois planos distintos são paralelos, toda reta de um deles é paralela ao outro.
50. Por um ponto  $P$ , fora de um plano  $\alpha$ , construa um plano paralelo a  $\alpha$ .
51. Se dois planos são paralelos e uma reta é concorrente com um deles, então essa reta é concorrente com o outro.
52. Se dois planos são paralelos, todo plano que encontra um deles, encontra o outro.
53. Se dois planos paralelos interceptam um terceiro, então as interseções são paralelas.

### Solução

### Hipótese

### Tese

$$(\alpha \parallel \beta, \alpha \cap \gamma = a, \beta \cap \gamma = b) \Rightarrow (a \parallel b)$$

### Demonstração

1. Se  $\alpha = \beta$ , temos:

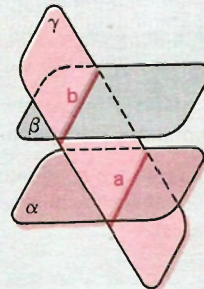
$$\alpha = \beta \Rightarrow a = b \Rightarrow a \parallel b$$

2. Se  $\alpha \cap \beta = \emptyset$ , temos:

$$(\alpha \cap \beta = \emptyset, a \subset \alpha, b \subset \beta) \Rightarrow a \cap b = \emptyset$$

$$(a \cap b = \emptyset, a \subset \gamma, b \subset \gamma) \Rightarrow a \parallel b$$

Como  $a$  e  $b$  estão em  $\gamma$ , vem que  $a \parallel b$ .



54. Dois planos paralelos distintos determinam em retas paralelas distintas segmentos congruentes.

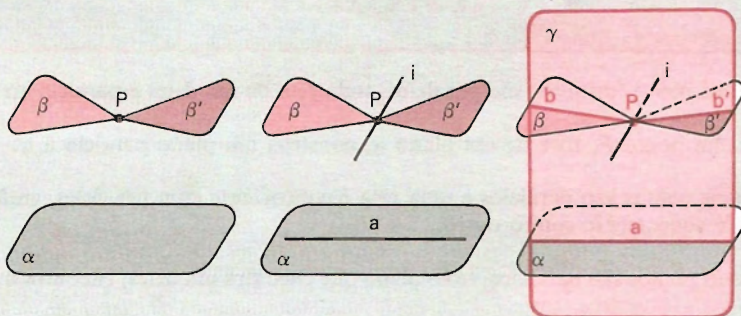
55. Se dois planos são paralelos, toda reta paralela a um deles é paralela ou está contida no outro.

56. Teorema da unicidade

Por um ponto fora de um plano passa um único plano paralelo ao plano dado.

Solução

Sejam  $P$  e  $\alpha$  os dados,  $P \notin \alpha$ .



Se existissem dois planos distintos  $\beta$  e  $\beta'$  passando por  $P$  e ambos paralelos a  $\alpha$ , teríamos:

- 1)  $\beta$  e  $\beta'$  interceptam-se numa reta  $i$  que é paralela a  $\alpha$ .
- 2) Tomamos em  $\alpha$  uma reta  $a$ , não paralela a  $i$ . A reta  $a$  e o ponto  $P$  determinam um plano  $\alpha$ .
- 3) O plano  $\gamma$  intercepta  $\beta$  em uma reta  $b$  (distinta de  $i$ ) paralela à reta  $a$ . O plano  $\gamma$  intercepta  $\beta'$  em uma reta  $b'$  (distinta de  $i$ ) paralela à reta  $a$ .
- 4) As retas  $b$  e  $b'$  são concorrentes em  $P$  e ambas paralelas à reta  $a$ , o que é um absurdo, pois contraria o postulado das paralelas (postulado de Euclides).

Logo, o plano paralelo a  $\alpha$ , passando por  $P$ , é único.

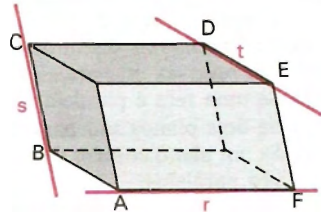
- 57.** Prove a *transitividade* do paralelismo de planos, isto é, se dois planos são paralelos a um terceiro, então eles são paralelos entre si.
- 58.** Se dois planos são, respectivamente, paralelos a dois planos que se interceptam, então eles se interceptam e sua interseção é paralela à interseção dos dois primeiros.
- 59.** Dadas duas retas reversas, existem dois planos paralelos, e somente dois, cada um contendo uma das retas.
- 60.** Conduza uma reta, que encontra uma reta dada  $\alpha$ , seja paralela a um plano  $\alpha$  e passe por um ponto  $P$  dado fora do plano e da reta dada. Discuta.

## VII. Três retas reversas duas a duas

- 31.** Problemas que se referem a três retas ( $r, s, t$ ), duas a duas reversas, devem ser analisados em duas hipóteses possíveis:

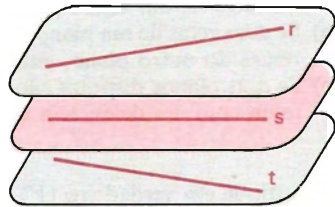
*1.º caso:* Não existe plano paralelo às três retas.

O plano conduzido por uma das retas, paralelo a outra delas, não é paralelo à terceira reta.



*2.º caso:* Existe plano paralelo às três retas.

O plano conduzido por uma das retas, paralelo a outra delas, é paralelo à terceira reta.



## EXERCÍCIOS

- 61.** Dadas três retas  $r, s$  e  $t$ , reversas duas a duas, construa uma reta  $x$ , paralela a  $t$ , concorrente com  $r$  e concorrente com  $s$ .

- 62.** Dados dois planos secantes  $\alpha$  e  $\beta$  e duas retas reversas  $r$  e  $s$ , construa uma reta  $x$  paralela a  $\alpha$  e a  $\beta$  e concorrente com  $r$  e  $s$ .
- 63.** Construa uma reta que se apóie em três retas  $r$ ,  $s$  e  $t$ , reversas duas a duas.
- 64.** Classifique em verdadeiro ( $V$ ) ou falso ( $F$ ):
- Se dois planos são secantes, então qualquer reta de um deles é concorrente com o outro.
  - Se dois planos são secantes, então uma reta de um deles pode ser concorrente com uma reta do outro.
  - Se dois planos são secantes, então uma reta de um deles pode ser reversa com uma reta do outro.
  - Dois planos distintos paralelos têm um ponto comum.
  - Se dois planos distintos são paralelos, então uma reta de um deles é paralela ao outro.
  - Se dois planos distintos são paralelos, então uma reta de um e outra reta de outro podem ser concorrentes.
  - Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela a qualquer reta do outro.
  - Se dois planos distintos são paralelos, uma reta de um e uma reta do outro são reversas ou paralelas.
  - Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.
  - Se dois planos são paralelos a uma reta, então são paralelos entre si.
  - Se um plano contém duas retas paralelas a um outro plano, então esses planos são paralelos.
  - Se um plano contém duas retas distintas paralelas a um outro plano, então esses planos são paralelos.
  - Uma condição suficiente para que dois planos sejam paralelos é que duas retas distintas de um sejam paralelas ao outro.
  - Se duas retas de um plano são, respectivamente, paralelas a duas retas concorrentes do outro plano, então esses planos são paralelos.
  - Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta que tem um ponto comum com um deles, tem um ponto comum com o outro.
- 65.** Classifique em verdadeiro ( $V$ ) ou falso ( $F$ ):
- Se três retas são, duas a duas, reversas e não paralelas a um mesmo plano, então por qualquer ponto de uma passa uma reta que se apóia nas outras duas.
  - Se três retas são, duas a duas, reversas e paralelas a um mesmo plano, então por qualquer ponto de uma passa uma reta que se apóia nas outras duas.
  - Dadas três retas, duas a duas reversas, uma condição necessária e suficiente para que por qualquer ponto de uma sempre passe uma reta que se apóia nas outras duas é as três serem paralelas a um mesmo plano.
  - Dadas três retas, duas a duas reversas, sempre existe uma reta paralela a uma delas e que se apóia nas outras duas.

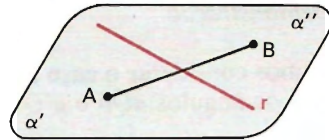
## VIII. Ângulo de duas retas — Retas ortogonais

### 32. Postulado da separação dos pontos de um plano

Uma reta  $r$  de um plano  $\alpha$  separa esse plano em dois subconjuntos  $\alpha'$  e  $\alpha''$  tais que:

- a)  $\alpha' \cap \alpha'' = \emptyset$
- b)  $\alpha'$  e  $\alpha''$  são convexas
- c)  $(A \in \alpha', B \in \alpha'') \Rightarrow \overline{AB} \cap r \neq \emptyset$

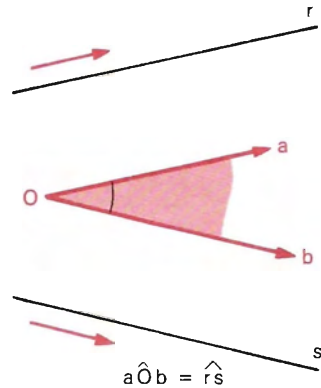
Os subconjuntos  $\alpha'$  e  $\alpha''$  são chamados semiplanos abertos e os conjuntos  $r \cup \alpha'$  e  $r \cup \alpha''$  são chamados semiplanos. A reta  $r$  é a origem de cada um desses semiplanos.



### 33. Ângulo de duas retas quaisquer — definição

Um ângulo é chamado ângulo de duas retas *orientadas* quaisquer se, e somente se, ele tem vértice arbitrário e seus lados têm sentidos respectivamente concordantes com os sentidos das retas.

Na figura ao lado o ângulo plano  $a\hat{O}b$  é o ângulo das retas reversas (orientadas)  $r$  e  $s$ .



### 34. Observações

1ª) A definição acima visa, principalmente, estabelecer o conceito de ângulo de duas retas reversas.

2ª) Se duas semi-retas têm sentidos concordantes (ou discordantes), elas estão em retas paralelas.

3ª) A arbitrariedade do vértice é garantida pelo teorema que segue:

### 35. Teoremas sobre ângulos de lados respectivamente paralelos

a) Se dois ângulos têm os lados com sentidos respectivamente concordantes, então eles são congruentes.

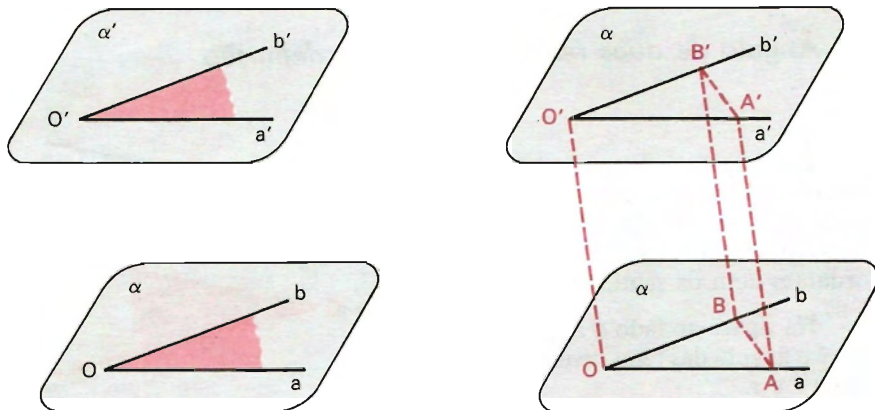
*Hipótese*

*Tese*

$$\left( \begin{array}{l} \overrightarrow{Oa} \text{ e } \overrightarrow{O'a'} \text{ têm sentidos concordantes} \\ \overrightarrow{Ob} \text{ e } \overrightarrow{O'b'} \text{ têm sentidos concordantes} \end{array} \right) \Rightarrow (a\hat{O}b \equiv a'\hat{O}'b')$$

*Demonstração*

Vamos considerar o caso mais geral:  $\overrightarrow{Oa}$  e  $\overrightarrow{Ob}$  não são coincidentes nem opostas e os ângulos  $a\hat{O}b$  e  $a'\hat{O}'b'$  não são coplanares.



Notemos que os planos  $\alpha$  e  $\alpha'$  dos ângulos  $a\hat{O}b$  e  $a'\hat{O}'b'$  são paralelos. Tomemos os pontos  $A \in a$ ,  $B \in b$ ,  $A' \in a'$  e  $B' \in b'$  tais que:

$$\overline{OA} \equiv \overline{O'A'} \text{ e } \overline{OB} \equiv \overline{O'B'}. \quad (1)$$

O quadrilátero  $OAA'O'$  é paralelogramo, pois as semi-retas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{O'A'}$  têm sentidos concordantes e os segmentos  $\overline{OA}$  e  $\overline{O'A'}$  são congruentes. Logo,

$$\overline{OO'} \parallel \overline{AA'} \text{ e } \overline{OO'} \equiv \overline{AA'}. \quad (2)$$

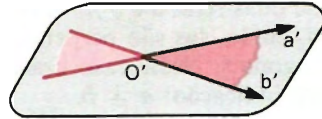
Analogamente, temos que  $OBB'O'$  é paralelogramo e daí  $\overline{OO'} \parallel \overline{BB'}$  e  $\overline{OO'} \equiv \overline{BB'}$ . (3)

((2) e (3))  $\Rightarrow (\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$  e  $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$ )  $\Rightarrow AA'B'B$  é paralelogramo  $\Rightarrow \overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$  (4)

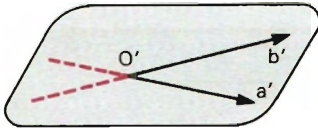
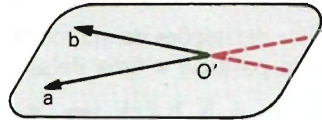
((1) e (4))  $\Rightarrow \triangle AOB \equiv \triangle A'O'B' \Rightarrow \widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'} \Rightarrow a\hat{O}b \equiv a'\hat{O}'b'$

b) Se dois ângulos têm os lados com sentidos respectivamente discordantes, então eles são congruentes.

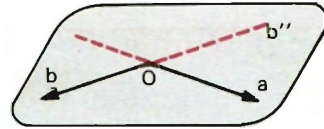
É uma aplicação do teorema anterior e ângulos opostos pelo vértice.



c) Se dois ângulos são tais que um lado de um deles tem sentido concordante com um lado do outro e os outros dois lados têm sentidos discordantes, então eles são suplementares.



*Hipótese*



*Tese*

$$\left( \begin{array}{l} \widehat{Oa} \text{ e } \widehat{O'a'} \text{ têm sentidos concordantes} \\ \widehat{Ob} \text{ e } \widehat{O'b'} \text{ têm sentidos discordantes} \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{l} \widehat{aOb} \text{ e } \widehat{a'O'b'} \\ \text{são suplementares} \end{array} \right)$$

*Demonstração*

Tomando a semi-reta  $Ob''$  oposta à semi-reta  $Ob$ , temos  $a\hat{O}b'' \equiv a'\hat{O}'b'$ . Como  $a\hat{O}b$  e  $a\hat{O}b''$  são suplementares, vem que  $a\hat{O}b$  e  $a'\hat{O}'b'$  são suplementares.

Resumindo as conclusões acima, temos:

Se dois ângulos possuem lados respectivamente paralelos, então eles são congruentes ou suplementares:

- a) congruentes, se os lados têm sentidos respectivamente concordantes ou respectivamente discordantes;
- b) suplementares, se os sentidos de um lado de um e um lado do outro são concordantes e os outros dois lados têm sentidos discordantes.

### 36. Retas ortogonais – definição

Duas retas são ortogonais se, e somente se, são reversas e formam ângulo reto.

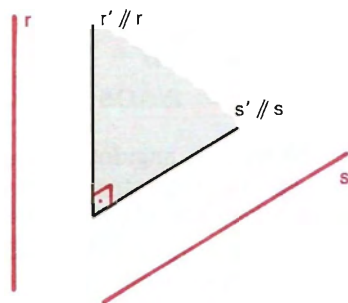
Usaremos o símbolo  $\perp$  para ortogonalidade.

Se duas retas  $a$  e  $b$  formam ângulo reto, então elas são perpendiculares ou ortogonais. Nesse caso usaremos a seguinte indicação:  $a \perp b$ .

$$a \perp b \Leftrightarrow (a \perp b \text{ ou } a \perp b)$$

Das definições acima, conclui-se que: se duas retas formam ângulo reto, toda reta paralela a uma delas forma ângulo reto com a outra.

$$(a \perp b, b \parallel c) \Rightarrow a \perp c \quad (a \perp b, a \parallel c) \Rightarrow b \perp c$$



## EXERCÍCIO

66. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

- Duas retas perpendiculares são sempre concorrentes.
- Se duas retas formam ângulo reto, então elas são perpendiculares.
- Se duas retas são perpendiculares, então elas formam ângulo reto.
- Se duas retas são ortogonais, então elas formam ângulo reto.
- Duas retas que formam ângulo reto podem ser reversas.
- Duas retas perpendiculares a uma terceira são perpendiculares entre si.
- Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si.
- Se duas retas formam ângulo reto, toda paralela a uma delas forma ângulo reto com a outra.



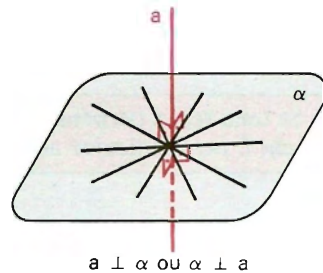
# Perpendicularidade

## I. Reta e plano perpendiculares

### 37. Definição

Uma reta e um plano são *perpendiculares* se, e somente se, eles têm um ponto comum e a reta é perpendicular a todas as retas do plano que passam por esse ponto comum.

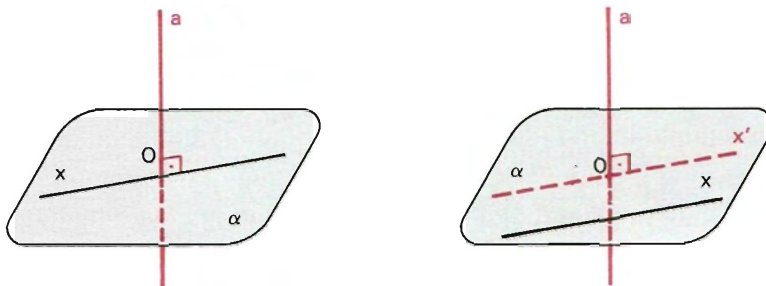
Se uma reta  $a$  é perpendicular a um plano  $\alpha$  (ou o plano  $\alpha$  é perpendicular à reta  $a$ ), o traço de  $a$  em  $\alpha$  é chamado pé da perpendicular.



Uma reta e um plano são *obliquos* se, e somente se, são concorrentes e não são perpendiculares.

### 38. Conseqüência da definição

Se uma reta é perpendicular a um plano, então ela forma ângulo reto com qualquer reta do plano.



De fato, sendo  $a$  perpendicular a  $\alpha$  em  $O$  e  $x$  é uma reta qualquer de  $\alpha$ , temos dois casos a considerar:

1º caso:  $x$  passa por  $O$ .

Neste caso, pela definição,  $a \perp x$ . (1)

2º caso:  $x$  não passa por  $O$ .

Neste caso, tomamos por  $O$  uma reta  $x'$ , paralela a  $x$ . Pela definição,  $a \perp x'$  e, então,  $a \perp x$ . (2)

De (1) e (2) vem:  $(a \perp \alpha, x \subset \alpha) \implies a \perp x$ .

### 39. Teorema fundamental – condição suficiente

Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

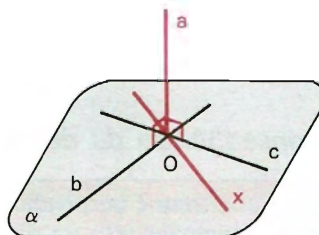
*Hipótese*

*Tese*

$$(a \perp b, a \perp c; b \cap c = \{O\}; b \subset \alpha, c \subset \alpha) \implies a \perp \alpha$$

*Demonstração*

1º) Para provarmos que  $a \perp \alpha$ , devemos provar que  $a$  é perpendicular a todas as retas de  $\alpha$  que passam por  $O$ . Para isso, basta provarmos que  $a$  é perpendicular a uma reta  $x$  genérica de  $\alpha$ , que passa por  $O$ .



2º) Tomemos em  $a$  dois pontos  $A$  e  $A'$ , simétricos em relação a  $O$ :  $\overline{OA} \equiv \overline{OA'}$ .

Tomemos ainda um ponto  $B \in b$  e um ponto  $C \in c$ , tais que  $\overline{BC}$  intercepta  $x$  num ponto  $X$  (basta que  $B$  e  $C$  estejam em semiplanos opostos em relação a  $x$ ).

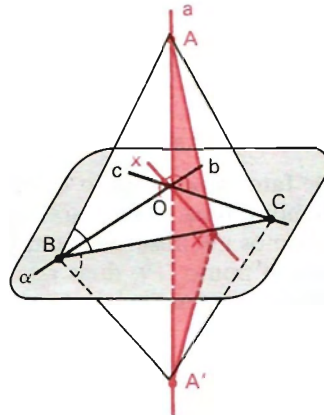
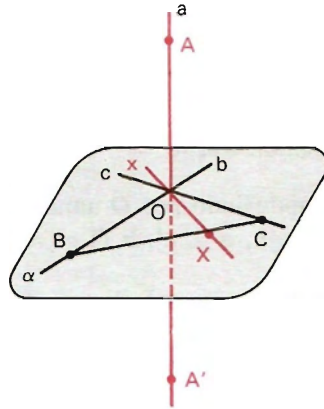
Notemos que, nessas condições,  $b$  é mediatriz de  $\overline{AA'}$ ,  $c$  é mediatriz de  $\overline{AA'}$  e por isso:  $\overline{AB} \equiv \overline{A'B}$  e  $\overline{AC} \equiv \overline{A'C}$ .

Notemos, ainda, que para chegarmos à tese, basta provarmos que  $x$  é mediatriz de  $\overline{AA'}$ .

3º)  $(\overline{AB} \equiv \overline{A'B}, \overline{AC} \equiv \overline{A'C}, \overline{BC}$  comum)  $\Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A'BC \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{A'BC} \Rightarrow \widehat{ABX} \equiv \widehat{A'BX}$   
 $(\overline{AB} \equiv \overline{A'B}, \widehat{ABX} \equiv \widehat{A'BX}, \overline{BX}$  comum)  $\Rightarrow \triangle ABX \equiv \triangle A'BX \Rightarrow \overline{XA} \equiv \overline{XA'}$

4º)  $\overline{XA} \equiv \overline{XA'} \Rightarrow x$  é mediatriz de

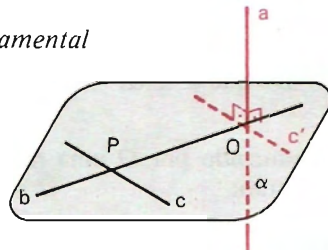
$\left. \begin{array}{l} \overline{AA'} \Rightarrow x \perp a \Rightarrow a \perp x \\ x \text{ genérica, } x \subset \alpha, O \in x \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp \alpha$



#### 40. Observações

1ª) Conseqüências do teorema fundamental

a) Num plano ( $\alpha$ ) há duas retas ( $b$  e  $c$ ) concorrentes (em  $P$ ). Se uma reta ( $a$ ) é perpendicular a uma delas ( $b$  em  $O$ ) e ortogonal à outra ( $c$ ), então essa reta ( $a$ ) é perpendicular ao plano ( $\alpha$ ).



*Hipótese*

*Tese*

$$(a \perp b \text{ em } O, a \perp c; b \cap c = \{P\}; b \subset \alpha, c \subset \alpha) \Rightarrow a \perp \alpha$$

*Demonstração*

Conduzindo por  $O$  uma reta  $c' \parallel c$ , temos  $a \perp c'$ . Então:  
 $(a \perp b, a \perp c', b \cap c' = \{O\}; b \subset \alpha, c' \subset \alpha) \Rightarrow a \perp \alpha$ .

b) Se uma reta é ortogonal a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

*Hipótese*

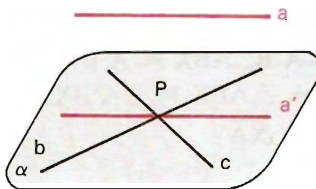
*Tese*

$$(a \perp b, a \perp c; b \cap c = \{P\}; b \subset \alpha, c \subset \alpha) \Rightarrow a \perp \alpha$$

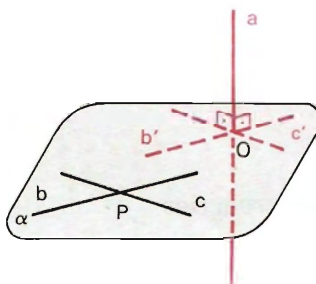
*Demonstração*

1º) De que  $a$  e  $\alpha$  são concorrentes.

De fato, se  $a \parallel \alpha$  ou  $a \subset \alpha$ , conduzindo por  $P$  uma reta  $a'$  paralela à reta  $a$ , teríamos um absurdo: num plano ( $\alpha$ ), por um ponto ( $P$ ), duas retas distintas ( $b$  e  $c$ ) perpendiculares a uma reta ( $a'$ ).



Logo,  $a$  e  $\alpha$  são concorrentes. Seja  $O$  o ponto tal que  $a \cap \alpha = \{O\}$ .



2º) De que  $a \perp \alpha$ .

Conduzindo por  $O$  uma reta  $b' \parallel b$  e uma reta  $c' \parallel c$ , temos  $a \perp b'$  e  $a \perp c'$ . Então:

$$(a \perp b', a \perp c'; b' \cap c' = \{O\}; b' \subset \alpha, c' \subset \alpha) \Rightarrow a \perp \alpha$$

2.ª) *Generalização do teorema fundamental*

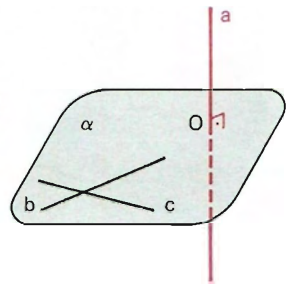
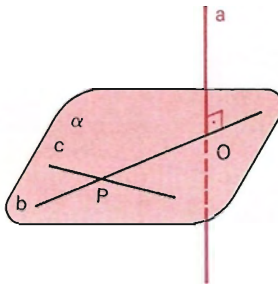
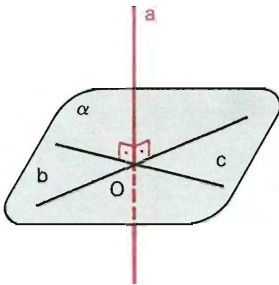
Em vista das conseqüências acima, vale o teorema:

Se uma reta *forma ângulo reto* com duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

$$a \perp b, a \perp c$$

$$a \perp b, a \perp c$$

$$a \perp b, a \perp c$$



$$(a \perp b, a \perp c; b \cap c = \{O\}; b \subset \alpha, c \subset \alpha) \Rightarrow a \perp \alpha.$$

3.ª) *Condição necessária e suficiente*

O teorema enunciado acima e a conseqüência da definição de reta e plano perpendiculares nos dão a seguinte condição necessária e suficiente:

Uma condição necessária e suficiente para que uma reta seja perpendicular a um plano é formar *ângulo reto* com duas retas *concorrentes* do plano.

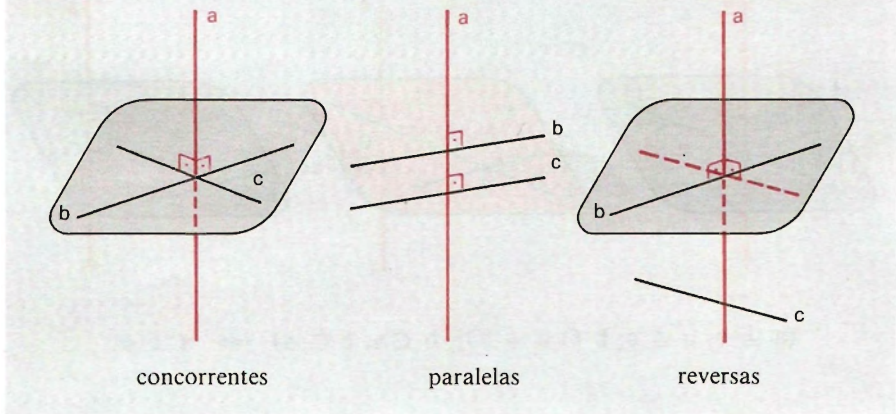
## EXERCÍCIOS

67. Um triângulo  $ABC$ , retângulo em  $B$ , e um paralelogramo  $BCDE$  estão situados em planos distintos. Prove que as retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{DE}$  são ortogonais.

68.  $a, b$  e  $c$  são três retas no espaço tais que  $a \perp b$  e  $c \perp a$ . Que se pode concluir a propósito das posições relativas das retas  $b$  e  $c$ ?

**Solução**

As retas  $b$  e  $c$  podem ser:  
 concorrentes, caso em que  $a$  é perpendicular ao plano  $(b, c)$ ;  
 paralelas, caso em que  $a, b$  e  $c$  são coplanares; ou  
 reversas, caso em que  $b$  e  $c$ , sendo perpendiculares à reta  $a$ , não são coplanares.

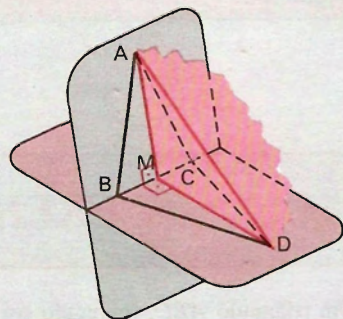


69. Dois triângulos  $ABC$  e  $BCD$  são retângulos em  $B$ . Se o cateto  $\overline{AB}$  é ortogonal à hipotenusa  $\overline{CD}$ , prove que o cateto  $\overline{BD}$  é ortogonal à hipotenusa  $\overline{AC}$ .
70. Os triângulos  $ABC$  e  $DBC$  são isósceles, de base  $\overline{BC}$ , e estão situados em planos distintos. Prove que as retas  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$  são ortogonais.

**Solução**

Sendo  $M$  o ponto médio de  $\overline{BC}$ , as retas  $\overline{AM}$  e  $\overline{DM}$  são concorrentes, pois os planos  $(A, B, C)$  e  $(D, B, C)$  são distintos.

$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ isósceles} &\Rightarrow \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AM} \\ \triangle DBC \text{ isósceles} &\Rightarrow \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{DM} \end{aligned} \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} \perp (A, M, D) \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AD}$$



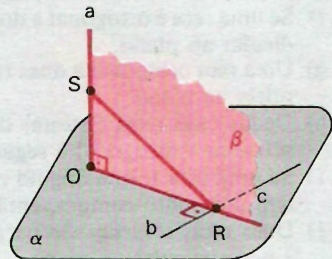
- 71.** Num quadrilátero reverso de lados congruentes entre si e congruentes às diagonais, prove que os lados opostos são ortogonais, assim como as diagonais também são ortogonais (em outros termos: prove que as arestas opostas de um tetraedro regular são ortogonais).

**72. Teorema das três perpendiculares**

Uma reta  $a$  é perpendicular a um plano  $\alpha$  num ponto  $O$ . Uma reta  $b$  de  $\alpha$  não passa por  $O$  e uma reta  $c$  de  $\alpha$  passa por  $O$  e é perpendicular a  $b$  em  $R$ . Se  $S$  é um ponto qualquer da  $a$ , então a reta  $\overleftrightarrow{SR}$  é perpendicular à reta  $b$ .

**Solução**

<i>Hipótese</i>	}	$\Rightarrow \overleftrightarrow{SR} \perp b$
$a \perp \alpha, a \cap \alpha = \{O\}$ $b \subset \alpha, O \notin b$ $c \subset \alpha, O \in c$ $c \perp b, c \cap b = \{R\}$ $S \in a$		



*Demonstração*

Seja  $\beta$  o plano determinado por  $a$  e  $c$ .

$$(a \perp \alpha, b \subset \alpha) \Rightarrow a \perp b$$

$$(b \perp a, b \perp c; a \cap c = \{O\}; a \subset \beta, c \subset \beta) \Rightarrow b \perp \beta$$

$$(b \perp \beta, b \cap \beta = \{R\}, \overleftrightarrow{SR} \subset \beta) \Rightarrow b \perp \overleftrightarrow{SR} \Rightarrow \overleftrightarrow{SR} \perp b.$$

Caso  $s = O$ , então  $\overleftrightarrow{SR} = c$ ; como  $c \perp b$ , vem que  $\overleftrightarrow{SR} \perp b$ .

- 73.** Uma reta  $a$  é perpendicular a um plano  $\alpha$  num ponto  $O$ . Uma reta  $b$  de  $\alpha$  não passa por  $O$  e uma reta  $c$  de  $\alpha$  passa por  $O$  e é concorrente com  $b$  em  $R$ . Se  $S$  é um ponto qualquer de  $a$  e a reta  $\overleftrightarrow{SR}$  é perpendicular à reta  $b$ , então  $b$  é perpendicular a  $c$ . (Recíproca do teorema das três perpendiculares.)

- 74.** Seja  $P$  o pé da reta  $r$  perpendicular a um plano  $\beta$  e  $s$  uma reta de  $\beta$  que não passa por  $P$ . Traçando-se por  $P$  uma perpendicular a  $s$ , esta encontra  $s$  em um ponto  $Q$ . Se  $A$  é um ponto qualquer de  $r$ , diga qual é o ângulo de  $AQ$  com  $s$ . Justifique.

- 75.** Uma reta e um plano perpendiculares a uma reta em pontos distintos são paralelos.
- 76.** Duas retas não paralelas entre si são paralelas a um plano. Toda reta que forma ângulo reto com ambas, é perpendicular ao plano.
- 77.** Classifique em verdadeiro (*V*) ou falso (*F*):
- Para que uma reta e um plano sejam perpendiculares é necessário que eles sejam secantes.
  - Uma reta perpendicular a um plano é perpendicular a todas as retas do plano.
  - Uma reta perpendicular a um plano forma ângulo reto com qualquer reta do plano.
  - Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.
  - Se uma reta é perpendicular a duas retas paralelas e distintas de um plano, então ela está contida no plano.
  - Se uma reta é ortogonal a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.
  - Uma reta ortogonal a duas retas paralelas e distintas de um plano pode ser paralela ao plano.
  - Dadas duas retas distintas de um plano, se uma outra reta é perpendicular à primeira e ortogonal à segunda, então ela é perpendicular ao plano.
  - Se uma reta forma ângulo reto com duas retas de um plano, distintas e que têm um ponto comum, então ela é perpendicular ao plano.
  - Dois retas reversas são paralelas a um plano. Toda reta ortogonal a ambas é perpendicular ao plano.
  - Dois retas não paralelas entre si são paralelas a um plano. Se uma reta forma ângulo reto com as duas, então ela é perpendicular ao plano.
  - Uma reta e um plano são paralelos. Toda reta perpendicular à reta dada é perpendicular ao plano.
  - Uma reta e um plano são perpendiculares. Toda reta perpendicular à reta dada é paralela ao plano ou está contida nele.
  - Uma reta e um plano, perpendiculares a uma outra reta em pontos distintos, são paralelos.

**78. Existência e unicidade do plano perpendicular à reta por um ponto**

Por um ponto  $P$  pode-se conduzir um único plano perpendicular a uma reta  $a$ .

**Solução**

1º caso:  $P \notin a$

2º caso:  $P \in a$

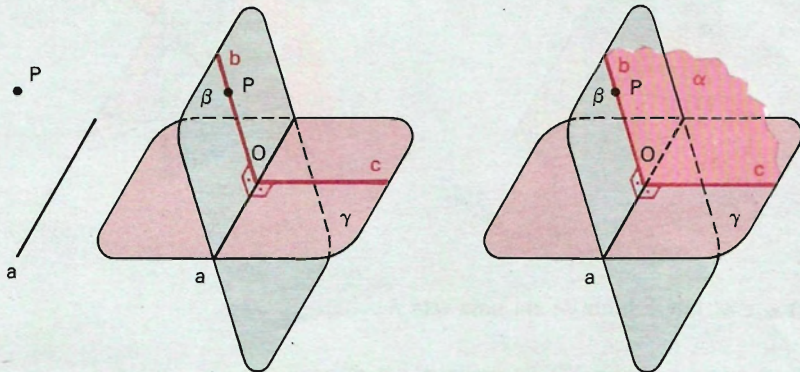
**1ª parte: Existência**

No 1º caso ( $P \notin a$ ).





a) Construção:



- 1º) Tomamos o plano  $\beta = (a, P)$  e um plano  $\gamma$ , contendo a reta  $a$ , distinto de  $\beta$ .
- 2º) Em  $\beta$ , pelo ponto  $P$  traçamos a reta  $b$  perpendicular à reta  $a$ . Seja  $O$  a interseção de  $b$  com  $a$ .  
Em  $\gamma$ , construímos a reta  $c$ , passando por  $O$ , perpendicular à reta  $a$ .
- 3º) As retas  $b$  e  $c$  determinam um plano  $\alpha = (b, c)$  pedido.

b) Prova:

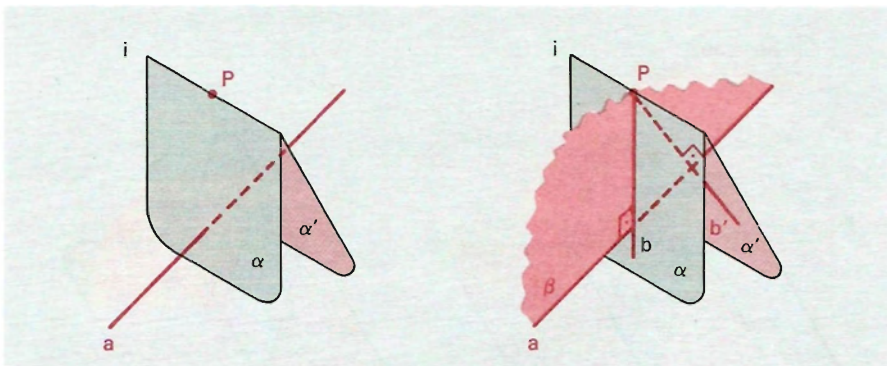
- 1º) O plano  $\alpha = (b, c)$  passa por  $P$ , pois a reta  $b$  foi conduzida por  $P$ .
- 2º)  $(a \perp b, a \perp c; b \cap c = \{O\}; b \subset \alpha, c \subset \alpha) \Rightarrow a \perp \alpha$ .

Logo, existe pelo menos um plano ( $\alpha$ ) passando por  $P$ , perpendicular à reta  $a$ .  
No 2º caso ( $P \in a$ ), a construção é análoga, sendo  $\beta$  e  $\gamma$  planos distintos quaisquer contendo a reta  $a$ .

**2ª parte: Unicidade**

No 1º caso ( $P \notin a$ ).

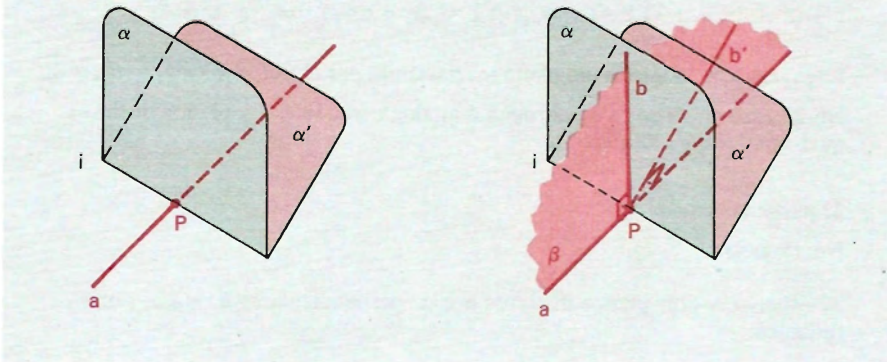
Se existissem dois planos distintos  $\alpha$  e  $\alpha'$  perpendiculares à reta  $a$ , por  $P$ , teríamos:



- 1)  $\alpha$  e  $\alpha'$  interceptam-se em uma reta  $i$ .
- 2) A reta  $a$  e o ponto  $P$  determinam um plano  $\beta$  que não contém  $i$ .
- 3) O plano  $\beta$  intercepta  $\alpha$  em uma reta  $b$ , perpendicular à reta  $a$ . O plano  $\beta$  intercepta  $\alpha'$  em uma reta  $b'$ , perpendicular à reta  $a$ .
- 4) Em  $\beta$ , as retas  $b$  e  $b'$  são concorrentes em  $P$  e ambas perpendiculares à reta  $a$ , o que é absurdo, pois num plano, por um ponto, passa uma única reta perpendicular a uma reta dada.

Logo, o plano perpendicular à reta  $a$  passando por  $P$  é único.

No 2º caso ( $P \in a$ ), o procedimento é análogo, sendo  $\beta$  um plano qualquer que passa por  $a$ .

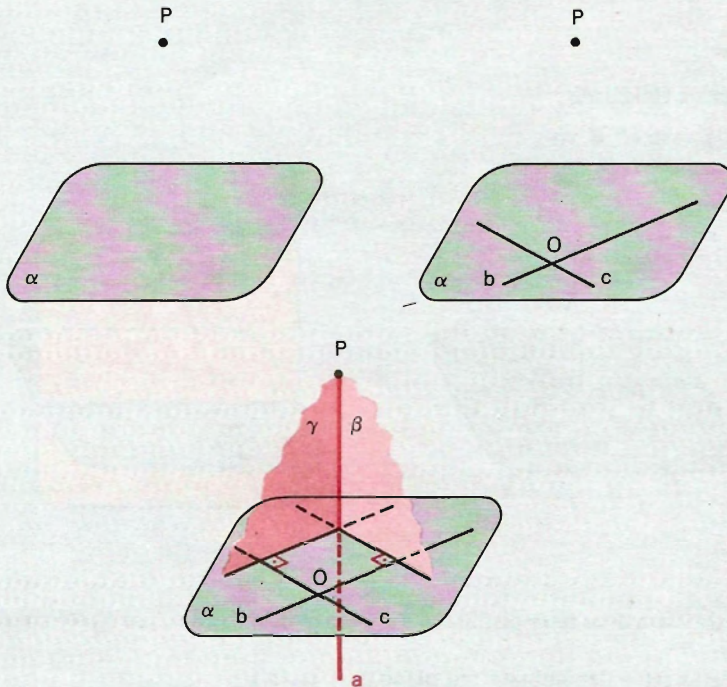


**79. Existência e unicidade da reta perpendicular ao plano por um ponto**

Por um ponto  $P$  pode-se conduzir uma única reta perpendicular a um plano  $\alpha$ .

**Solução***1.º caso:*  $P \notin \alpha$ *2.º caso:*  $P \in \alpha$ **1.ª parte:** ExistênciaNo 1.º caso ( $P \notin \alpha$ ).

a) Construção:



- 1.º) Tomamos em  $\alpha$  duas retas  $b$  e  $c$  concorrentes num ponto  $O$ .
- 2.º) Consideremos por  $P$  os planos  $\beta$  perpendicular à reta  $b$  e  $\gamma$  perpendicular à reta  $c$  (como ensina o exercício anterior).
- 3.º) Os planos  $\beta$  e  $\gamma$  são distintos (pois são respectivamente perpendiculares a duas retas  $b$  e  $c$  concorrentes) e têm o ponto  $P$  comum. Logo, eles se interceptam segundo uma reta  $a$ , que é a reta pedida.

b) Prova:

A reta  $a$  passa por  $P$ , pois é a interseção dos planos  $\beta$  e  $\gamma$  conduzidos por  $P$ .

$$(b \perp \beta, a \subset \beta) \implies b \perp a \quad (c \perp \gamma, a \subset \gamma) \implies c \perp a$$

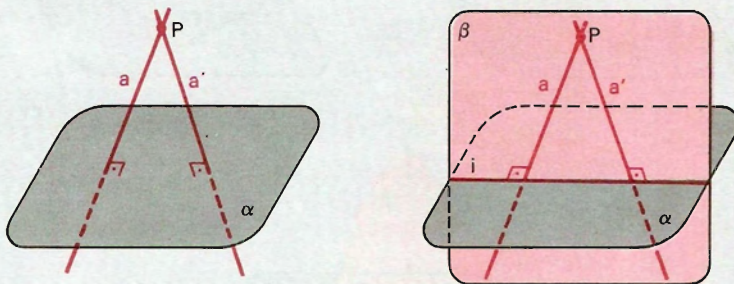
$$(a \perp b, a \perp c; b \cap c = \{O\}; b \subset \alpha, c \subset \alpha) \implies a \perp \alpha$$

Lógo, existe pelo menos uma reta ( $a$ ) passando por  $P$ , perpendicular ao plano  $\alpha$ .

No 2º caso ( $P \in \alpha$ ), a construção é análoga, bastando tomar em  $\alpha$  as retas  $b$  e  $c$  concorrentes no ponto  $P$ .

**2ª parte: Unicidade**

No 1º caso ( $P \notin \alpha$ ).



Se existissem duas retas distintas  $a$  e  $a'$  perpendiculares a  $\alpha$ , por  $P$ , teríamos:

- 1) Essas retas determinam um plano  $\beta = (a, a')$ .
- 2) O plano  $\beta$  intercepta  $\alpha$  em uma reta  $i$ .
- 3) Em  $\beta$  temos duas retas distintas  $a$  e  $a'$ , passando por um ponto  $P$  e perpendiculares a uma reta  $i$ , o que é absurdo.

Lógo, a reta perpendicular ao plano  $\alpha$ , passando por  $P$ , é única.

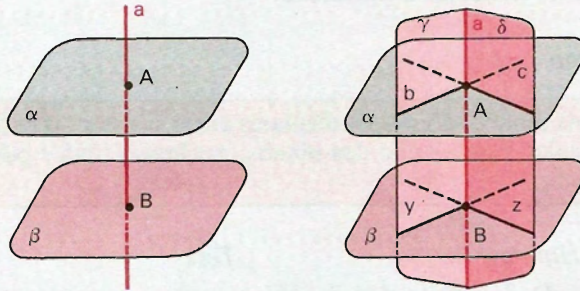
No 2º caso ( $P \in \alpha$ ), o procedimento é idêntico ao executado para  $P \notin \alpha$ .

**80. Relacionamento entre paralelismo e perpendicularismo**

- a) Se dois planos são perpendiculares a uma mesma reta, então eles são paralelos entre si.
- b) Se dois planos são paralelos, então toda reta perpendicular a um deles é perpendicular ao outro.

**Solução**

*Hipótese*  $(\alpha \parallel \beta, a \perp \alpha) \Rightarrow a \perp \beta$  *Tese*



*Demonstração*

1º) Se  $\alpha \parallel \beta$ , sendo  $\alpha = \beta$ , temos:  $(\alpha = \beta, a \perp \alpha) \Rightarrow a \perp \beta$ .

2º) Se  $\alpha \parallel \beta$ , sendo  $\alpha \cap \beta = \emptyset$ , vem:

- 1. A reta  $a$  que intercepta  $\alpha$  num ponto  $A$ , também intercepta  $\beta$  num ponto  $B$ .
- 2. Consideremos um plano  $\gamma$  passando pela reta  $a$ . O plano  $\gamma$  intercepta  $\alpha$  numa reta  $b$  e intercepta  $\beta$  numa reta  $y$  e ainda  $b \parallel y$  (pois  $\alpha \parallel \beta$ ).

Consideremos outro plano  $\delta$ , distinto de  $\gamma$ , passando pela reta  $a$ . O plano  $\delta$  intercepta  $\alpha$  numa reta  $c$  e intercepta  $\beta$  numa reta  $z$  e ainda  $c \parallel z$  (pois  $\alpha \parallel \beta$ ).

- 3.  $(a \perp \alpha \text{ em } A; b \subset \alpha, A \in b; c \subset \alpha, A \in c) \Rightarrow (a \perp b \text{ e } a \perp c)$ .
- 4. Em  $\gamma$ , temos:  $(a \perp b, b \parallel y) \Rightarrow a \perp y$ .  
Em  $\delta$ , temos:  $(a \perp c, c \parallel z) \Rightarrow a \perp z$ .
- 5.  $(a \perp y, a \perp z; y \cap z = \{B\}; y \subset \beta, z \subset \beta) \Rightarrow a \perp \beta$ .

- c) Se duas retas são paralelas, então todo plano perpendicular a uma delas é perpendicular à outra.
- d) Se duas retas são perpendiculares a um mesmo plano, então elas são paralelas entre si.

**81.** Duas retas, respectivamente perpendiculares a dois planos paralelos, são paralelas.

**82.** Dois planos, respectivamente perpendiculares a duas retas paralelas, são paralelos.

## II. Planos perpendiculares

### 41. Definição

Um plano  $\alpha$  é perpendicular a um plano  $\beta$  se, e somente se,  $\alpha$  contém uma reta perpendicular a  $\beta$ .

A existência de um plano perpendicular a outro baseia-se na existência de uma reta perpendicular a um plano.

### 42. Teorema

Se dois planos são perpendiculares entre si e uma reta de um deles é perpendicular à interseção dos planos, então essa reta é perpendicular ao outro lado.

*Hipótese*

*Tese*

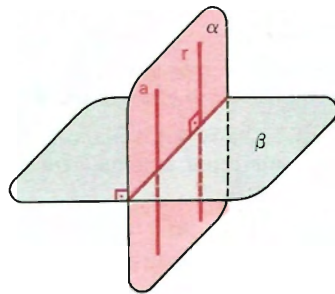
$$(\alpha \perp \beta, i = \alpha \cap \beta, r \subset \alpha, r \perp i) \Rightarrow r \perp \beta$$

*Demonstração*

Se  $\alpha \perp \beta$ , então  $\alpha$  contém uma reta  $a$ , perpendicular a  $\beta$ . Essa reta  $a$  é, então, perpendicular a  $i$ .

$$\text{Em } \alpha, \text{ temos: } (a \perp i, r \perp i) \Rightarrow a \parallel r$$

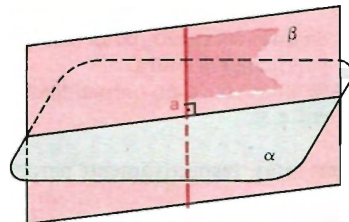
Agora, se  $a \parallel r$  e sendo  $a \perp \beta$ , vem que  $r \perp \beta$ .



### 43. Observações

1ª) Pela definição, se uma reta é perpendicular a um plano, qualquer outro plano que a contenha é perpendicular ao primeiro.

$$(a \perp \alpha, \beta \supset a) \Rightarrow \beta \perp \alpha$$



2ª) Condição necessária e suficiente:

Reunindo os resultados acima, podemos formular o seguinte enunciado:

Uma condição necessária e suficiente para que dois planos secantes sejam perpendiculares é que toda reta de um deles, perpendicular à interseção, seja perpendicular ao outro.

3º) Planos oblíquos:

Dois planos secantes, não perpendiculares, são ditos planos oblíquos.

## EXERCÍCIOS

- 83.** Se um plano  $\alpha$  contém uma reta  $a$ , perpendicular a um plano  $\beta$ , então  $\beta$  contém uma reta perpendicular a  $\alpha$ .
- 84.** Se uma reta  $a$  está num plano  $\alpha$ , perpendicular a uma reta  $b$ , então a reta  $b$  também está num plano perpendicular à reta  $a$ .
- 85.** Se dois planos são perpendiculares entre si e uma reta perpendicular a um deles tem um ponto comum com o outro, então essa reta está contida nesse outro plano.

### Solução

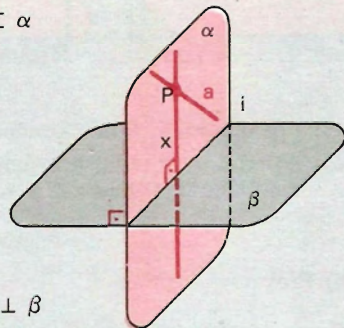
*Hipótese*

*Tese*

$$(\alpha \perp \beta, a \perp \beta, P \in a, P \in \alpha) \Rightarrow a \subset \alpha$$

*Demonstração*

Consideremos em  $\alpha$ , por  $P$ , a reta  $x$ , perpendicular à interseção  $i$  de  $\alpha$  e  $\beta$ . Notemos que  $x \subset \alpha$ .



$$(\alpha \perp \beta, i = \alpha \cap \beta, x \subset \alpha, x \perp i) \Rightarrow x \perp \beta$$

$$(P \in a, a \perp \beta, P \in x, x \perp \beta) \Rightarrow a = x$$

$$(a = x, x \subset \alpha) \Rightarrow a \subset \alpha$$

- 86. Se dois planos são perpendiculares entre si, toda reta perpendicular a um deles é paralela ou está contida no outro.
- 87. Se dois planos são paralelos, todo plano perpendicular a um deles é perpendicular ao outro.
- 88. Se uma reta  $a$  e um plano  $\alpha$  são paralelos, todo plano  $\beta$ , perpendicular à reta  $a$ , também é perpendicular ao plano  $\alpha$ .

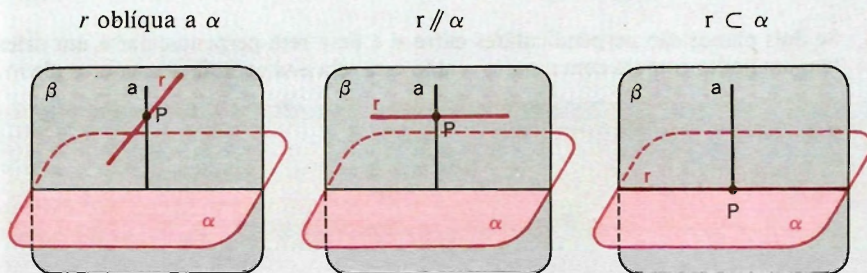
**89. Existência e unicidade**

Por uma reta  $r$  não perpendicular a um plano  $\alpha$ , existe um único plano  $\beta$  perpendicular a  $\alpha$ .

**Solução**

1ª parte: Existência

a) Construção:



- 1º) Por um ponto  $P$  de  $r$  conduzimos a reta  $a$  perpendicular ao plano  $\alpha$ .
- 2º) As retas  $a$  e  $r$  são concorrentes ( $a \perp \alpha$  e  $r \perp \alpha$ ) e então determinam um plano  $\beta$ . O plano  $\beta = (a, r)$  é o plano construído.

b) Prova:

O plano  $\beta$  contém a reta  $a$  e, como  $a$  é perpendicular ao plano  $\alpha$ , resulta que o plano  $\beta = (a, r)$  é perpendicular ao plano  $\alpha$ .

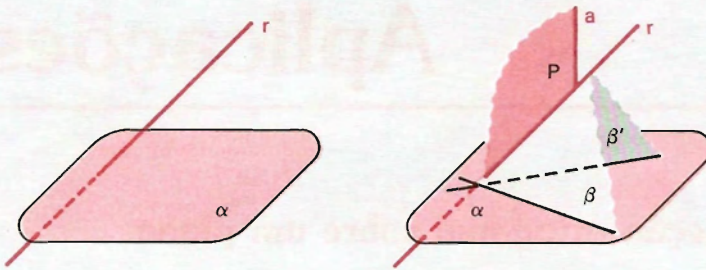




**2ª parte: Unicidade**

Se existissem dois planos distintos  $\beta$  e  $\beta'$ , perpendiculares a  $\alpha$ , por  $r$ , teríamos:

- 1) Uma reta  $a$ , perpendicular a  $\alpha$  por um ponto  $P$  de  $r$ , está contida em  $\beta$  e em  $\beta'$ .
- 2) Duas retas  $a$  e  $r$  concorrentes em  $P$  estão determinando dois planos distintos  $\beta$  e  $\beta'$ , o que é absurdo, pois contraria um teorema de determinação de plano.



Logo, o plano perpendicular ao plano  $\alpha$ , passando por uma reta  $r$  não perpendicular a  $\alpha$ , é único.

- 90.** Se um plano é perpendicular a dois planos secantes, então ele é perpendicular à interseção desses planos.
- 91.** Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):
- a) Se dois planos são secantes, então eles são perpendiculares.
  - b) Se dois planos são perpendiculares, então eles são secantes.
  - c) Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles é perpendicular ao outro.
  - d) Se uma reta é perpendicular a um plano, por ela passa um único plano, perpendicular ao plano dado.
  - e) Dois planos perpendiculares a um terceiro são perpendiculares entre si.
  - f) Se dois planos são perpendiculares a um terceiro, então eles são paralelos.
  - g) Se dois planos são perpendiculares, então toda reta perpendicular a um deles é paralela ao outro ou está contida neste outro.
  - h) Se dois planos são paralelos, todo plano perpendicular a um deles é perpendicular ao outro.
  - i) Uma reta e um plano são paralelos. Se um plano é perpendicular ao plano dado, então ele é perpendicular à reta.
  - j) Por uma reta passa um plano perpendicular a um plano dado.
  - k) Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles forma ângulo reto com qualquer reta do outro.

## CAPÍTULO IV

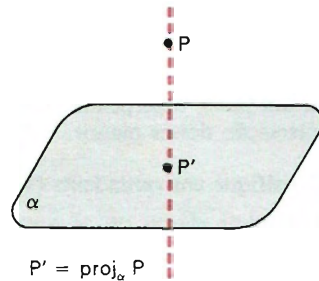
# Aplicações

### I. Projeção ortogonal sobre um plano

#### 44. Projeção de um ponto

##### Definição

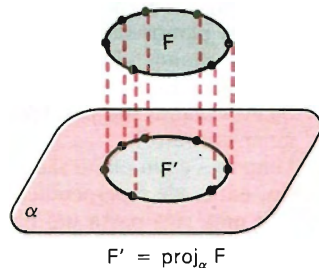
Chama-se projeção ortogonal de um ponto sobre um plano ao pé da perpendicular ao plano conduzida pelo ponto. O plano é dito plano de projeção e a reta é a reta projetante do ponto.



#### 45. Projeção de uma figura

##### Definição

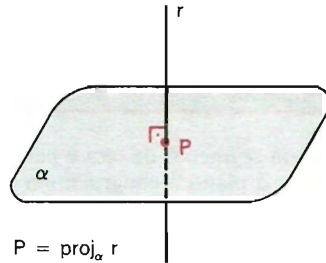
Chama-se projeção ortogonal de uma figura sobre um plano ao conjunto das projeções ortogonais dos pontos dessa figura sobre o plano.



### 46. *Projeção de uma reta*

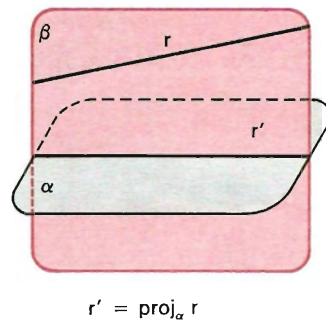
Com base na definição anterior, temos:

a) Se a reta é perpendicular ao plano, sua projeção ortogonal sobre o plano é o traço da reta no plano.



b) Se a reta não é perpendicular ao plano, temos a particular definição seguinte:

Chama-se projeção ortogonal de uma reta  $r$ , não perpendicular a um plano  $\alpha$ , sobre esse plano, ao traço em  $\alpha$ , do plano  $\beta$ , perpendicular a  $\alpha$ , conduzido por  $r$ .

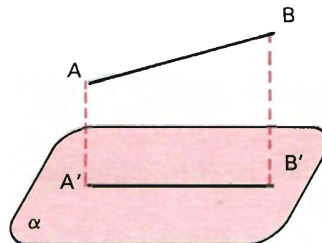


$\alpha$  é o plano de projeção e  $\beta$  é o plano projetante de  $r$ .

### 47. *Projeção de um segmento de reta*

#### *Definição*

Chama-se projeção ortogonal sobre um plano  $\alpha$  de um segmento  $\overline{AB}$ , contido numa reta não perpendicular a  $\alpha$ , ao segmento  $\overline{A'B'}$  onde  $A' = \text{proj}_{\alpha} A$  e  $B' = \text{proj}_{\alpha} B$ .

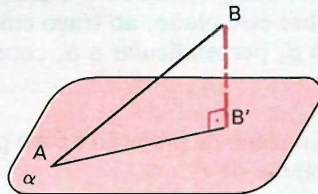
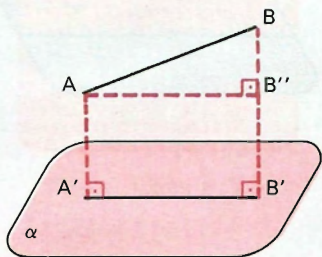


# EXERCÍCIOS

- 92.** Se um segmento de reta é paralelo a um plano, então a sua projeção ortogonal sobre o plano é congruente a ele.
- 93.** A projeção ortogonal de um segmento oblíquo a um plano, sobre esse plano, é menor que o segmento.

**Solução**

$$\begin{array}{ccc} \text{Hipótese} & & \text{Tese} \\ (\overleftrightarrow{AB} \text{ oblíqua a } \alpha, \overline{A'B'} = \text{proj}_{\alpha} \overline{AB}) & \Rightarrow & (\overline{A'B'} < \overline{AB}) \end{array}$$



*Demonstração*

Por  $A$  conduzimos uma reta paralela à reta  $\overleftrightarrow{A'B'}$  que intercepta a reta projetante de  $B$  em  $B''$ .

$$\left. \begin{array}{l} AA'B'B'' \text{ é retângulo} \Rightarrow \overline{A'B'} \equiv \overline{AB''} \\ \triangle AB''B \text{ é retângulo em } B' \Rightarrow \overline{AB''} < \overline{AB} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{A'B'} < \overline{AB}$$

Se uma das extremidades, por exemplo  $A$ , pertence ao plano de projeção, temos:

$$\triangle AB'B \text{ é retângulo em } B' \Rightarrow \overline{AB'} < \overline{AB} \Rightarrow \overline{A'B'} < \overline{AB}.$$

**94.** Classifique em verdadeiro ( $V$ ) ou falso ( $F$ ):

- A projeção ortogonal de um ponto sobre um plano é um ponto.
- A projeção ortogonal de uma reta sobre um plano é uma reta.
- A projeção ortogonal de um segmento sobre um plano é sempre um segmento.
- A projeção ortogonal de um segmento oblíquo a um plano, sobre o plano, é menor que o segmento.
- A projeção ortogonal, sobre um plano, de um segmento contido numa reta, não perpendicular ao plano, é menor que o segmento ou congruente a ele.
- Se um segmento tem projeção ortogonal congruente a ele, então ele é paralelo ao plano de projeção ou está contido nele.
- Se dois segmentos são congruentes, então suas projeções ortogonais sobre qualquer plano são congruentes.
- Se dois segmentos não congruentes são oblíquos a um plano, então a projeção ortogonal, sobre o plano, do maior deles é maior.
- A projeção ortogonal de um triângulo, sobre um plano, é sempre um triângulo.

**95.** Classifique em verdadeiro ( $V$ ) ou falso ( $F$ ):

- Se as projeções ortogonais de duas retas, sobre um plano, são paralelas, então as retas são paralelas.
- Dois segmentos paralelos não perpendiculares ao plano de projeção têm projeções paralelas.
- Se os planos projetantes de duas retas não perpendiculares ao plano de projeção são paralelos, então as projeções dessas retas são paralelas.
- Se dois planos são perpendiculares, as projeções dos pontos de um deles sobre o outro é o traço dos planos.
- A projeção ortogonal de um ângulo sobre um plano pode ser uma semi-reta.
- A projeção ortogonal de um ângulo sobre um plano pode ser um segmento de reta.
- A projeção ortogonal de um ângulo sobre um plano pode ser uma reta.

**96.** Quais as posições relativas das projeções ortogonais, sobre um plano, de duas retas concorrentes?

**97.** Quais são as posições relativas das projeções ortogonais, sobre um plano, de duas retas reversas?

**98.** Se duas retas formam ângulo reto, uma delas é paralela ou está contida no plano de projeção e a outra não é perpendicular a esse plano, então as projeções ortogonais das retas, sobre o plano, são perpendiculares.

### Solução

<i>Hipótese</i>	<i>Tese</i>
$\left( \begin{array}{l} r \perp s; s // \alpha \text{ ou } s \subset \alpha; \\ r \text{ não é perpendicular a } \alpha; \\ r' = \text{proj}_{\alpha} r, s' = \text{proj}_{\alpha} s \end{array} \right)$	$\implies (r' \perp s')$

*Demonstração*

$$(s // \alpha \text{ ou } s \subset \alpha, s' = \text{proj}_{\alpha} s) \Rightarrow s' // s$$

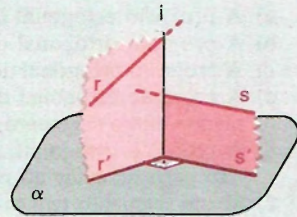
$$(s' // s, r \perp s) \Rightarrow r \perp s'$$

Sendo  $i$  a interseção dos planos projetantes de  $r$  e de  $s$ , temos:

$$(i \perp \alpha, s' \subset \alpha) \Rightarrow i \perp s'$$

$$(s' \perp r, s' \perp i, r \text{ e } i \text{ concorrentes}) \Rightarrow s' \perp (r, i)$$

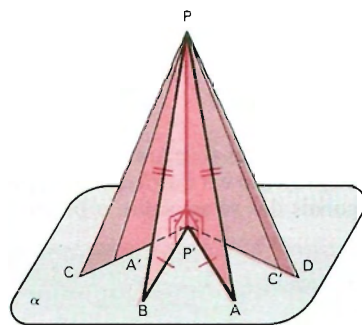
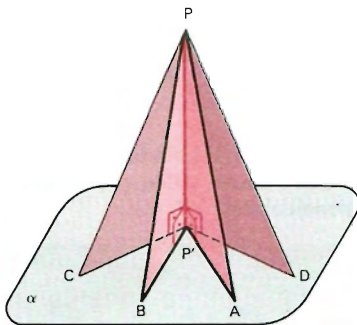
Sendo  $s' \perp (r, i)$ , então  $s' \perp r' \subset (r, i)$  e  $r'$  é concorrente com  $s'$ .



- 99. Se as projeções de duas retas, sobre um plano, são perpendiculares, uma delas é paralela ou está contida no plano de projeção e a outra não é perpendicular àquele plano, então as duas retas formam ângulo reto.
- 100. Se duas retas formam ângulo reto, suas projeções ortogonais, sobre um plano, são perpendiculares e uma delas é oblíqua àquele plano, então a outra é paralela ou está contida no plano.

## II. Segmento perpendicular e segmentos oblíquos a um plano por um ponto

Se por um ponto  $P$  não pertencente a um plano  $\alpha$  conduzimos os segmentos  $\overline{PP'}$ ,  $\overline{PA}$ ,  $\overline{PB}$ ,  $\overline{PC}$ ,  $\overline{PD}$ , ..., o primeiro perpendicular e os demais oblíquos a  $\alpha$ , com as extremidades  $P'$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , ... em  $\alpha$ , então:



1º)

O segmento perpendicular é *menor* que qualquer dos oblíquos.

*Demonstração*

De fato,  $\overline{PP'}$  é cateto de triângulos retângulos, que têm, respectivamente,  $\overline{PA}$ ,  $\overline{PB}$ ,  $\overline{PC}$ ,  $\overline{PD}$ , ... como hipotenusa.

Logo,  $\overline{PP'} < \overline{PA}$ ,  $\overline{PP'} < \overline{PB}$ ,  $\overline{PP'} < \overline{PC}$ ,  $\overline{PP'} < \overline{PD}$ , ... .  
2º)

a) Segmentos oblíquos com *projeções congruentes* são *congruentes*.

$$\overline{P'A} \equiv \overline{P'B} \Rightarrow \overline{PA} \equiv \overline{PB}$$

*Demonstração*

( $\overline{PP'}$  comum,  $\widehat{PP'A} \equiv \widehat{PP'B}$ ,  $\overline{P'A} \equiv \overline{P'B}$ )  $\Rightarrow \triangle PP'A \equiv \triangle PP'B \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \overline{PA} \equiv \overline{PB}$ .

b) Segmentos oblíquos *congruentes* têm *projeções congruentes*.

$$\overline{PA} \equiv \overline{PB} \Rightarrow \overline{P'A} \equiv \overline{P'B}$$

*Demonstração*

( $\overline{PP'}$  comum,  $\widehat{PP'A} \equiv \widehat{PP'B}$ ,  $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$ )  $\Rightarrow \triangle PP'A \equiv \triangle PP'B \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \overline{P'A} \equiv \overline{P'B}$ .

3º)

a) De dois segmentos oblíquos de projeções não congruentes, o de *maior projeção é maior*.

$$\overline{P'C} > \overline{P'A} \Rightarrow \overline{PC} > \overline{PA}$$

*Demonstração*

Considerando  $A' \in \overline{P'C}$  tal que  $\overline{P'A'} \equiv \overline{P'A}$ , temos:

$$\overline{P'A'} \equiv \overline{P'A} \Rightarrow \overline{PA'} \equiv \overline{PA}$$

O ângulo  $PA'C$  é obtuso por ser ângulo externo do  $\triangle PP'A'$  em que  $PP'A'$  é reto. Logo, no triângulo  $PA'C$ , temos:  $\widehat{PA'C} > \widehat{PCA'}$  e, como ao maior ângulo está oposto o maior lado, vem que  $\overline{PC} > \overline{PA'}$ , ou seja,  $\overline{PC} > \overline{PA}$ .

b) De dois segmentos oblíquos não congruentes, o maior tem projeção maior.

$$\overline{PC} > \overline{PA} \Rightarrow \overline{P'C} > \overline{P'A}$$

*Demonstração*

Se  $\overline{P'C} \leq \overline{P'A}$ , por casos anteriores, teríamos  $PC \leq PA$ , o que contraria a hipótese. Logo,  $\overline{P'C} > \overline{P'A}$ .

4º)

a) De dois segmentos oblíquos não congruentes, o maior forma com a sua projeção um ângulo menor.

$$\overline{PD} > \overline{PC} \Rightarrow \widehat{PDP'} < \widehat{PCP'}$$

*Demonstração*

$$\overline{PD} > \overline{PC} \Rightarrow \overline{P'D} > \overline{P'C}$$

Tomando um ponto  $C' \in \overline{P'D}$  tal que  $\overline{P'C'} \equiv \overline{P'C}$ , temos:

$$\triangle PP'C \equiv \triangle PP'C' \text{ e daí } \widehat{PCP'} \equiv \widehat{PC'P'}$$

No triângulo  $PC'D$  vem  $\widehat{PDC'} < \widehat{PC'P'}$ , pois, em qualquer triângulo, um ângulo externo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Daí, então:

$$\widehat{PDC'} < \widehat{PC'P'} \Rightarrow \widehat{PDP'} < \widehat{PC'P'} \Rightarrow \widehat{PDP'} < \widehat{PCP'}$$

b) De dois segmentos oblíquos não congruentes, aquele que forma com a sua projeção um ângulo menor é maior.

$$\widehat{PDP'} < \widehat{PCP'} \Rightarrow \overline{PD} > \overline{PC}$$

*Demonstração*

Se  $\overline{PD} \leq \overline{PC}$ , por congruência de triângulos ou pelo item anterior, teríamos:  $\widehat{PDP'} \geq \widehat{PCP'}$ , o que contraria a hipótese. Logo,  $\overline{PD} > \overline{PC}$ .

**Nota:** É importante ressaltar que nas propriedades acima todos os segmentos têm uma extremidade em  $P$  e a outra em  $\alpha$ .



### III. Distâncias geométricas

#### 48. Distância entre dois pontos

##### Definição

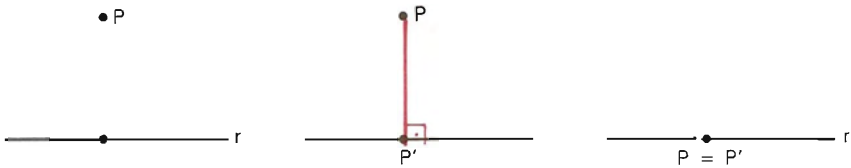
Chama-se distância entre dois pontos distintos  $A$  e  $B$  ao segmento de reta  $\overline{AB}$  ou a qualquer segmento congruente a  $\overline{AB}$ . Se  $A = B$ , a distância entre  $A$  e  $B$  é nula.

Indicação:  $d_{A,B}$  = distância entre  $A$  e  $B$ .

#### 49. Distância entre um ponto e uma reta

##### Definição

Chama-se distância entre um *ponto* e uma *reta* à distância entre esse ponto e o pé da perpendicular à reta conduzida pelo ponto.



distância entre  $P$  e  $r = d_{P,P'}$   
( $d_{P,r} = d_{P,P'}$ )

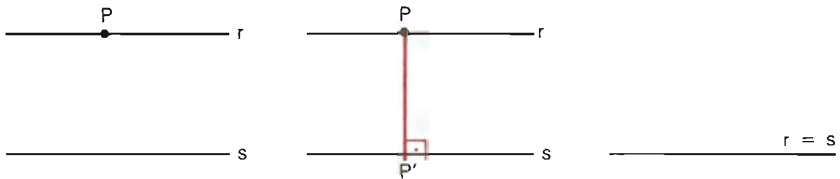
$P \in r$ , distância nula  
( $d_{P,r}$  é nula)

**Nota:** É fundamental diferenciar o conceito de distância entre o *ponto*  $P$  e a *reta*  $r$  da distância entre o *ponto*  $P$  e um *ponto* da *reta*  $r$ .

#### 50. Distância entre duas retas paralelas

##### Definição

Chama-se distância entre *duas retas paralelas* à distância entre um ponto qualquer de uma delas e a outra reta.



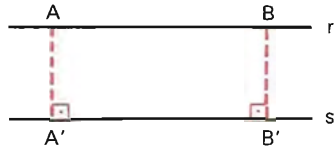
distância entre  $r$  e  $s =$  distância entre  $P$  e  $s = d_{P,P'}$   
( $d_{r,s} = d_{P,s} = d_{P,P'}$ )

$r = s$ , distância nula  
( $d_{r,s}$  é nula)

A definição anterior é justificada pela seguinte propriedade:

Se duas retas distintas são paralelas, os pontos de uma estão a igual distância (são equidistantes) da outra.

De fato, tomando dois pontos distintos  $A$  e  $B$  em  $r$  e achando as distâncias  $\overline{AA'}$  entre  $A$  e  $s$ , e  $\overline{BB'}$  entre  $B$  e  $s$ , o retângulo  $AA'B'B$  nos dá:  $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$ , isto é,  $d_{A,s} = d_{B,s}$ .

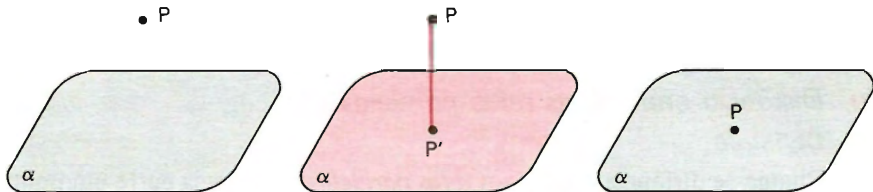


No caso de as retas serem coincidentes, todas as distâncias acima são nulas.

### 51. Distância entre ponto e plano

#### Definição

Chama-se distância entre um *ponto* e um *plano* à distância entre esse ponto e o pé da perpendicular ao plano conduzida pelo ponto.



distância entre  $P$  e  $\alpha = d_{P,P'}$   
 $(d_{P,\alpha} = d_{P,P'})$

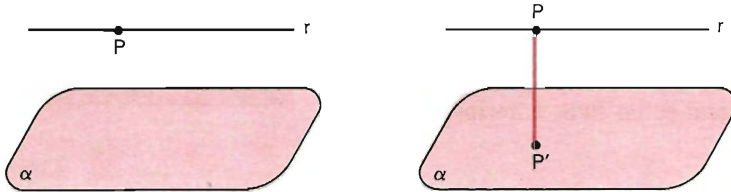
$P \in \alpha$ , distância nula  
 $(d_{P,\alpha} \text{ é nula})$

A distância entre um ponto  $P$  e um plano  $\alpha$  é o segmento de reta  $\overline{PP'}$ , perpendicular ao plano, com uma extremidade no ponto  $P$  e a outra  $P'$  no plano  $\alpha$  ou qualquer segmento congruente a  $\overline{PP'}$ . O segmento  $\overline{PP'}$  (ou qualquer segmento congruente a ele) é indicado para ser a distância entre  $P$  e  $\alpha$ , porque de todos os segmentos com uma extremidade em  $P$  e a outra em  $\alpha$ ,  $\overline{PP'}$  é o menor. Logo, a distância entre o ponto  $P$  e o plano  $\alpha$  é a menor das distâncias entre o ponto  $P$  e os pontos de  $\alpha$ .

### 52. Distância entre reta e plano paralelos

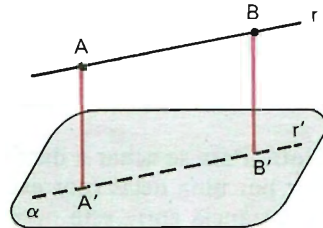
#### Definição

Chama-se distância entre uma *reta* e um *plano* paralelos à distância entre um ponto qualquer da reta e o plano.



A definição acima é justificada pela propriedade que segue:

Se uma reta e um plano são paralelos, os pontos da reta estão a igual distância (são equidistantes) do plano.



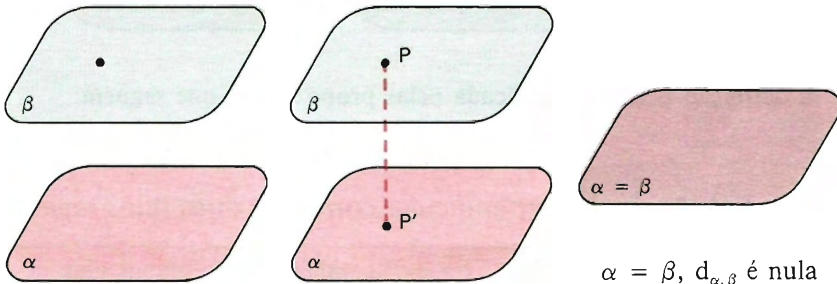
$$AA'B'B \text{ é retângulo} \Rightarrow \overline{AA'} \equiv \overline{BB'} \Rightarrow d_{A,\alpha} = d_{B,\alpha}$$

**Nota:** Se uma reta está contida num plano, a distância entre eles é nula.

### 53. Distância entre planos paralelos

#### Definição

Chama-se distância entre *dois planos* paralelos à distância entre um ponto qualquer de um deles e o outro plano.



$$d_{\alpha,\beta} = d_{P,\alpha} = d_{P',\beta}$$

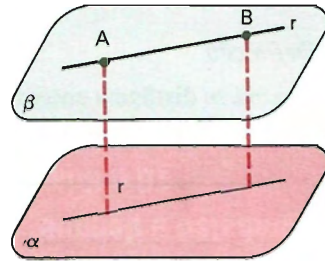
$$\alpha = \beta, d_{\alpha,\beta} \text{ é nula}$$

A propriedade que justifica a definição é:

Se dois planos distintos são paralelos, os pontos de um deles são equidistantes do outro.

$$(A \neq B; A, B \in \beta) \Rightarrow r = \overleftrightarrow{AB} \subset \beta$$

Recai-se no item anterior.



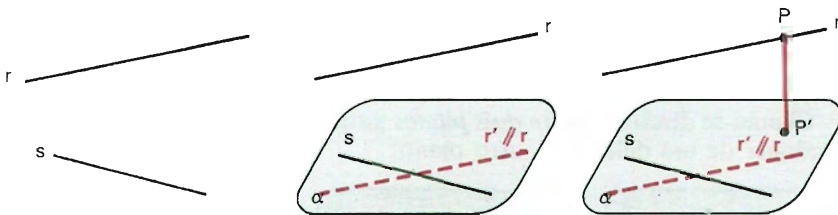
### 54. Distância entre duas retas reversas

*Definição*

Chama-se distância entre *duas retas reversas* à distância entre um ponto qualquer de uma delas e o plano que passa pela outra e é paralelo à primeira.

**Nota:** Para se achar a distância de duas retas reversas ( $r$  e  $s$ ) é suficiente conduzir por uma delas (por exemplo  $s$ ) um plano ( $\alpha$ ) paralelo à outra ( $r$ ) e obter a distância entre esta outra reta ( $r$ ) e o plano ( $\alpha$ ).

$$d_{r,s} = d_{r,\alpha} = d_{P,\alpha} = d_{P,P'}$$



A definição acima é justificada pelas propriedades que seguem:

### 55. 1ª) Existência da perpendicular comum a duas retas reversas

Dadas duas retas reversas  $r$  e  $s$ , existe uma reta  $x$ , perpendicular comum a essas retas ( $x \perp r, x \perp s$ ).



2º caso:  $A \neq A'$  e  $B \neq B'$

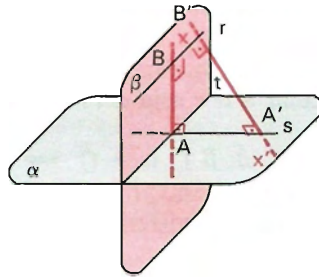
De  $x' \perp r$  e  $x' \perp s$  vem:

$$x' \perp r, t \parallel r \Rightarrow x' \perp t$$

$$(x' \perp t, x' \perp s) \Rightarrow x' \perp (s, t)$$

$$\Rightarrow x' \perp \alpha$$

$$(x' \perp \alpha, x \perp \alpha) \Rightarrow x \parallel x'$$



As retas  $x$  e  $x'$ , sendo paralelas e distintas, determinam um plano que contém  $r$  (pois contém  $B$  e  $B'$ ) e contém  $s$  (pois contém  $A$  e  $A'$ ), o que é absurdo, pois  $r$  e  $s$  são reversas.

Logo, a reta  $x$ , perpendicular comum a  $r$  e  $s$  reversas, é única.

57.

3ª) Dadas duas retas reversas  $r$  e  $s$ , de todos os segmentos que têm uma extremidade em cada uma das retas, o menor é aquele da perpendicular comum.

**Nota:** Usaremos nomenclatura e conclusões dos dois itens anteriores.

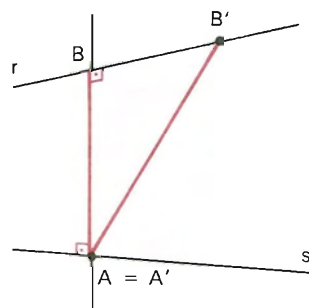
Seja  $\overline{AB}$  o segmento da perpendicular comum e  $\overline{A'B'}$  outro segmento nas condições do enunciado.

Provaremos que  $\overline{AB} < \overline{A'B'}$ .

*Demonstração*

1º caso:  $A = A'$  ou  $B = B'$

Neste caso,  $\overline{A'B'}$  é hipotenusa de um triângulo retângulo que tem  $\overline{AB}$  por cateto, então  $\overline{AB} < \overline{A'B'}$ .



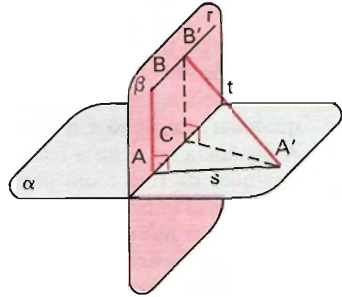
2º caso:  $A \neq A'$  e  $B \neq B'$

Conduzindo  $\overleftrightarrow{B'C} \perp t$  com  $C \in t$

$$\overleftrightarrow{B'C} \perp \alpha \text{ e } \overline{CB'} \equiv \overline{AB}$$

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{B'C} \perp \alpha &\Rightarrow \overleftrightarrow{B'C} \perp \overleftrightarrow{CA'} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \triangle B'CA' \text{ é retângulo em } C \Rightarrow \\ &\Rightarrow \overline{CB'} < \overline{A'B'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\overline{CB'} < \overline{A'B'}, \overline{CB'} \equiv \overline{AB}) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{AB} < \overline{A'B'} \end{aligned}$$



**58.** 4ª) A distância entre  $r$  e  $\alpha$  é igual à distância entre  $A$  e  $B$

De fato, pela definição de distância entre reta e plano paralelos e sendo  $x = \overleftrightarrow{AB}$  perpendicular a  $\alpha$ , vem:

$$d_{r,\alpha} = d_{B,\alpha} = d_{B,A}$$

### Observações

1ª) Com construções análogas podemos concluir que a distância entre  $s$  e o plano por  $r$ , paralelo a  $s$ , é igual à distância entre  $A$  e  $B$ , o que completa a justificativa da definição dada.

2ª) A distância entre as retas reversas  $s$  e  $r$  é também a distância entre  $A$  e  $B$ , em que  $A$  e  $B$  são as interseções de  $s$  e  $r$  com a reta  $x$ , perpendicular comum a  $r$  e  $s$ .

## EXERCÍCIOS

**101.** Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

- Se  $\overline{PA}$  é um segmento oblíquo a um plano  $\alpha$ , com  $A$  em  $\alpha$ , então a distância entre  $P$  e  $A$  é a distância entre  $P$  e  $\alpha$ .
- A distância entre um ponto e um plano é a distância entre o ponto e qualquer ponto do plano.

- c) A distância entre um ponto e um plano é a reta perpendicular ao plano pelo ponto.
- d) A distância de um ponto  $P$  a um plano  $\alpha$  é a distância de  $P$  ao ponto  $P'$  de interseção de  $\alpha$  com a reta  $r$ , perpendicular a  $\alpha$  por  $P$ .
- e) A distância entre uma reta e um plano paralelos é a distância entre um ponto qualquer do plano e a reta.
- f) A distância entre uma reta e um plano paralelos é a distância entre um ponto qualquer da reta e um ponto qualquer do plano.
- g) A distância entre reta e plano paralelos é a distância entre um ponto qualquer da reta e o plano.
- h) A distância entre dois planos paralelos é a distância entre um ponto qualquer de um e um ponto qualquer do outro.
- i) A distância entre dois planos paralelos distintos é igual à distância entre uma reta de um deles e o outro plano.
- j) A distância entre duas retas reversas é a distância entre um ponto qualquer de uma e a outra reta.
- k) A distância de duas retas reversas é a reta perpendicular comum a essas retas.

**102.** Todo plano que passa pelo ponto médio de um segmento é equidistante das extremidades do segmento.

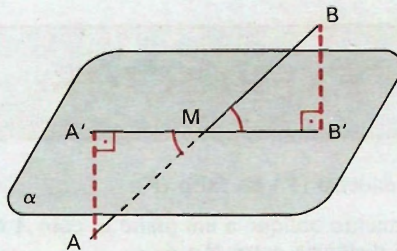
**Solução**

$$\begin{array}{ll} \textit{Hipótese} & \textit{Tese} \\ (\overline{AM} \equiv \overline{MB}, M \in \alpha) & \Rightarrow (d_{\alpha,A} = d_{\alpha,B}) \end{array}$$

*Demonstração*

1º)  $\alpha \supset \overline{AB}$ .

$$\overline{AB} \subset \alpha \Rightarrow d_{\alpha,A} = d_{\alpha,B} = \text{distância nula}$$





2º)  $\alpha \not\perp \overline{AB}$  e  $\alpha$  não é perpendicular a  $\overline{AB}$ .

Conduzindo os segmentos  $\overline{AA'}$  e  $\overline{BB'}$  perpendiculares a  $\alpha$ , com  $A', B' \in \alpha$ , e observando os triângulos coplanares  $AA'M$  e  $BB'M$ , temos:

$$(\hat{A}' \equiv \hat{B}' \text{ (reto)}, \widehat{AMA'} \equiv \widehat{BMB'} \text{ (opostos pelo vértice)}) \implies \hat{A} \equiv \hat{B}$$

$$(\widehat{AA'M} \equiv \widehat{BB'M}, \overline{AM} \equiv \overline{BM}, \hat{A} \equiv \hat{B}) \implies \triangle AA'M \equiv \triangle BB'M \implies \overline{AA'} \equiv \overline{BB'} \implies d_{\alpha,A} = d_{\alpha,B'}$$

3º)  $\alpha \perp AB$  por  $M$ .

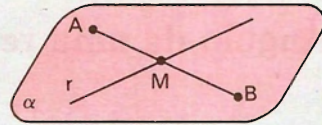
Neste caso  $A' = B' = M$  e então  $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$ , ou seja,  $d_{\alpha,A} = d_{\alpha,B}$ .

- 103.** Todo plano equidistante dos extremos de um segmento passa pelo ponto médio do segmento?
- 104.** Dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$  e uma reta  $r$ , construa um plano que passa por  $r$  e é equidistante de  $A$  e  $B$ . Discuta.

### Solução

1º caso:  $r$  e  $\overleftrightarrow{AB}$  são concorrentes.

a) Se  $r$  passa pelo ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ , qualquer plano que contém  $r$  é solução do problema. Infinitas soluções.



b) Se  $r$  não passa pelo ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ , a solução é o plano  $\alpha = (r, \overleftrightarrow{AB})$ .  $\alpha$  passa por  $r$  e tem distância nula a  $A$  e a  $B$ .

2º caso:  $r$  e  $\overleftrightarrow{AB}$  são paralelas

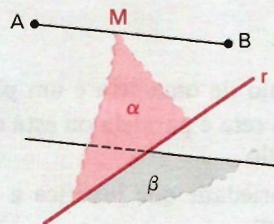
O problema admite infinitas soluções, pois qualquer plano  $\alpha$  que passa por  $r$  é equidistante de  $A$  e  $B$ , visto que  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \alpha$  ou  $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$ .

3º caso:  $r$  e  $\overleftrightarrow{AB}$  são reversas.

O problema admite duas soluções.

1ª) O plano  $\alpha$  determinado por  $r$  e pelo ponto médio  $M$  de  $\overline{AB}$ .

2ª) O plano  $\beta$  que passa por  $r$  e é paralelo à reta  $\overleftrightarrow{AB}$ .



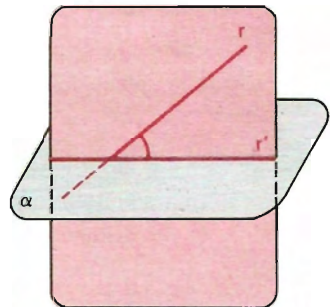
- 105.** Dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$  e uma reta  $r$ , construa um plano equidistante de  $A$  e  $B$  e que seja paralelo à reta  $r$ .
- 106.** Dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$  e uma reta  $r$ , construa um plano equidistante de  $A$  e  $B$  e que seja perpendicular à reta  $r$ .
- 107.** Dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$  e um plano  $\alpha$ , construa um plano equidistante dos dois pontos e que seja paralelo ao plano dado. Discuta.
- 108.** Dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$  e um plano  $\alpha$ , construa um plano equidistante dos dois pontos que seja perpendicular ao plano dado. Discuta.
- 109.** Dados três pontos não colineares  $A$ ,  $B$  e  $C$ , determine os planos tais que cada um deles seja equidistante dos três pontos dados.
- 110.** Dados três pontos não colineares  $A$ ,  $B$  e  $C$ , construa por um ponto  $P$ , um plano equidistante de  $A$ ,  $B$  e  $C$ .
- 111.** Dados quatro pontos não coplanares  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , determine os planos tais que cada um deles seja equidistante dos quatro pontos dados.

## IV. Ângulo de uma reta com um plano

### 59. Definição

Chama-se ângulo de uma reta e um plano oblíquos ao ângulo agudo que a reta forma com a sua projeção ortogonal sobre o plano.

Na figura ao lado o ângulo  $rr'$  é o ângulo entre  $r$  e  $\alpha$ .



O ângulo de uma reta e um plano perpendiculares é reto.

Se uma reta é paralela ou está contida num plano, o ângulo da reta com o plano é nulo.

A propriedade que justifica a definição de ângulo de reta com o plano é a que segue:

## 60. Teorema

Se uma reta é oblíqua a um plano  $\alpha$  e o intercepta em  $A$ , então o ângulo agudo de  $r$  com sua projeção ortogonal  $r'$  sobre  $\alpha$  é menor que o ângulo agudo de  $r$  com qualquer outra reta de  $\alpha$  que passa por  $A$ .

*Hipótese*

*Tese*

$$\left( \begin{array}{l} r \cap \alpha = \{A\}, r' = \text{proj}_{\alpha} r \\ r \text{ não é perpendicular a } \alpha \\ A \in s, s \subset \alpha \end{array} \right) \Rightarrow (r r' \text{ (agudo)} < r s \text{ (agudo)})$$

*Demonstração*

Seja  $P' = \text{proj}_{\alpha} P$  e  $B$  um ponto de  $s$  tal que  $\overline{AB} \equiv \overline{AP'}$ .

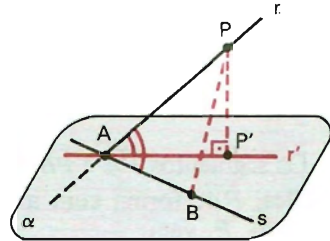
Notemos que  $\overline{PP'} < \overline{PB}$ , pois  $\overline{PP'}$  é perpendicular a  $\alpha$  e  $\overline{PB}$  oblíquo a  $\alpha$ .

Dos triângulos  $PAP'$  e  $PAB$ , vem:

$$(\overline{AP} \text{ comum}, \overline{AP'} \equiv \overline{AB}, \overline{PP'} < \overline{PB}) \Rightarrow$$

$$\widehat{PAP'} < \widehat{PAB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{r r'} \text{ (agudo)} < \widehat{r s} \text{ (agudo)}.$$



## V. Reta de maior declive de um plano em relação a outro

### 61. Definição

Se dois planos  $\alpha$  e  $\beta$  são oblíquos, toda reta de  $\alpha$  perpendicular à interseção dos planos é chamada reta de maior declive de  $\alpha$  em relação a  $\beta$ .

A propriedade que justifica a definição acima é a que segue:

## 62. Teorema

Se dois planos  $\alpha$  e  $\beta$  são oblíquos,  $r$  é a interseção deles, e por um ponto  $P$  de  $\alpha$ , não pertencente a  $r$ , conduzimos duas retas concorrentes,  $a \in b$ , sendo  $a$  perpendicular a  $r$ , então o ângulo  $\hat{a}\hat{\beta}$  é maior que o ângulo  $\hat{b}\hat{\beta}$ .

*Hipótese*

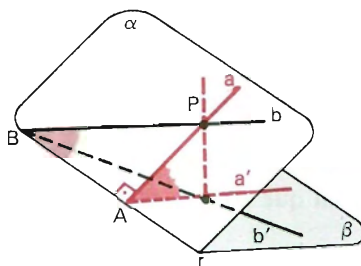
*Tese*

$$\left( \begin{array}{l} r = \alpha \cap \beta, \alpha \text{ não é perpendicular a } \beta, \\ a \subset \alpha, b \subset \alpha, a \cap b = \{P\}, a \perp r, P \notin r \end{array} \right) \Rightarrow (\hat{a}\hat{\beta} > \hat{b}\hat{\beta})$$

*Demonstração*

a) Se a reta  $b$  é paralela à reta  $r$ , então a reta  $b$  é paralela a  $\beta$ . Neste caso o ângulo  $\hat{b}\hat{\beta}$  é nulo e temos  $\hat{a}\hat{\beta} > \hat{b}\hat{\beta}$ .

b) Se  $b$  não é paralela a  $r$ , sendo  $a \cap r = \{A\}$  e  $b \cap r = \{B\}$ , no triângulo  $PAB$  retângulo em  $A$ , temos  $\overline{PA} < \overline{PB}$ .



Os segmentos  $\overline{PA}$  e  $\overline{PB}$  são oblíquos a  $\alpha$ , com  $A$  e  $B$  em  $\alpha$ , então o menor deles,  $\overline{PA}$ , forma com a sua projeção um ângulo maior. Logo, sendo  $P' = \text{proj}_{\alpha} P$ , vem:

$$\overline{PA} < \overline{PB} \Rightarrow \widehat{PAP'} > \widehat{PBP'} \Rightarrow \hat{a}\hat{\beta} > \hat{b}\hat{\beta}.$$

# EXERCÍCIOS

- 112.** Por um ponto  $P$ , de um plano  $\alpha$ , construa uma reta que forme um ângulo  $\theta$  (agudo, dado) com o plano  $\alpha$ .
- 113.** Por um ponto  $P$ , não pertencente a um plano  $\alpha$ , construa uma reta que forme um ângulo  $\theta$  (agudo, dado) com o plano  $\alpha$ .
- 114.** Por um ponto  $P$ , não pertencente a um plano  $\alpha$ , construa um plano  $\beta$ , cuja reta de maior declive forme um ângulo  $\theta$  (agudo, dado) com o plano  $\alpha$ .

## VI. Lugares geométricos

### 63. Definição

*Lugar geométrico* é um conjunto de pontos caracterizado por uma propriedade.

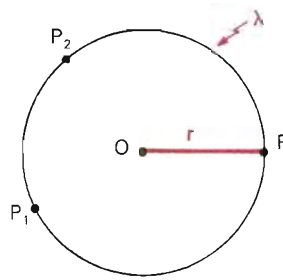
Como todo conjunto definido por uma propriedade de seus elementos, uma figura é um lugar geométrico se:

- todos os seus pontos* têm essa propriedade (todo elemento do conjunto satisfaz a propriedade);
- só os seus pontos* têm essa propriedade (todo elemento que tem a propriedade pertence ao conjunto).

### 64. Circunferência — definição

Dados um plano  $\alpha$ , uma distância  $r$ , não nula, e um ponto  $O \in \alpha$ , chama-se circunferência de centro  $O$  e raio  $r$  o conjunto:

$$\lambda(O, r) = \{P \in \alpha \mid d_{O,P} = r\}.$$



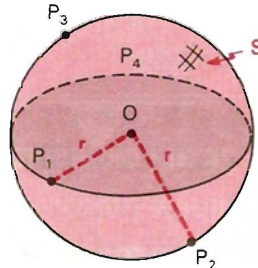
Assim, uma circunferência é um lugar geométrico. *Todos* os seus pontos e *só eles* têm a propriedade de distar  $r$  (raio) de um ponto  $O$  (centro) de seu plano.

### 65. Superfície esférica — definição

Dados um ponto  $O$  e uma distância  $r$ , não nula, chama-se *superfície esférica* de centro  $O$  e raio  $r$  ao lugar geométrico dos pontos que distam  $r$  de  $O$ .

$$S(O, r) = \{P \mid d_{O,P} = r\}$$

Subentende-se nesse caso que os pontos  $P$  são do espaço.



### 66. Esquema prático para lugares geométricos

Para se provar que uma figura  $F$  é o lugar geométrico dos pontos que têm uma propriedade  $p$ , procedemos da seguinte forma:

**1ª parte:** Prova-se que todos os pontos de  $F$  têm a propriedade  $p$ .

$$(\forall X) (X \in F \implies X \text{ tem } p)$$

**2ª parte:** Prova-se que só os pontos de  $F$  têm a propriedade  $p$ .

$$1^\circ \text{ modo: } (\forall Y) (Y \text{ tem } p \implies Y \in F)$$

ou

$$2^\circ \text{ modo: } (\forall Z) (Z \notin F \implies Z \text{ não tem } p).$$

Se o lugar geométrico pedido não for de ponto e sim de outro elemento geométrico, adapta-se o procedimento acima, substituindo-se ponto pelo elemento.

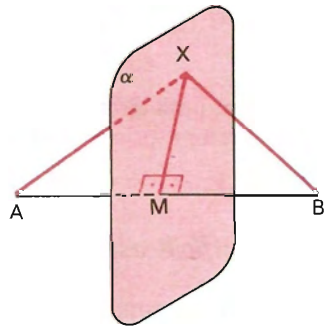
### 67. Exemplos

1º) Estabelecer o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois pontos distintos  $A$  e  $B$ .

#### Solução

Seja  $\alpha$  o plano perpendicular ao segmento  $\overline{AB}$  pelo ponto médio  $M$  de  $\overline{AB}$ .

**1ª parte:** Todos os pontos de  $\alpha$  são equidistantes de  $A$  e  $B$ .



*Hipótese*                      *Tese*

$$(\forall X) (X \in \alpha) \implies (d_{X,A} = d_{X,B})$$

#### Demonstração

Se  $X = M$ , temos:

$$(X = M, \overline{MA} \equiv \overline{MB}) \implies \overline{XA} \equiv \overline{XB} \implies d_{X,A} = d_{X,B}$$

Se  $X \neq M$ , temos:

$$(\overline{AM} \equiv \overline{BM}, \widehat{AMX} \equiv \widehat{BMX}, \overline{MX} \text{ comum}) \implies \implies \triangle XMA \equiv \triangle XMB \implies \overline{XA} \equiv \overline{XB} \implies d_{X,A} = d_{X,B}$$

**2ª parte:** Só os pontos de  $\alpha$  são equidistantes de  $A$  e  $B$ .

*Hipótese* *Tese*  
 $(\forall Y), (d_{Y,A} = d_{Y,B}) \Rightarrow (Y \in \alpha)$

*Demonstração*

Se  $Y \in \overline{AB}$ , temos:

$(Y \in \overline{AB}, \overline{YA} \equiv \overline{YB}) \Rightarrow Y = M$

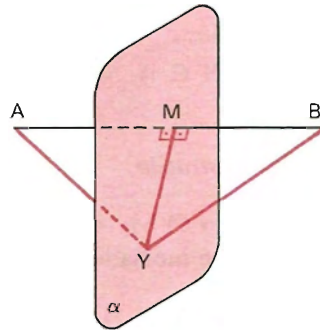
$(Y = M, M \in \alpha) \Rightarrow Y \in \alpha$ .

Se  $Y \notin \overline{AB}$ , temos:

$(\overline{YA} \equiv \overline{YB}, \overline{AM} \equiv \overline{BM}, \overline{YM}$  comum)  $\Rightarrow \triangle YMA \equiv \triangle YMB \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \widehat{YMA} \equiv \widehat{YMB} \Rightarrow \overline{YM} \perp \overline{AB}$ .

Sendo  $\overline{YM} \perp \overline{AB}$  e  $\alpha$  perpendicular a  $\overline{AB}$  por  $M$ , então  $Y \in \alpha$ .

Logo, o plano  $\alpha$  é o lugar geométrico pedido.



**Notas**

a) Plano mediador — definição

Chama-se *plano mediador* de um segmento ao plano perpendicular ao segmento pelo seu ponto médio.

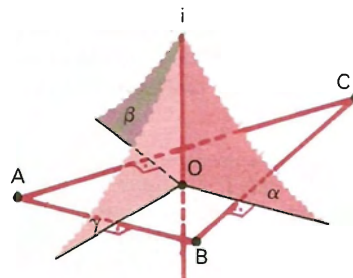
b)

O lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois pontos distintos é o plano mediador do segmento que tem esses pontos por extremidades.

2º) Estabelecer o lugar geométrico dos pontos equidistantes de três pontos  $A, B$  e  $C$  não colineares.

**Solução**

Seja  $\alpha$  o plano mediador de  $\overline{BC}$  e  $\gamma$  o plano mediador de  $\overline{AB}$ . Como  $A, B$  e  $C$  não são colineares, então  $\alpha$  e  $\gamma$  são secantes. Seja  $i$  a interseção de  $\alpha$  e  $\gamma$ .



**1ª parte**

$$\begin{array}{ll} \text{Hipótese} & \text{Tese} \\ (\forall X) (X \in i) \implies (d_{X,A} = d_{X,B} = d_{X,C}) \end{array}$$

*Demonstração*

$$\left. \begin{array}{l} (X \in i, i = \alpha \cap \gamma) \Rightarrow X \in \alpha \\ \alpha \text{ é mediador de } \overline{BC} \end{array} \right\} \Rightarrow d_{X,B} = d_{X,C}$$

$$\left. \begin{array}{l} (X \in i, i = \alpha \cap \gamma) \Rightarrow X \in \gamma \\ \gamma \text{ é mediador de } \overline{AB} \end{array} \right\} \Rightarrow d_{X,A} = d_{X,B}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow d_{X,B} = d_{X,C} \\ \Rightarrow d_{X,A} = d_{X,B} \end{array} \right\} \Rightarrow d_{X,A} = d_{X,B} = d_{X,C}$$

**2ª parte**

$$\begin{array}{ll} \text{Hipótese} & \text{Tese} \\ (\forall Y), (d_{Y,A} = d_{Y,B} = d_{Y,C}) \implies y \in i \end{array}$$

*Demonstração*

$$\begin{array}{ll} d_{Y,B} = d_{Y,C} \implies Y \in \alpha; & d_{Y,A} = d_{Y,B} \implies y \in \gamma \\ (Y \in \alpha, Y \in \gamma, i = \alpha \cap \gamma) \implies y \in i \end{array}$$

Logo, a reta  $i$  é o lugar geométrico procurado.

**Observações**

1ª) Os pontos da reta  $i$ , sendo equidistantes de  $A$  e  $C$ , estão no plano  $\beta$  mediador de  $\overline{AC}$ . Então a reta  $i$  é a *interseção dos planos mediadores dos lados do triângulo  $ABC$* , isto é,  $i = \alpha \cap \beta \cap \gamma$ .

2ª) As interseções de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  com o plano  $(A, B, C)$  são as respectivas *mediatrizes* dos lados do triângulo  $ABC$ . Essas mediatrizes interceptam-se num ponto chamado *circuncentro* do triângulo.

3ª)

O lugar geométrico dos pontos equidistantes de três pontos não colineares é a reta perpendicular ao plano do triângulo determinado pelos pontos, conduzida pelo circuncentro desse triângulo.

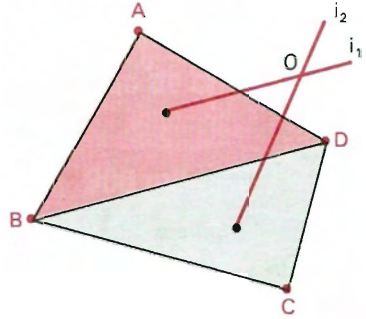


**68.** Determinação da superfície esférica

Existe um único ponto equidistante de quatro pontos  $A, B, C$  e  $D$  não coplanares.

**Solução****1ª parte:** ExistênciaSejam  $i_1$  e  $i_2$  tais que: $i_1 \perp (A, B, D)$  pelo circuncentro do  $\triangle ABD$  $i_2 \perp (B, C, D)$  pelo circuncentro do  $\triangle BCD$ 

As retas  $i_1$  e  $i_2$  são coplanares, pois estão no plano medidor de  $\overline{BD}$ , e não são paralelas, pois  $A, B, C$  e  $D$  não são coplanares. Logo  $i_1$  e  $i_2$  são concorrentes e  $O$  é o ponto de concorrência.



$$\left. \begin{array}{l} O \in i_1 \Rightarrow d_{O,A} = d_{O,B} = d_{O,D} \\ O \in i_2 \Rightarrow d_{O,B} = d_{O,C} = d_{O,D} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow d_{O,A} = d_{O,B} = d_{O,C} = d_{O,D}$$

Então o ponto  $O$  é equidistante de  $A, B, C$  e  $D$ , isto é, existe pelo menos uma superfície esférica (a de centro  $O$ ) que passa por  $A, B, C$  e  $D$ .

**2ª parte:** UnicidadeSe existe outro ponto  $O'$  equidistante de  $A, B, C$  e  $D$ , temos:

$d_{O',A} = d_{O',B} = d_{O',D} \Rightarrow O' \in i_1$

$d_{O',B} = d_{O',C} = d_{O',D} \Rightarrow O' \in i_2$

$(O' \in i_1, O' \in i_2, i_1 \cap i_2 = \{O\}) \Rightarrow O' = O.$

Logo, a superfície esférica que passa por  $A, B, C$  e  $D$  é única.

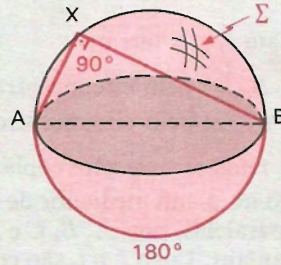
**Nota:** Outros enunciados para o problema acima: “Quatro pontos não coplanares determinam uma única superfície esférica” ou “Existe uma única superfície esférica circunscrita a um tetraedro”.

# EXERCÍCIOS

**115.** Estabeleça o lugar geométrico dos pontos que vêem um segmento  $AB$ , dado, sob ângulo reto.

**Solução**

Seja  $\Sigma$  o conjunto constituído da superfície esférica de diâmetro  $\overline{AB}$  menos os pontos  $A$  e  $B$ .

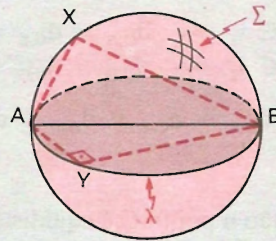


**1ª parte**

*Hipótese*  $(\forall X), (X \in \Sigma) \Rightarrow$  *Tese*  $(\angle AXB \text{ é reto})$

*Demonstração*

O plano  $(X, A, B)$  determina em  $\Sigma$  uma circunferência de diâmetro  $\overline{AB}$ , menos os pontos  $A$  e  $B$ , que contém  $X$ , logo  $\angle AXB$  é reto.



**2ª parte**

*Hipótese*  $(\forall Y), (\angle AYB \text{ é reto}) \Rightarrow$  *Tese*  $Y \in \Sigma$

*Demonstração*

O plano  $(Y, A, B)$  determina em  $\Sigma$  uma circunferência de diâmetro  $\overline{AB}$ , menos os pontos  $A$  e  $B$ , que chamamos de  $\lambda$ , sendo  $\lambda \subset \Sigma$ .

No plano  $(Y, A, B)$ , com  $\angle AYB$  reto, vem que  $Y \in \lambda$ .

$$(Y \in \lambda, \lambda \subset \Sigma) \Rightarrow Y \in \Sigma$$

**Conclusão:** O lugar geométrico dos pontos que vêem um segmento sob um ângulo reto é a superfície esférica cujo diâmetro é o segmento, menos as extremidades do segmento.

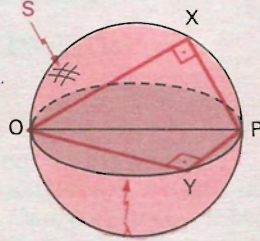
- 116.** Dados dois pontos distintos  $O$  e  $P$ , estabeleça o lugar geométrico dos pés das perpendiculares conduzidas por  $P$  às retas que passam por  $O$ .

**Solução**

Seja  $S$  a superfície esférica de diâmetro  $\overline{OP}$ :

**1ª parte**

$$\begin{array}{l} \text{Hipótese} \\ (\forall X) (X \in S) \Rightarrow \end{array} \begin{array}{l} \text{Tese} \\ (\overrightarrow{OX} \perp \overrightarrow{PX}) \end{array}$$



Se  $X \neq O$  e  $X \neq P$ , o plano  $(X, O, P)$  determina em  $S$  uma circunferência  $\lambda$  de diâmetro  $\overline{OP}$ , à qual  $X$  pertence.

$$(X \in \lambda, X \neq O, X \neq P) \Rightarrow \text{OXP é reto} \Rightarrow \overrightarrow{OX} \perp \overrightarrow{PX}$$

**2ª parte**

$$\begin{array}{l} \text{Hipótese} \\ (\forall Y), (\overrightarrow{OY} \perp \overrightarrow{PY}) \Rightarrow \end{array} \begin{array}{l} \text{Tese} \\ (Y \in S) \end{array}$$

O plano  $(Y, O, P)$  determina em  $S$  uma circunferência  $\lambda$  de diâmetro  $\overline{OP}$ . No plano  $(Y, O, P)$ , com  $\overrightarrow{OY} \perp \overrightarrow{PY}$ , vem que  $Y \in \lambda$ .

$$(Y \in \lambda, \lambda \subset S) \Rightarrow Y \in S.$$

Por  $O$  (ou por  $P$ ) passam infinitas retas perpendiculares à reta  $\overline{OP}$ ; logo,  $O$  e  $P$  têm a propriedade do lugar.

**Conclusão**

O lugar geométrico pedido é a superfície esférica de diâmetro  $\overline{OP}$ .

- 117.** Dados dois pontos distintos  $O$  e  $P$ , estabeleça o lugar geométrico dos pés das perpendiculares conduzidas por  $P$  aos planos que passam por  $O$ .
- 118.** Num plano  $\alpha$ , há um feixe de retas concorrentes em  $O$ . Fora de  $\alpha$  e da perpendicular  $\alpha$  por  $O$ , há um ponto  $P$ . Estabeleça o lugar geométrico dos pés das perpendiculares às retas do feixe, conduzidas por  $P$ .
- 119.** Dados uma reta  $r$  e um ponto  $P$  fora de  $r$ . Estabeleça o lugar geométrico dos pés das perpendiculares, conduzidas por  $P$ , aos planos do feixe que contém  $r$ .

## LEITURA

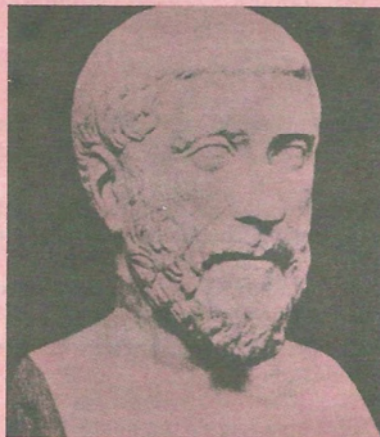
## Tales, Pitágoras e a Geometria Demonstrativa

Hygino H. Domingues

Obviamente é impossível precisar as origens da geometria. Mas essas origens sem dúvida são muito remotas e muito modestas. Nessa longa trajetória, segundo alguns historiadores, a geometria passou por três fases: (a) a fase subconsciente, em que, embora percebendo formas, tamanhos e relações espaciais, graças a uma aptidão natural, o homem não era capaz ainda de estabelecer conexões que lhe proporcionassem resultados gerais; (b) a fase científica, em que, embora empiricamente, o homem já era capaz de formular leis gerais (por exemplo, a razão entre uma circunferência *qualquer* e seu diâmetro é constante); (c) a fase demonstrativa, inaugurada pelos gregos, em que o homem adquire a capacidade de deduzir resultados gerais mediante raciocínios lógicos.

O primeiro matemático cujo nome se associa à matemática demonstrativa é Tales de Mileto (c. 585 a.C.). Tales teria provado algumas poucas e esparsas proposições, como, por exemplo, “os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais”. Mas o aparecimento de cadeias de teoremas, em que cada um se demonstra a partir dos anteriores, parece ter começado com Pitágoras de Samos (c. 532 a.C.) ou na escola pitagórica.

Pitágoras nasceu na ilha de Samos, colônia grega situada na Jônia. Quando jovem viajou pelo Egito, pela Babilônia e, talvez, pela Índia, onde, a par de conhecimento científico, certamente absorveu muito da religião e do misticismo desses lugares. Com cerca de 40 anos de idade fixou-se em Crotona, também uma colônia grega, mas do sul da Itália, onde fundou sua escola. Esta escola na verdade tinha muito de uma comunidade religiosa, pois era em meio a uma vida comunitária, mística e ascética que se cultivavam a filosofia e a ciência.

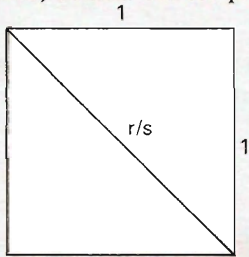


Pitágoras.

Os ensinamentos na escola pitagórica eram transmitidos oralmente e sob promessa de segredo (talvez a matemática fugisse a essas normas) e as descobertas acaso realizadas eram atribuídas ao líder — daí não se saber hoje quais as contribuições do próprio Pitágoras e quais as de seus discípulos. De qualquer maneira, não restou nenhum documento original da matemática pitagórica, que, apesar de toda a influência que exerceu, só é conhecida através de fontes indiretas.

Os pitagóricos atribuíam aos números (para eles apenas os elementos de  $\mathbb{N}^*$ ) e às razões entre esses números um papel muito especial. Daí a afirmação de Aristóteles de que para eles os números eram a componente última dos objetos reais e materiais. Essa valorização da idéia de número na concepção do Universo (ditada pela própria experiência), aliada à grande ênfase que davam às investigações teóricas, levou-os a criar a teoria dos números (*aritmética*, como era chamada por eles). Os cálculos práticos, que para os gregos constituíam a *logística*, não interessavam aos pitagóricos.

A limitação das concepções numéricas dos pitagóricos iria aflo-  
rar, curiosamente, através do teorema hoje conhecido pelo nome do líder da escola, mas já conhecido muito tempo antes dele: “o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados de seus catetos”. (O grande mérito de Pitágoras, ou de sua escola, estaria em ter provado pela primeira vez esse resultado.)



Entendendo que a diagonal de um quadrado de lado unitário deveria ser uma razão numérica  $r/s$  (em que  $r, s \in \mathbb{N}^*$  e, pode-se supor,  $\text{mdc}(r, s) = 1$ ), os pitagóricos obtiveram  $(r/s)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ . Daí  $r^2 = 2s^2$ . Logo,  $r^2$  é par e portanto  $r$  também é par, digamos  $r = 2t$ . Daí  $(2t)^2 = 2s^2$ , do que resulta  $s^2 = 2t^2$  e portanto  $s$  é par. Absurdo, pois  $\text{mdc}(r, s) = 1$ .

A crise gerada por essa contradição levaria a matemática grega a deixar os rumos da aritmética e a trilhar decididamente os da geometria.

# CAPÍTULO V

## Diedros

### I. Definições

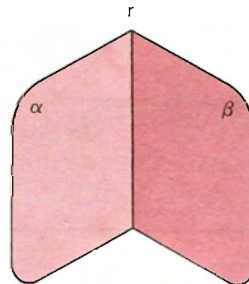
#### 69. Diedro

*Ângulo diedro* ou *diedro* ou *ângulo diédrico* é a reunião de dois semiplanos de mesma origem não contidos num mesmo plano.

A origem comum dos semiplanos é a *aresta* do diedro e os dois semiplanos são suas *faces*.

Assim,  $\alpha$  e  $\beta$  são dois semiplanos de mesma origem  $r$ , distintos e não opostos.

$$\widehat{\alpha r \beta} = \alpha \cup \beta$$



Indica-se também o diedro  $\widehat{\alpha r \beta}$  por:

$$\widehat{\alpha r \beta} = \alpha \cup \beta$$

$\alpha r \beta$ ,  $\widehat{\alpha \beta}$ ,  $\alpha \beta$ , di  $(\alpha r \beta)$ , di  $(\widehat{\alpha r \beta})$ , di  $(r)$ .

## 70. Interior e exterior de um diedro

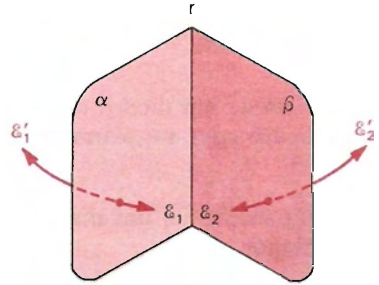
Dados dois semiplanos  $r\alpha$  e  $r\beta$  de mesma origem, distintos e não opostos, consideremos os *semi-espacos* abertos (que não contêm as respectivas origens)  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}'_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  e  $\mathcal{E}'_2$ , como segue:

$\mathcal{E}_1$ , com origem no plano de  $r\alpha$  e contendo  $r\beta$ ;

$\mathcal{E}'_1$ , oposto a  $\mathcal{E}_1$ ;

$\mathcal{E}_2$ , com origem no plano de  $r\beta$  e contendo  $r\alpha$ ;

$\mathcal{E}'_2$ , oposto a  $\mathcal{E}_2$ .



$$\widehat{\alpha r \beta} = \widehat{\alpha \beta} = \text{di}(\alpha, \beta) = \text{di}(r)$$

### 1º) Interior

Chama-se *interior* do diedro  $\widehat{\alpha \beta}$  à interseção de  $\mathcal{E}_1$  com  $\mathcal{E}_2$ .

$$\text{Interior de } \widehat{\alpha \beta} = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2.$$

O interior de um diedro é convexo.

Os pontos do interior de um diedro são pontos *internos* ao diedro.

A reunião de um diedro com seu interior é um *setor diedral* ou *diedro completo*, também conhecido por *diedro convexo*.

### 2º) Exterior

Chama-se exterior do diedro  $\widehat{\alpha \beta}$  à reunião de  $\mathcal{E}'_1$  e  $\mathcal{E}'_2$ .

$$\text{Exterior de } \widehat{\alpha \beta} = \mathcal{E}'_1 \cup \mathcal{E}'_2.$$

O exterior de um diedro é côncavo.

Os pontos do exterior de um diedro são pontos *externos* ao diedro.

A reunião de um diedro com seu exterior é também conhecida por *diedro côncavo*.

## 71. Diedro nulo e diedro raso

Pode-se estender o conceito de diedro para se ter o *diedro nulo* (cujas faces são coincidentes) ou o *diedro raso* (cujas faces são semiplanos opostos).

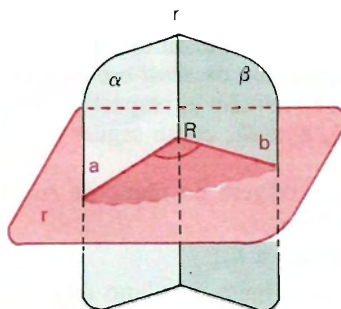
## II. Secções

### 72. Secção de um diedro

Secção de um diedro é a interseção do diedro com um plano secante à aresta.

Uma secção de um diedro é um ângulo plano.

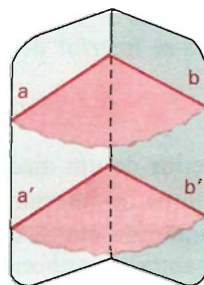
Na figura,  $\widehat{aRb}$  ou  $\widehat{ab}$  é secção de  $\alpha r \beta$ .



### 73. Propriedade

Duas secções paralelas de um diedro são congruentes.

De fato, as secções são dois ângulos de lados com sentidos respectivamente concordantes, e então elas são congruentes.



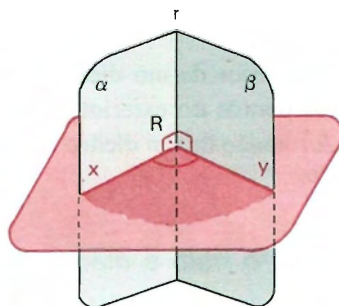
### 74. Secção reta ou secção normal

Secção reta ou secção normal de um diedro é uma secção cujo plano é perpendicular à aresta do diedro.

Se  $\widehat{xy}$  é secção reta do diedro de aresta  $r$ , então o plano  $(xy)$  é perpendicular a  $r$ , isto é,

$$x \perp r \text{ e } y \perp r.$$

Na figura,  $\widehat{xRy}$  ou  $\widehat{xy}$  é secção reta ou normal de  $\alpha r \beta$ .





## 75. Propriedade

Secções normais de um mesmo diedro são congruentes.

De fato, duas secções normais de um mesmo diedro são secções paralelas e, portanto, são congruentes.

## 76. Diedro reto

Um diedro é *reto* se, e somente se, sua secção normal é um *ângulo reto*.

## 77. Diedro agudo

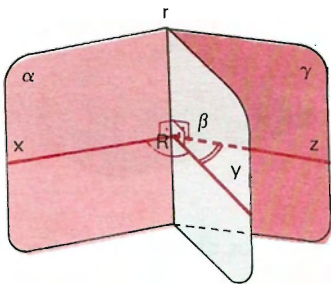
Um diedro é *agudo* se, e somente se, sua secção normal é um *ângulo agudo*.

## 78. Diedro obtuso

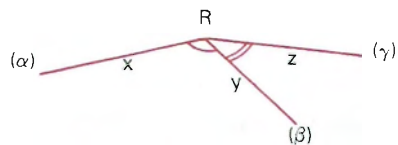
Um diedro é *obtuso* se, e somente se, sua secção normal é um *ângulo obtuso*.

## 79. Diedros adjacentes

Dois diedros são *adjacentes* se, e somente se, as secções normais são *ângulos adjacentes*.

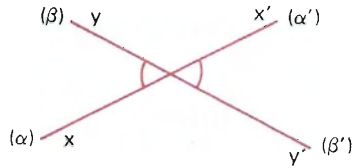
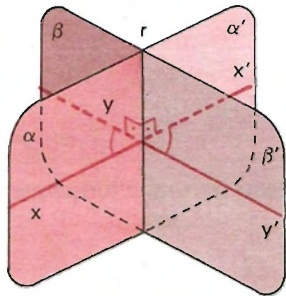


Num plano perpendicular a  $r$ , temos:



### 80. Diedros opostos pela aresta

Dois diedros são *opostos pela aresta* se, e somente se, as secções normais são *ângulos opostos pelo vértice*.

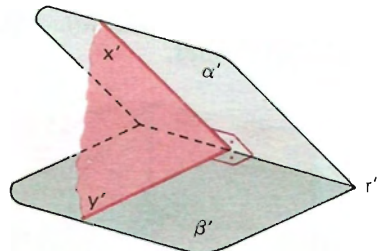
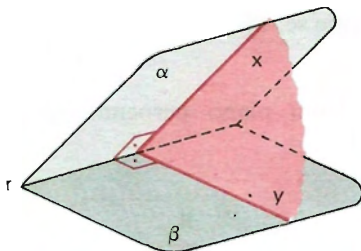


$\alpha r \beta$  e  $\alpha' r' \beta'$  são diedros opostos pela aresta, pois as secções normais  $\widehat{xy}$  e  $\widehat{x'y'}$  são opostas pelo vértice.

## III. Diedros congruentes — Bissetor — Medida

### 81. Congruência — definição

Dois diedros são congruentes se, e somente se, uma secção normal de um é congruente a uma secção normal do outro.

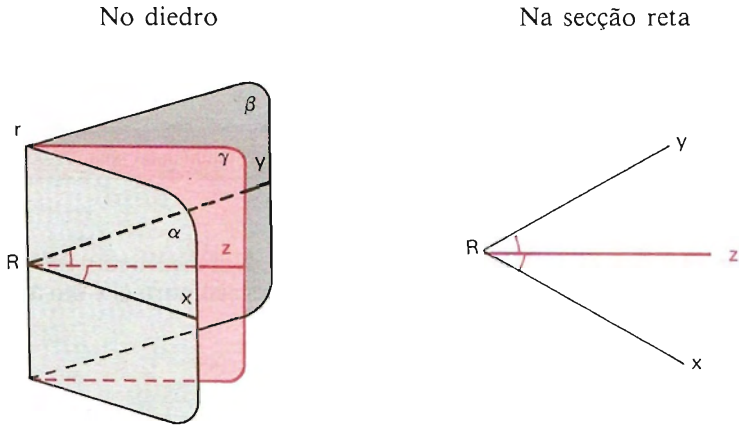


Se  $\widehat{xy}$  e  $\widehat{x'y'}$  são as respectivas secções retas dos diedros  $\alpha r \beta$  e  $\alpha' r' \beta'$ , temos:

$$\alpha r \beta = \alpha' r' \beta' \iff \widehat{xy} \equiv \widehat{x'y'}$$

### 82. Bissetor de um diedro

Um semiplano é *bissetor* de um diedro se, e somente se, ele possui origem na aresta do diedro e o divide em dois diedros adjacentes e congruentes.



$\gamma$  é bissetor do diedro  $\alpha r \beta$

$z$  é bissetriz do ângulo  $\widehat{xy}$

### 83. Medida de um diedro

Usando analogia com ângulo plano podemos:

- definir *soma* de diedros; teremos:

“A secção normal do diedro soma (ou diferença) de dois diedros é congruente à soma (ou diferença) das secções normais dos diedros considerados”.

- definir *desigualdade* entre diedros; teremos:

“Se um diedro é maior (ou menor) que outro, a secção reta do primeiro é maior (ou menor) que a secção reta do segundo e reciprocamente”.

Como

a *congruência* entre dois diedros é dada pela congruência de suas secções retas;

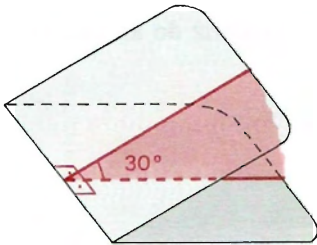
a secção reta do diedro *soma* é a soma das secções retas dos diedros parcelas; a *desigualdade* entre dois diedros é dada pela desigualdade entre suas secções retas,

podemos provar que

“todo diedro é proporcional à respectiva secção reta”  
e daí sai que:

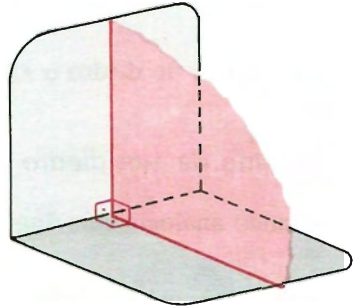
“A medida de um diedro é a medida de sua secção reta”.

Assim, um diedro de  $30^\circ$  é um diedro cuja secção normal mede  $30^\circ$ .



Diedro de  $30^\circ$ .

Um diedro reto mede  $90^\circ$ , pois sua secção normal é um ângulo reto.



Diedro reto.

#### 84. Diedros complementares — diedros suplementares

Dois diedros são complementares se, e somente se, suas secções normais forem complementares (ou a soma de suas medidas for  $90^\circ$ ).

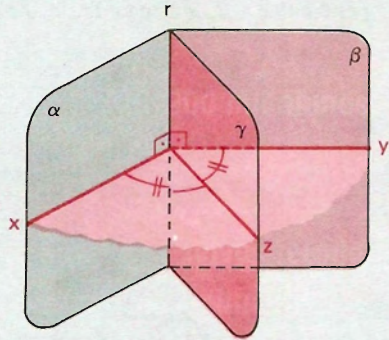
Dois diedros são suplementares se, e somente se, a soma de suas medidas for  $180^\circ$  (ou suas secções normais são suplementares).

# EXERCÍCIOS

**120.** Construa o plano bissetor de um diedro dado.

**Solução**

- 1) Conduzimos uma secção reta  $x\hat{y}$  do  $di(\alpha r \beta)$  dado.
- 3)  $z$  e  $r$  determinam o plano bissetor do  $di(\alpha r \beta)$ .
- 2) Construimos a bissetriz  $z$  de  $x\hat{y}$ .



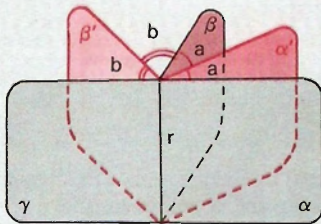
**121.** Se dois semiplanos são bissetores de dois diedros adjacentes e suplementares, então eles formam um diedro reto.

**Solução**

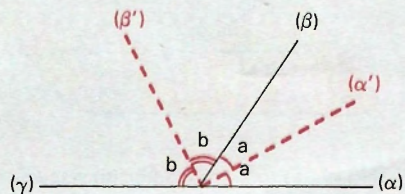
Sejam  $\alpha r \beta$  e  $\beta r \gamma$  os diedros,  $\alpha'$  e  $\beta'$  os respectivos bissetores, num plano perpendicular a  $r$  (que determina secções retas nos diedros), temos a situação da figura abaixo.

Sejam  $a$  e  $b$  as medidas dos diedros indicados, vem:

No espaço



Na secção reta



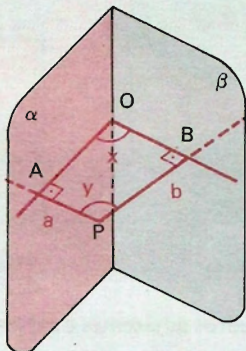
$$a + a + b + b = 180^\circ \Rightarrow a + b = 90^\circ \Rightarrow di(\alpha'\beta') \text{ é reto.}$$

**122.** Que relação existe entre a medida de um diedro e a medida do ângulo determinado por duas semi-retas de mesma origem respectivamente perpendiculares às faces do diedro?

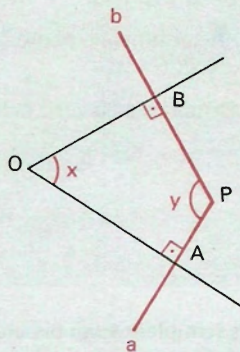
**Solução**

Sejam:  $\alpha\beta$  o diedro,  $Pa$  a semi-reta perpendicular a  $\alpha$ ,  $Pb$  a semi-reta perpendicular a  $\beta$ ,  $x$  a medida do diedro e  $y$  a medida do ângulo  $aPb$ .

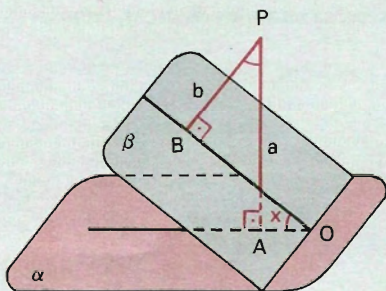
No espaço



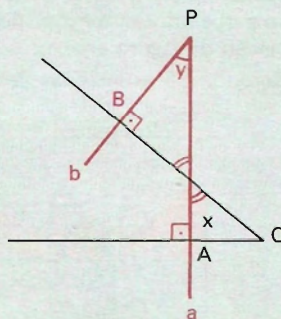
Na secção reta



No espaço



Na secção reta



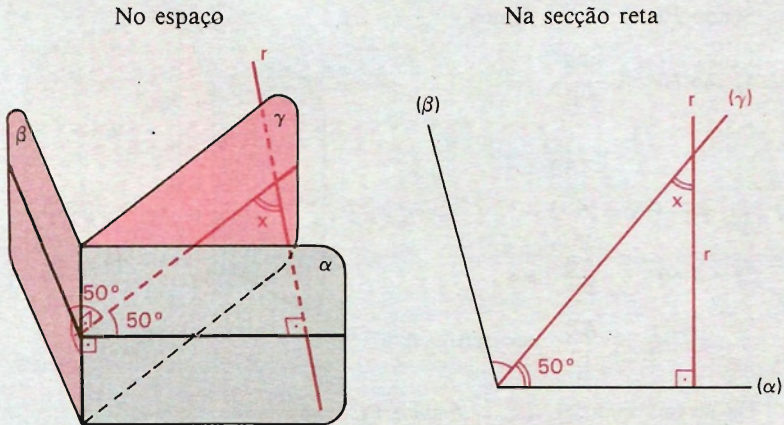
No plano  $(ab)$ , que determina secção normal no diedro, temos as situações das figuras acima (dentre outras possíveis) e daí concluímos que:

$$x = y \text{ ou } x + y = 180^\circ$$

- 123.** Um diedro mede  $100^\circ$ . Quanto mede o ângulo que uma reta perpendicular a uma das faces do diedro forma com o bissetor dele?

**Solução**

Sejam  $\alpha\beta$  o diedro,  $\gamma$  seu bissetor e a reta  $r$ , perpendicular a  $\alpha$ .



Os diedros  $\alpha\gamma$  e  $\gamma\beta$  medem  $50^\circ$  cada um.

Na secção reta que passa por  $r$  temos a situação da figura acima à direita.

Sendo  $x$  a medida do ângulo pedido, temos:

$$x + 50^\circ = 90^\circ \implies x = 40^\circ$$

Nota-se que o ângulo pedido é o complemento da metade do diedro dado independentemente da figura.

- 124.** Dois semiplanos são bissetores de dois diedros adjacentes e complementares. Quanto mede o diedro por eles formado?
- 125.** Duas semi-retas  $Or$  e  $Os$  são respectivamente perpendiculares às faces  $\alpha$  e  $\beta$  de um diedro. Se o ângulo  $r\hat{O}s$  mede  $50^\circ$ , quanto mede o diedro  $\alpha\beta$ ?
- 126.** Uma reta perpendicular a uma face de um diedro forma um ângulo de  $50^\circ$  com o bissetor desse diedro. Quanto mede o diedro?
- 127.** Prove que dois diedros opostos pela aresta são congruentes.
- 128.** Dois diedros têm faces respectivamente paralelas. Conhecendo a medida  $a$  de um deles, qual será a medida do outro?

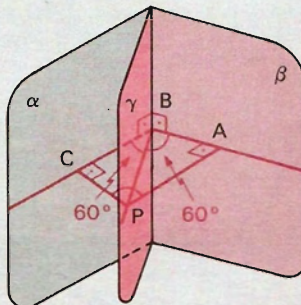
- 129.** Um diedro mede  $120^\circ$ . De um ponto situado no seu plano bissetor, a  $12\text{ cm}$  da aresta, traçam-se perpendiculares às duas faces e dos pés dessas perpendiculares traçam-se perpendiculares à aresta do diedro. Calcule o perímetro do quadrilátero assim formado.

### Solução

Sendo  $PB = 12\text{ cm}$ , temos:

$$\begin{aligned} 1) \quad \operatorname{sen} 60^\circ &= \frac{PA}{PB} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{PA}{12} \Rightarrow \\ \Rightarrow PA &= 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \operatorname{cos} 60^\circ &= \frac{AB}{PB} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} &= \frac{AB}{12} \Rightarrow AB = 6 \end{aligned}$$



Da mesma maneira,  $BC = 6\text{ cm}$  e  $PC = 6\sqrt{3}\text{ cm}$ .

Portanto, o perímetro do quadrilátero  $PABC$  vale:

$$PA + AB + BC + CP = 6\sqrt{3} + 6 + 6\sqrt{3} + 6$$

isto é

$$(12\sqrt{3} + 12)\text{ cm} \text{ ou } 12(\sqrt{3} + 1)\text{ cm}.$$

Resposta:  $12(\sqrt{3} + 1)\text{ cm}$ .

- 130.** Um diedro mede  $120^\circ$ . Um ponto  $P$  do plano bissetor desse diedro dista  $10\text{ cm}$  da aresta do diedro. Calcule a distância de  $P$  às faces do diedro.
- 131.** A distância de um ponto  $M$ , interior a um diedro, às suas faces é de  $5\text{ cm}$ . Encontre a distância do ponto  $M$  à aresta do diedro se o ângulo formado pelas perpendiculares às faces é de  $120^\circ$ .
- 132.** Um ponto  $M$  dista  $12\text{ cm}$  de uma face de um diedro reto, e  $16\text{ cm}$  de outra face. Encontre a distância desse ponto à aresta do diedro.
- 133.** Um ponto  $M$  de uma face de um diedro dista  $15\text{ cm}$  da outra face. Encontre a distância de  $M$  à aresta do diedro, sabendo que a medida do diedro é de  $60^\circ$ .



- 134.** Calcule o comprimento de um segmento  $\overline{AB}$  do interior de um diedro reto com  $A$  e  $B$  nas faces, sabendo que as projeções ortogonais  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$  desse segmento sobre as faces medem respectivamente  $21\text{ cm}$  e  $25\text{ cm}$  e que a medida de  $\overline{CD}$  é  $15\text{ cm}$ .

### Solução

Na figura ao lado, temos:

$AD = 21\text{ cm}$ ,  $BC = 25\text{ cm}$ , e  
 $CD = 15\text{ cm}$ .

Os triângulos  $ACD$  e  $BDC$  são retângulos.

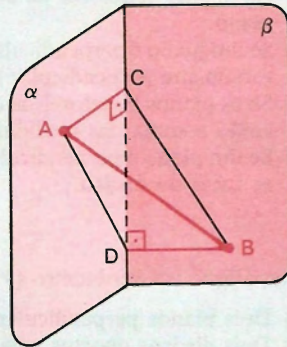
Aplicando Pitágoras no  $\triangle BDC$ , temos:

$$BD^2 + CD^2 = BC^2 \Rightarrow BD^2 + 15^2 = 25^2 \Rightarrow BD = 20\text{ cm}.$$

Sendo  $di(\alpha\beta) = 90^\circ$ , o  $\triangle ADB$  e o  $\triangle ACB$  são retângulos, portanto:

$$AD^2 + BD^2 = AB^2 \Rightarrow 21^2 + 20^2 = AB^2 \Rightarrow \overline{AB} = 29.$$

Resposta:  $29\text{ cm}$ .



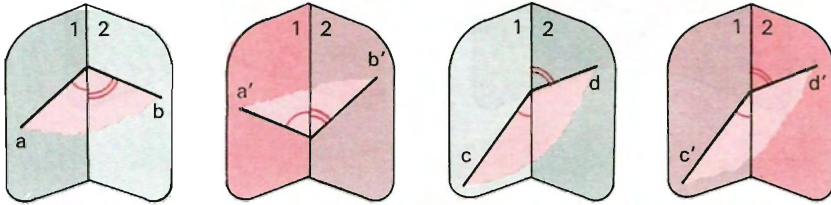
- 135.** Um segmento  $\overline{AB}$  de  $75\text{ cm}$  tem as extremidades nas faces de um diedro reto. Sendo  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$  as respectivas projeções de  $\overline{AB}$  sobre as faces do diedro, a medida de  $\overline{AC}$  igual a  $50\text{ cm}$  e a de  $\overline{BD}$  igual a  $55\text{ cm}$ , calcule a medida do segmento  $\overline{CD}$ .
- 136.** Seja um diedro  $\alpha\beta$ . A distância de dois pontos de  $\alpha$  ao plano  $\beta$  são respectivamente  $9\text{ cm}$  e  $12\text{ cm}$ . A distância do segundo ponto à aresta do diedro é  $20\text{ cm}$ . Encontre a distância do primeiro ponto à aresta do diedro.
- 137.** Um plano  $\alpha$  passa pela hipotenusa  $\overline{AB}$  de um triângulo retângulo  $ABC$ ;  $\alpha$  forma um diedro de  $60^\circ$  com o plano do triângulo  $ABC$ . Encontre a distância do vértice  $C$  do triângulo ao plano  $\alpha$ , sabendo que os lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  medem respectivamente  $6\text{ cm}$  e  $8\text{ cm}$ .
- 138.** Um diedro mede  $120^\circ$ . A distância de um ponto interior  $P$  às suas faces é de  $10\text{ cm}$ . Ache a distância entre os pés das perpendiculares às faces conduzidas por  $P$ .

- 139.**  $ABC$  e  $DBC$  são dois triângulos equiláteros que têm um lado comum  $\overline{BC}$ , e cujos planos formam um diedro de  $120^\circ$ . Sabendo que o lado desses triângulos têm medidas iguais a  $m$ , calcule o segmento  $\overline{AD}$  e a distância do ponto  $D$  ao plano  $ABC$ .
- 140.** Classifique em verdadeiro ( $V$ ) ou falso ( $F$ ):
- Os planos bissetores de dois diedros adjacentes suplementares são perpendiculares.
  - Os planos bissetores de dois diedros opostos pela aresta estão num mesmo plano.
  - Se um plano é perpendicular a uma das faces de um diedro, então será obrigatoriamente perpendicular à outra face.
  - Se os planos bissetores de dois diedros adjacentes formam um ângulo de  $26^\circ$ , então a soma das medidas dos dois diedros vale  $90^\circ$ .
  - Se um plano é perpendicular à aresta de um diedro, então será perpendicular às faces do diedro.
- 141.** Classifique em verdadeiro ( $V$ ) ou falso ( $F$ ):
- Dois planos perpendiculares determinam quatro diedros retos.
  - Dois diedros opostos pela aresta são congruentes.
  - Dois diedros congruentes são opostos pela aresta.
  - Dois secções paralelas de um mesmo diedro são congruentes.
  - Dois secções congruentes de um mesmo diedro são paralelas.
  - Dois secções normais de um diedro são congruentes.
  - Toda secção de um diedro reto é um ângulo reto.
  - Um diedro reto pode ter uma secção que é um ângulo reto.
  - Dois planos secantes determinam quatro diedros.
  - Se um diedro é reto, suas faces estão contidas em planos perpendiculares entre si.
- 142.** Classifique em verdadeiro ( $V$ ) ou falso ( $F$ ):
- A soma de todos os diedros consecutivos formados em torno de uma mesma aresta vale  $4$  retos.
  - Por um ponto qualquer da aresta de um diedro, considerando-se em cada face a semi-reta perpendicular à aresta, obtém-se uma secção reta do diedro.
  - Se  $a = 90^\circ$  e  $b = 30^\circ$  são as medidas de dois diedros adjacentes, o ângulo formado pelos bissetores desses diedros mede  $60^\circ$ .
  - Se dois diedros adjacentes são complementares, os seus bissetores formam um diedro de  $45^\circ$ .
  - O lugar geométrico dos centros das esferas tangentes às faces de um diedro é o bissetor do diedro.
  - O lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes das faces de um diedro é o bissetor desse diedro.

## IV. Secções igualmente inclinadas — Congruência de diedros

### 85. Secções igualmente inclinadas ou secções de lados igualmente inclinados — definição

Duas secções de dois diedros (distintos ou não) são chamadas *secções igualmente inclinadas* (secções *ii*), se, e somente se, os lados de uma formam com uma mesma semi-reta da aresta correspondente ângulos ordenadamente congruentes aos ângulos que os lados da outra formam com uma mesma semi-reta da aresta correspondente a essa outra.



Nas figuras acima

$\widehat{ab}$  e  $\widehat{a'b'}$  são secções igualmente inclinadas

$\widehat{cd}$  e  $\widehat{c'd'}$  são secções igualmente inclinadas

Notemos que as secções  $\widehat{ab}$  e  $\widehat{cd}$ ,  $\widehat{a'b'}$  e  $\widehat{cd}$ ,  $\widehat{ab}$  e  $\widehat{c'd'}$ ,  $\widehat{a'b'}$  e  $\widehat{c'd'}$  não são igualmente inclinadas.

### 86. Teorema

Se dois diedros são congruentes, então eles apresentam secções igualmente inclinadas congruentes.

Notação:

$\alpha\beta, \alpha'\beta'$  — diedros

$\widehat{ab}, \widehat{a'b'}$  — secções igualmente inclinadas

$\widehat{xy}, \widehat{x'y'}$  — secções retas

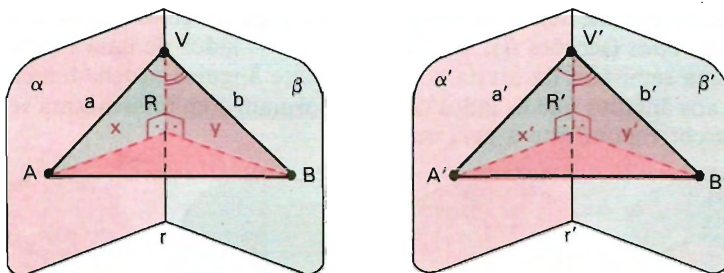
Hipótese

Tese

$$(\alpha\beta \equiv \alpha'\beta' \text{ ou } \widehat{xy} \equiv \widehat{x'y'}) \Rightarrow \widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'}$$

*Demonstração*

1º caso: Os lados das secções *ii* formam ângulos agudos (os quatro) ou obtusos (os quatro) com uma mesma semi-reta da aresta correspondente. (Vide  $\widehat{ab}$  e  $\widehat{a'b'}$  na figura.)



1) Consideremos em  $r$  e  $r'$  (arestas dos diedros), respectivamente,  $R$  e  $R'$  tais que  $\overline{VR} \equiv \overline{V'R'}$   
 ( $V$  e  $V'$  são vértices das secções igualmente inclinadas e  $R \neq V$ ).

2) Por  $R$  e  $R'$  consideremos as secções retas  $\widehat{xy}$  e  $\widehat{x'y'}$  que determinam  $A \in a, B \in b, A' \in a'$  e  $B' \in b'$ .

3) Chegamos à tese pela seqüência de quatro congruências de triângulos, como segue:

$$\triangle VRA \equiv \triangle V'R'A' \text{ (caso ALA)}$$

$$\triangle VRB \equiv \triangle V'R'B' \text{ (caso ALA)}$$

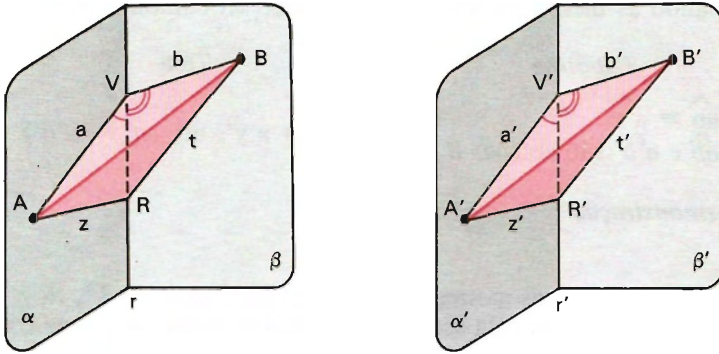
$$\triangle ARB \equiv \triangle A'R'B' \text{ (caso LAL — note que } \widehat{xy} \equiv \widehat{x'y'} \text{ por hipótese)}$$

$$\triangle AVB \equiv \triangle A'V'B' \text{ (caso LLL).}$$

Dessa última congruência vem:

$$\widehat{AVB} \equiv \widehat{A'V'B'} \implies \widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'}.$$

2.º caso: Dois lados, um de cada secção, formam ângulos agudos com uma das semi-retas da aresta correspondente e os outros dois formam ângulos obtusos (ou retos) com a mesma semi-reta da aresta correspondente. (Vide  $\widehat{ab}$  e  $\widehat{a'b'}$  na figura.)



1) Consideremos em  $r$  e  $r'$ , respectivamente,  $R$  e  $R'$  tais que:

$$\overline{VR} \equiv \overline{V'R'} \text{ com } R \neq V.$$

2) Artificio: consideremos as retas  $z$  e  $t$  por  $R$ , e  $z'$  e  $t'$  por  $R'$ , que interceptam, respectivamente,  $a$  e  $b$ , e  $a'$  e  $b'$  nos pontos  $A$  e  $B$ , e  $A'$  e  $B'$ , de forma que:

$$\widehat{ARV} \equiv \widehat{A'R'V'} \text{ (agudos) e } \widehat{BRV} \equiv \widehat{B'R'V'} \text{ (agudos).}$$

3) Chegamos à tese pela seqüência de quatro congruências de triângulos, como segue:

$$\triangle VRA \equiv \triangle V'R'A' \text{ (caso ALA)}$$

$$\triangle VRB \equiv \triangle V'R'B' \text{ (caso ALA)}$$

$$\triangle ARB \equiv \triangle A'R'B' \text{ (caso LAL — note que aplicamos o primeiro caso } \widehat{ARB} \equiv \widehat{A'R'B'})$$

$$\triangle AVB \equiv \triangle A'V'B' \text{ (caso LLL)}$$

Dessa última congruência vem:

$$\widehat{AVB} \equiv \widehat{A'V'B'} \Rightarrow \widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'}.$$

**87. Teorema – recíproco do anterior**

Se dois diedros apresentam secções igualmente inclinadas congruentes, então eles são congruentes.

Usando as mesmas notações e figuras do teorema anterior, temos:

$$\begin{array}{cc} \textit{Hipótese} & \textit{Tese} \\ \left( \begin{array}{l} \widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'} \\ \widehat{ab} \text{ e } \widehat{a'b'} \text{ são secções } ii \end{array} \right) & \Rightarrow \left( \widehat{xy} \equiv \widehat{x'y'} \text{ ou } \alpha\beta \equiv \alpha'\beta' \right) \end{array}$$

***Demonstração***

*1.º caso:* Usando as mesmas construções para obter  $V, V', R, R', A, A', B$  e  $B'$ , chegamos à tese pela seqüência de quatro congruências de triângulos, como segue:

$$\begin{aligned} \triangle VRA &\equiv \triangle V'R'A' \text{ (caso ALA)} \\ \triangle VRB &\equiv \triangle V'R'B' \text{ (caso ALA)} \\ \triangle AVB &\equiv \triangle A'V'B' \text{ (caso LAL — usando a hipótese)} \\ \triangle ARB &\equiv \triangle A'R'B' \text{ (caso LLL)} \end{aligned}$$

Dessa última congruência:  $\widehat{ARB} \equiv \widehat{A'R'B'}$ .

$$\widehat{ARB} \equiv \widehat{A'R'B'} \Rightarrow \widehat{xy} \equiv \widehat{x'y'} \Rightarrow \alpha\beta \equiv \alpha'\beta'$$

*2.º caso:* Usando as mesmas construções para obter  $V, V', R, R'$  e o mesmo artifício para obter  $A, A', B, B'$  usados no 2.º caso do teorema anterior, chegamos à tese pela seqüência de quatro congruências de triângulos, como segue:

$$\begin{aligned} \triangle VRA &\equiv \triangle V'R'A' \text{ (caso ALA)} \\ \triangle VRB &\equiv \triangle V'R'B' \text{ (caso ALA)} \\ \triangle AVB &\equiv \triangle A'V'B' \text{ (caso LAL — usando a hipótese)} \\ \triangle ARB &\equiv \triangle A'R'B' \text{ (caso LLL)} \end{aligned}$$

Dessa última congruência vem:  $\widehat{ARB} \equiv \widehat{A'R'B'}$ .

Sendo  $\widehat{ARB}$  e  $\widehat{A'R'B'}$  agudos, conforme artifício, e congruentes, recaímos no 1.º caso. Daí sai a tese.

**88. Condição necessária e suficiente**

Resumindo os dois teoremas acima, temos:

Uma condição necessária e suficiente para dois diedros serem congruentes é possuírem secções igualmente inclinadas congruentes.

## EXERCÍCIOS

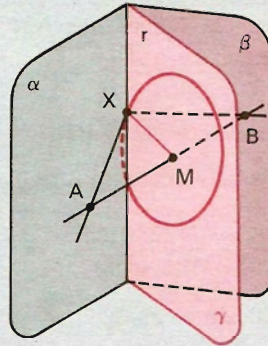
- 143.** Dados os pontos  $A$  e  $B$ , um em cada face de um diedro e nenhum na aresta, conduza por  $AB$  um plano que determina no diedro uma secção que é um ângulo reto.

### Solução

a) Construção:

Seja o diedro  $di(\alpha \ r \ \beta)$ ,  $A \in \alpha$  e  $B \in \beta$ ,  $M$  o ponto médio de  $AB$  e  $\gamma$  o plano determinado por  $M$  e  $r$ .

No plano  $\gamma$ , com centro em  $M$ , conduzimos uma circunferência de diâmetro congruente a  $\overline{AB}$ .



O ponto  $X$ , interseção da circunferência com  $r$ , determina com  $A$  e  $B$  o plano pedido.

O problema pode ter duas, uma ou nenhuma solução conforme posição relativa de  $r$  e da circunferência.

b) Prova de que  $\widehat{AXB}$  é reto:

No triângulo  $AXB$ , a mediana  $\overline{XM}$  é metade de  $\overline{AB}$ , o que implica que o triângulo é retângulo em  $X$ . Logo  $\widehat{AXB}$  é reto.

- 144.** Dois triângulos isósceles congruentes  $ACD$  e  $BCD$  têm a base  $\overline{CD}$  comum. Seus planos  $\alpha$  e  $\beta$  são perpendiculares. Sendo  $M$  o ponto médio de  $\overline{AB}$ ,  $N$  o ponto médio de  $\overline{CD}$ ,  $CD = 2x$ , e designando os lados congruentes dos triângulos por  $a$ :
- demonstre que  $\overline{MN}$  é perpendicular a  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ ;
  - calcule, em função de  $m$  e  $x$ , os comprimentos de  $\overline{AB}$  e  $\overline{MN}$ ;
  - para que valores de  $x$ , o diedro de faces  $CAB$  e  $DAB$  é um diedro reto?

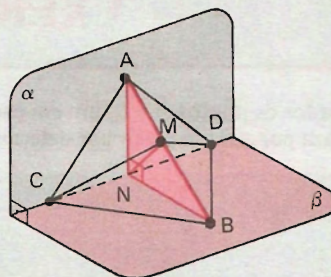
**Solução**

- a) O triângulo  $ABN$  é retângulo isósceles, pois  $\overline{AN} \equiv \overline{BN}$  (medianas de dois triângulos congruentes).

$\widehat{ANB}$  é a secção reta do diedro, portanto  $\widehat{ANB} \equiv 90^\circ$ .

$$\left. \begin{array}{l} \overline{DC} \perp \overline{NB} \\ \overline{DC} \perp \overline{NA} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{DC} \perp (\overline{ABN}) \Rightarrow \overline{CD} \perp \overline{MN}$$

Daí concluímos que  $\overline{NM}$  é perpendicular a  $\overline{AB}$ .



- b) Cálculo de  $\overline{AB}$  e  $\overline{MN}$ :

$AB = 2 MN$ , pois o triângulo  $ABN$  é retângulo isósceles.

$$AB = AN \sqrt{2} \Rightarrow AB = \sqrt{2(a^2 - x^2)} \quad MN = \frac{AB}{2} \Rightarrow MN = \frac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2}$$

- c) Cálculo de  $x$ :

Os triângulos  $ACB$  e  $ADB$  são também isósceles, de base comum  $\overline{AB}$ .

Para que a secção reta do novo diedro seja um ângulo reto, é necessário

que  $\widehat{CMD} = 90^\circ$ , o que ocorre se  $\overline{MN} = \frac{\overline{CD}}{2}$ ; portanto:

$$\frac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2} = x \Rightarrow 2(a^2 - x^2) = 4x^2 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

- 145.** Uma condição necessária e suficiente para que uma reta, não coplanar com a aresta de um diedro, forme ângulos congruentes com as faces do diedro e intercepte essas faces em pontos equidistantes da aresta.



**146.** Estabeleça o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois planos secantes.

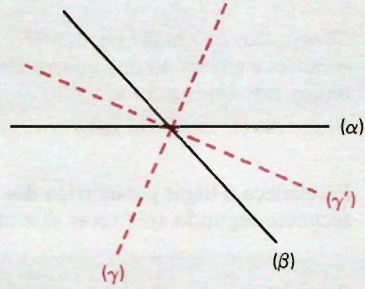
**Solução**

Dados:  $\alpha$  e  $\beta$  secantes em  $r$   
 $(\alpha \cap \beta = r)$ .

Consideremos a reunião de dois planos  $\gamma$  e  $\gamma'$  dos semiplanos (quatro) bissetores dos diedros determinados por  $\alpha$  e  $\beta$ .

Seja  $\Sigma = \gamma \cup \gamma'$ .

Provemos que  $\Sigma$  é o lugar geométrico.



**1ª parte**

*Hipótese*

*Tese*

$(\forall X), X \in \Sigma \Rightarrow d_{X,\alpha} = d_{X,\beta}$

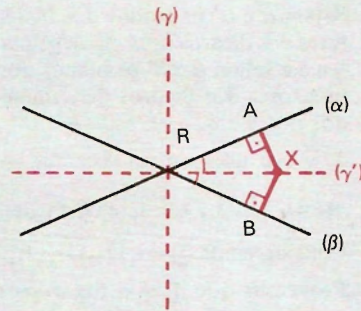
$x \in \Sigma \Rightarrow (x \in \gamma \text{ ou } x \in \gamma')$

*Demonstração*

Se  $X \in r$ , distâncias nulas, então:

$d_{X,A} = d_{X,B}$  (ou  $d_{X,\alpha} = d_{X,\beta}$ ).

Se  $X \notin r$ ,  $(XAB)$  determina secções retas nos diedros determinados por  $\alpha$  e  $\beta$ .



Em  $(XAB)$  temos:  $(X \in \gamma \text{ ou } X \in \gamma') \Rightarrow X$  pertence à bissetriz de  $\widehat{ARB} \Rightarrow d_{X,A} = d_{X,B}$  (ou  $d_{X,\alpha} = d_{X,\beta}$ ).

**2ª parte**

*Hipótese*

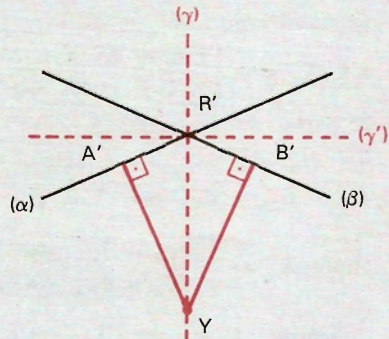
*Tese*

$(\forall Y), (d_{Y,A'} = d_{Y,B'}) \Rightarrow Y \in \Sigma$

*Demonstração*

Sendo

$d_{Y,A'} = d_{Y,\alpha}, d_{Y,B'} = d_{Y,\beta}$ , o plano  $(Y, A', B')$  determina secções retas  $A'R'B'$  nos diedros determinados por  $\alpha$  e  $\beta$ .



Em  $(Y, A', B')$  temos:

$$d_{Y,A'} = d_{Y,B'} \implies Y \text{ pertence à bissetriz de } \widehat{A'R'B'} \implies y \in \gamma \text{ ou } y \in \gamma' \implies y \in \Sigma.$$

**Conclusão:** “O lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois planos secantes é a reunião dos quatro semiplanos bissetores dos diedros determinados por esses planos”.

- 147.** Estabeleça o lugar geométrico dos pontos equidistantes de três planos dois a dois secantes segundo três retas distintas.

**Solução**

Dados  $\delta, \gamma, \sigma$ .

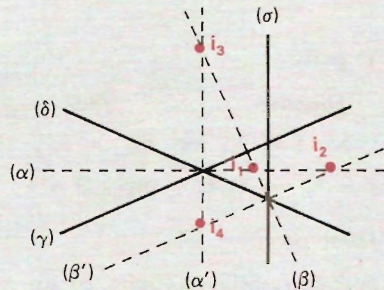
Sejam  $\alpha$  e  $\alpha'$  os planos dos bissetores dos diedros determinados por  $\gamma$  e  $\delta$  e sejam  $\beta$  e  $\beta'$  os planos dos bissetores dos diedros determinados por  $\delta$  e  $\sigma$ .

$\delta, \gamma$  e  $\sigma$  dois a dois secantes  $\implies$

$$\implies \exists i_1, i_2, i_3, i_4 \mid i_1 = \alpha \cap \beta; i_2 = \alpha \cap \beta'; i_3 = \alpha' \cap \beta; i_4 = \alpha' \cap \beta'.$$

Consideremos  $\Sigma = i_1 \cup i_2 \cup i_3 \cup i_4$ .

Provemos que  $\Sigma$  é o lugar geométrico.



**1ª parte**

*Hipótese* *Tese*

$$X \in \Sigma \implies d_{X,\gamma} = d_{X,\delta} = d_{X,\sigma}$$

*Demonstração*

$$x \in \Sigma \implies \left\{ \begin{array}{l} x \in \alpha \text{ ou } X \in \alpha' \implies d_{x,\delta} = d_{x,\gamma} \\ X \in \beta \text{ ou } X \in \beta' \implies d_{x,\delta} = d_{x,\sigma} \end{array} \right\} \implies \text{Tese}$$

**2ª parte**

*Hipótese* *Tese*

$$d_{Y,\delta} = d_{Y,\gamma} = d_{Y,\sigma} \implies Y \in \Sigma$$

$$\text{Hipótese} \implies \left\{ \begin{array}{l} d_{Y,\delta} = d_{Y,\gamma} \implies X \in \alpha \text{ ou } X \in \alpha' \\ d_{Y,\delta} = d_{Y,\sigma} \implies X \in \beta \text{ ou } X \in \beta' \end{array} \right\} \implies X \in \Sigma$$

**Conclusão:**  $\Sigma = i_1 \cup i_2 \cup i_3 \cup i_4$  é o lugar geométrico procurado.

# Triedros

## I. Conceito e elementos

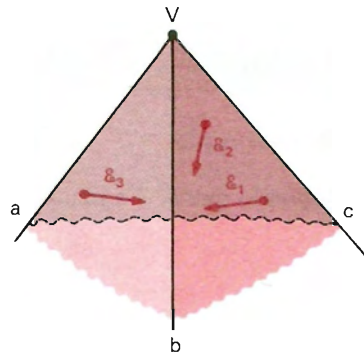
### 89. Definição

Dadas três semi-retas  $V_a$ ,  $V_b$ ,  $V_c$ , de mesma origem  $V$ , não coplanares, consideremos os semi-espacos  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  e  $\mathcal{E}_3$ , como segue:

$\mathcal{E}_1$ , com origem no plano  $(bc)$  e contendo  $V_a$ ;

$\mathcal{E}_2$ , com origem no plano  $(ac)$  e contendo  $V_b$ ;

$\mathcal{E}_3$ , com origem no plano  $(ab)$  e contendo  $V_c$ .



Triedro determinado por  $V_a$ ,  $V_b$  e  $V_c$  é a intersecção dos semi-espacos  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  e  $\mathcal{E}_3$ .

$$V(a, b, c) = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_3$$

Sob uma outra orientação, o ente definido acima é chamado *setor triédral* ou *ângulo sólido de três arestas*. Segundo essa orientação, o triedro é a reunião dos três setores angulares definidos por  $V_a$ ,  $V_b$  e  $V_c$ .

### 90. Elementos

$V$  é o vértice;

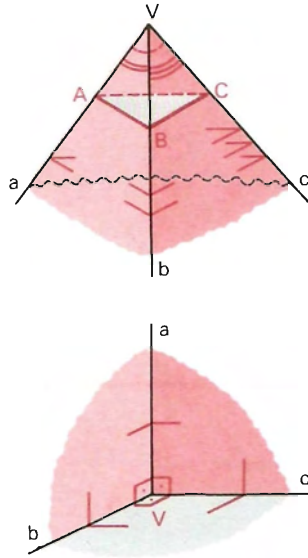
$V_a, V_b, V_c$  são as arestas;

$\widehat{aVb}, \widehat{aVc}$  e  $\widehat{bVc}$  ou  $\widehat{ab}, \widehat{ac}$  e  $\widehat{bc}$  são as faces ou ângulos de face.

$di(a), di(b), di(c)$  são os *diedros* do triédro; cada um deles é determinado por duas faces do triédro.

O triângulo  $ABC$  com um único vértice em cada aresta é uma secção do triédro.

Um triédro notável é aquele cujas faces são ângulos retos e cujos diedros são diedros retos. Esse triédro é chamado *triédro tri-retângulo* (ou triédro tri-retangular).



## II. Relações entre as faces

### 91. Teorema

Em todo triédro, qualquer face é menor que a soma das outras duas.

#### Demonstração

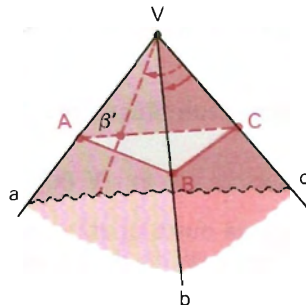
Supondo que  $\widehat{ac}$  é a maior face do triédro  $V(a, b, c)$ , vamos provar que

$$\widehat{ac} < \widehat{ab} + \widehat{bc}. \quad (\text{tese})$$

Para isso, construímos em  $\widehat{ac}$  um ângulo  $\widehat{b'c}$  tal que

$$\widehat{b'c} \equiv \widehat{bc}. \quad (1)$$

Tomando-se um ponto  $B$  em  $b$  e um ponto  $B'$  em  $b'$ , tais que  $\overline{VB} \equiv \overline{VB'}$ , e considerando uma secção  $ABC$ , como indica a figura, temos:



1º) Da congruência dos triângulos  $B'VC$  e  $BVC$ , vem que  $\overline{B'C} \equiv \overline{BC}$ ;

2º) No triângulo  $ABC$ ,

$$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC} \Rightarrow \overline{AB'} + \overline{B'C} < \overline{AB} + \overline{BC} \Rightarrow \overline{AB'} < \overline{AB}.$$

De  $\overline{AB'} < \overline{AB}$  decorre, considerando os triângulos  $B'VA$  e  $BVA$ , que

$$\widehat{ab'} < \widehat{ab}. \quad (2)$$

Somando-se as relações (2) e (1), temos:

$$\widehat{ab'} + \widehat{b'c} < \widehat{ab} + \widehat{bc} \Rightarrow \widehat{ac} < \widehat{ab} + \widehat{bc}.$$

Sendo a maior face menor que a soma das outras duas, concluímos que *qualquer face* de um triedro é menor que a soma das outras duas.

### 92. Nota

Se  $f_1, f_2$  e  $f_3$  são as medidas das faces de um triedro, temos:

$$f_1 < f_2 + f_3. \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} f_2 < f_1 + f_3 &\Leftrightarrow f_2 - f_3 < f_1 \\ f_3 < f_1 + f_2 &\Leftrightarrow f_3 - f_2 < f_1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow |f_2 - f_3| < f_1 \quad (2)$$

De (1) e (2) vem:

$$|f_2 - f_3| < f_1 < f_2 + f_3$$

### 93. Teorema

A soma das medidas em graus das faces de um triedro qualquer é menor que  $360^\circ$ .

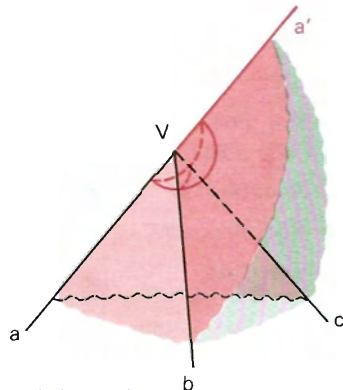
#### Demonstração

Sendo  $\widehat{ab}$ ,  $\widehat{ac}$  e  $\widehat{bc}$  as medidas das faces de um triedro  $V(a, b, c)$ , prove-mos que:

$$\widehat{ab} + \widehat{ac} + \widehat{bc} < 360^\circ. \quad (\text{tese})$$

Para isso, consideremos a semi-reta  $Va'$  oposta a  $Va$ ; observemos que  $V(a', b, c)$  é um triedro e

$$\widehat{bc} < \widehat{ba'} + \widehat{ca'}. \quad (1)$$



Os ângulos  $\widehat{ab}$  e  $\widehat{ba'}$  são adjacentes e suplementares, o mesmo ocorrendo com  $\widehat{ac}$  e  $\widehat{ca'}$ .

Então:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ab} + \widehat{ba'} = 180^\circ \\ \widehat{ac} + \widehat{ca'} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ab} + \widehat{ac} + \underbrace{\widehat{ba'} + \widehat{ca'}}_{(1)} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{ab} + \widehat{ac} + \widehat{bc} < 360^\circ$$

### 94. Resumo

1) Em qualquer triedro:

Cada face é menor que a soma das outras duas e a soma das medidas (em graus) das faces é menor que  $360^\circ$ .

2) Uma condição necessária e suficiente para que  $f_1, f_2$  e  $f_3$  sejam medidas (em graus) das faces de um triedro é:

$$0^\circ < f_1 < 180^\circ, \quad 0^\circ < f_2 < 180^\circ, \quad 0^\circ < f_3 < 180^\circ$$

$$f_1 + f_2 + f_3 < 360^\circ \quad \text{e} \quad |f_2 - f_3| < f_1 < f_2 + f_3$$

## EXERCÍCIOS

**148.** Existem triedros cujas faces medem respectivamente:

- |                                   |                                      |                                |
|-----------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------|
| a) $40^\circ, 50^\circ, 90^\circ$ | c) $200^\circ, 100^\circ, 80^\circ$  | e) $3^\circ, 5^\circ, 7^\circ$ |
| b) $90^\circ, 90^\circ, 90^\circ$ | d) $150^\circ, 140^\circ, 130^\circ$ |                                |

### Solução

- a) Não, pois, sendo  $|f_2 - f_3| < f_1 < f_2 + f_3$ , temos  $|50^\circ - 40^\circ| < 90^\circ < 50^\circ + 40^\circ$  (que é falso).
- b) Sim, pois  $|90^\circ - 90^\circ| < 90^\circ < 90^\circ + 90^\circ$ ;  $90^\circ + 90^\circ + 90^\circ < 360^\circ$ ;  $0^\circ < 90^\circ < 180^\circ$ .
- c) Não, pois  $0^\circ < 200^\circ < 180^\circ$  (que é falso).
- d) Não, pois  $150^\circ + 140^\circ + 130^\circ < 360^\circ$  (que é falso).
- e) Sim, pois  $|7^\circ - 3^\circ| < 5^\circ < 7^\circ + 3^\circ$ ;  $3^\circ + 5^\circ + 7^\circ < 360^\circ$ ;  $0^\circ < 3^\circ < 180^\circ$   
 $0^\circ < 5^\circ < 180^\circ$ ;  $0^\circ < 7^\circ < 180^\circ$ .

- 149.** Duas faces de um triedro medem respectivamente  $100^\circ$  e  $135^\circ$ . Determine o intervalo de variação da terceira face.

### Solução

Seja  $x$  a medida da terceira face, temos:

$$0^\circ < x < 180^\circ \quad (1) \quad 100^\circ + 135^\circ + x < 360^\circ \Rightarrow x < 125^\circ \quad (2)$$

$$|135^\circ - 100^\circ| < x < 135^\circ + 100^\circ \Rightarrow 35^\circ < x < 235^\circ \quad (3)$$

$$((1), (2), (3)) \Rightarrow 35^\circ < x < 125^\circ$$

- 150.** Num triedro duas faces medem respectivamente  $110^\circ$  e  $140^\circ$ . Determine o intervalo de variação da medida da terceira face.
- 151.** Determine o intervalo de variação de  $x$ , sabendo que as faces de um triedro medem  $f_1 = x$ ,  $f_2 = 2x - 60^\circ$ ,  $f_3 = 30^\circ$ .
- 152.** Se um triedro tem suas faces iguais, entre que valores poderá estar compreendida cada uma de suas faces?
- 153.** Prove que pelo menos uma face de um triedro tem medida menor que  $120^\circ$ .

### Solução

Se  $f_1 > 120^\circ$ ,  $f_2 > 120^\circ$  e  $f_3 > 120^\circ$ , então  $f_1 + f_2 + f_3 > 360^\circ$  (absurdo).

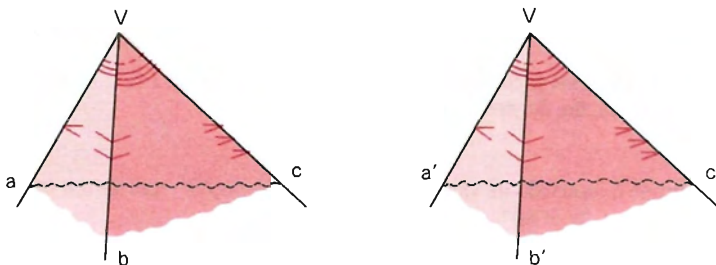
- 154.** Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):
- Existe triedro cujas faces medem respectivamente  $40^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $50^\circ$ .
  - Existe triedro com as faces medindo respectivamente  $70^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $150^\circ$ .
  - Existe triedro com as três faces medindo  $120^\circ$  cada uma.
  - Se num triedro duas faces medem respectivamente  $150^\circ$  e  $120^\circ$ , então a terceira face é obrigatoriamente a menor.
  - Se dois triedros são congruentes, então eles são opostos pelo vértice.
  - Três semi-retas de mesma origem determinam um triedro.
  - Num triedro tri-retângulo cada aresta é perpendicular ao plano da face oposta.
- 155.** Três retas,  $r$ ,  $s$  e  $t$ , coplanares e incidentes num ponto  $V$ , quantos triedros determinam?

### III. Congruência de triedros

#### 95. Definição

Um triedro é congruente a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre suas arestas e as do outro, de modo que:

seus diedros são ordenadamente congruentes aos diedros do outro e suas faces são ordenadamente congruentes às faces do outro.

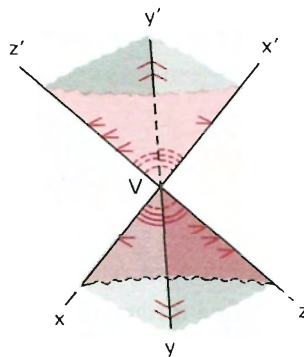


$$V(a, b, c) \equiv V(a', b', c') \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'}, \widehat{bc} \equiv \widehat{b'c'}, \widehat{ca} \equiv \widehat{c'a'} \\ di(a) \equiv di(a'), di(b) \equiv di(b'), di(c) \equiv di(c') \end{cases}$$

Por exemplo, dois diedros *opostos pelo vértice*, como  $V(x, y, z)$  e  $V(x', y', z')$  da figura ao lado, são congruentes, pois:

$$\widehat{xy} \equiv \widehat{x'y'}, \widehat{xz} \equiv \widehat{x'z'}, \widehat{yz} \equiv \widehat{y'z'}$$

$$di(x) \equiv di(x'), \quad di(y) \equiv di(y'), \\ di(z) \equiv di(z').$$



#### 96. Tipos de congruência

Existem dois tipos de congruência entre triedros.

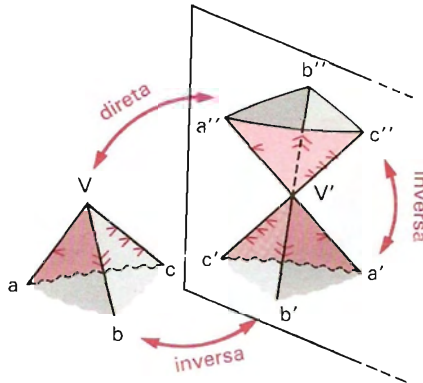
1º tipo: *Congruência direta* — “quando os triedros podem ser superpostos por movimento de rotação e translação”.

2º tipo: *Congruência inversa* — “quando os triedros são congruentes (satisfazem a definição), mas não são superponíveis”.



*Exemplos:* Dois triedros opostos pelo vértice (ou simétricos em relação a um ponto) são *inversamente congruentes*.

Dois triedros simétricos em relação a um plano (um é imagem especular do outro) são *inversamente congruentes*.



$V(a, b, c)$  e  $V'(a', b', c')$  inversamente congruentes

$V'(a', b', c')$  e  $V''(a'', b'', c'')$  inversamente congruentes

$V(a, b, c)$  e  $V''(a'', b'', c'')$  diretamente congruentes

### Observação

Para descobrir qual o tipo de congruência entre os triedros  $V(a, b, c)$  e  $V'(a', b', c')$ , consideram-se dois “observadores” identificados com as arestas correspondentes  $Va$  e  $V'a'$ , com as “cabeças” voltadas para os vértices e “olhando para dentro” dos triedros.

a) Se  $Vb$  está à direita (ou à esquerda) do primeiro observador e  $V'b'$  está à direita (ou à esquerda) do segundo, a congruência é direta.

b) Se  $Vb$  está à direita (ou à esquerda) do primeiro e  $V'b'$  está à esquerda (ou à direita) do segundo, a congruência é inversa.

## IV. Triedros polares ou suplementares

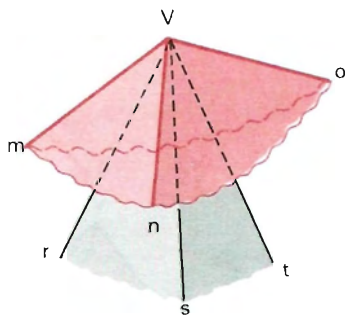
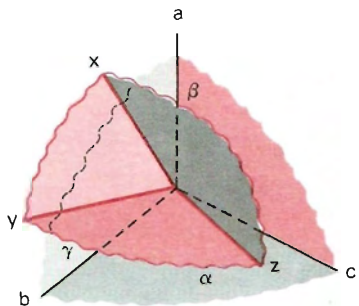
### 97. Definição

Um triedro é polar de outro se, e somente se:

- 1º) tem mesmo vértice do outro,
- 2º) suas arestas são respectivamente perpendiculares aos planos das faces do outro e
- 3º) formam ângulos agudos com as arestas correspondentes do outro.

Assim,  $V(x, y, z)$  é polar de  $V(a, b, c)$  se, e somente se:

$Vx, Vy, Vz$  são respectivamente perpendiculares aos planos  $(b, c), (a, c), (a, b)$ , e  $\widehat{ax}, \widehat{by}$  e  $\widehat{cz}$  são agudos.



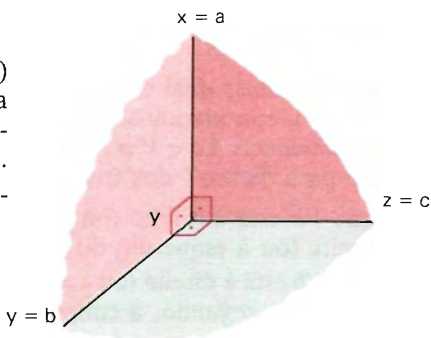
$V(m, n, o)$  é polar de  $V(r, s, t)$  se, e somente se:

$Vm, Vn, Vo$  são respectivamente perpendiculares aos planos  $(s, t), (r, t), (r, s)$ , e  $\widehat{mr}, \widehat{ns}, \widehat{ot}$  são agudos.

### 98. Nota

Notemos que, se o trihedro  $V(a, b, c)$  é tri-retângulo, então, pela unicidade da perpendicular a um plano por um ponto, ele coincide com seu polar  $V(x, y, z)$ .

O trihedro tri-retângulo é autopolar.



### 99. Propriedade

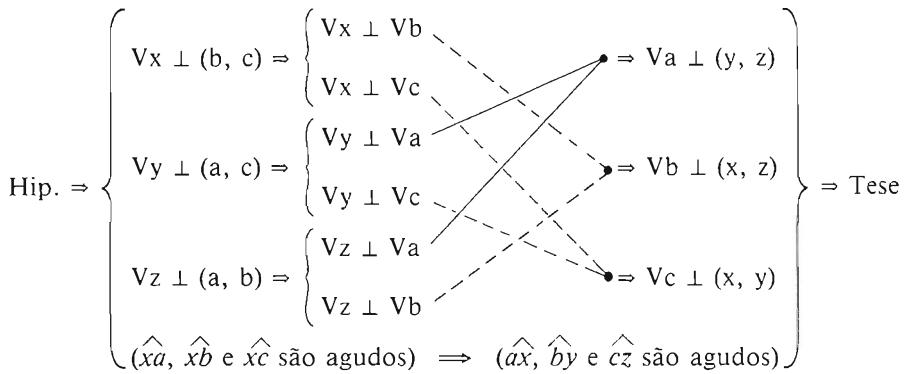
Se um trihedro  $V(x, y, z)$  é polar do trihedro  $V(a, b, c)$ , então esse trihedro  $V(a, b, c)$  é polar do primeiro  $V(x, y, z)$ .

*Hipótese*

*Tese*

$V(x, y, z)$  é polar de  $V(a, b, c) \implies V(a, b, c)$  é polar de  $V(x, y, z)$

*Demonstração*



**100.** *Propriedade fundamental de triedros polares*

Veremos a seguir três itens que caracterizam os triedros polares: primeiro um *lema* (teorema auxiliar) sobre diedros, depois um *teorema*, que é a propriedade em si, e, por fim, as conseqüências de aplicações práticas.

**101.** *Lema*

(Antes do enunciado, veja a primeira das figuras de triedros polares, notando  $\beta, \gamma, y, z, a$  e  $V$ .)

“Se por um ponto  $V$  da aresta  $a$  de um diedro  $(\beta\gamma)$  conduzimos as semi-retas:

$Vy$ , perpendicular a  $\beta$ , situada no semi-espaco que contém  $\gamma$  e tem origem no plano de  $\beta$ , e

$Vz$ , perpendicular a  $\gamma$ , situada no semi-espaco que contém  $\beta$  e tem origem no plano de  $\gamma$ ,

então o ângulo  $\widehat{yz}$  obtido é suplemento da secção reta do diedro  $(\beta\gamma) = di(a)$ .”

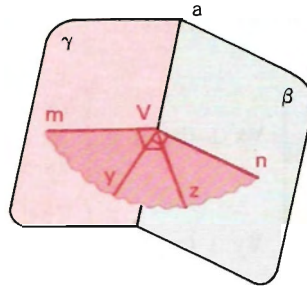
*Demonstração*

Vamos demonstrar para o caso em que o diedro é obtuso. Nos outros casos a demonstração é análoga.

$$1) \left. \begin{array}{l} Vy \perp \beta \implies Vy \perp a \\ Vz \perp \gamma \implies Vz \perp a \end{array} \right\} \implies$$

$$\implies a \perp (y, z) \implies \widehat{mn} = (y, z) \cap di(\beta\gamma)$$

é secção normal do diedro  $(\beta\gamma)$ .



2) No plano de  $y, z, m$  e  $n$ , temos:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{my} + \widehat{yz} = \widehat{mz} = 1 \text{ reto} \\ \widehat{yz} + \widehat{zn} = \widehat{yn} = 1 \text{ reto} \end{array} \right\} \implies \widehat{yz} + \underbrace{\widehat{my} + \widehat{yz} + \widehat{zn}} = 2 \text{ retos} \implies \widehat{yz} + \widehat{mn} = 2 \text{ retos}$$

Logo, o ângulo  $\widehat{yz}$  é suplemento da secção normal  $\widehat{mn}$  do diedro  $\beta\gamma$ .

### 102. Teorema

“Se dois triedros são polares, cada face de um é suplementar da secção reta do diedro oposto no polar.”

Identificando os diedros com suas secções retas (notemos que a medida do diedro é a medida de sua secção reta), temos:

<i>Hipótese</i>	<i>Tese</i>
$\left( \begin{array}{l} V(a, b, c) \text{ e } V(x, y, z) \\ \text{são polares} \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} \widehat{yz} + di(a) = 2r \\ \widehat{zx} + di(b) = 2r \\ \widehat{xy} + di(c) = 2r \end{array} \right)$
	$\left( \begin{array}{l} \widehat{bc} + di(x) = 2r \\ \widehat{ac} + di(y) = 2r \\ \widehat{ab} + di(z) = 2r \end{array} \right)$

#### *Demonstração*

A primeira expressão da tese  $\widehat{yz} + di(a) = 2r$  é uma simples adaptação da expressão  $\widehat{yz} + \widehat{mn} = 2 \text{ retos}$  provada no lema. Pode-se dizer que ela é o próprio lema.

As outras cinco expressões têm demonstrações análogas à primeira, bastando fazer as adaptações de letras.

### 103. Conseqüências

1ª) Se dois triedros são congruentes entre si, então seus polares também são congruentes entre si.

<i>Hipótese</i>	<i>Tese</i>
$\left( \begin{array}{l} V(x, y, z) \text{ e } V(a, b, c) \text{ são polares} \\ V'(x', y', z') \text{ e } V'(a', b', c') \text{ são polares} \\ V(a, b, c) \equiv V'(a', b', c') \end{array} \right) \Rightarrow V(x, y, z) \equiv V'(x', y', z')$	

*Demonstração*

Se  $V(a, b, c) \equiv V'(a', b', c')$ , concluímos seis congruências (pela definição), uma das quais é:

$$di(a) \equiv di(a').$$

Dessa congruência entre diedros podemos concluir uma congruência entre faces dos polares, como segue:

$$di(a) \equiv di(a') \Rightarrow 2r - di(a) \equiv 2r - di(a') \Rightarrow \widehat{yz} \equiv \widehat{y'z'}.$$

Ainda da congruência entre  $V(a, b, c)$  e  $V'(a', b', c')$ , outra das congruências que concluímos é:

$$\widehat{bc} \equiv \widehat{b'c'}.$$

Dessa congruência entre faces podemos concluir uma congruência entre diedros dos polares, como segue:

$$\widehat{bc} \equiv \widehat{b'c'} \Rightarrow 2r - \widehat{bc} \equiv 2r - \widehat{b'c'} \Rightarrow di(x) \equiv di(x').$$

Assim, das seis congruências entre faces e diedros que saem de  $V(a, b, c) \equiv V'(a', b', c')$ , concluímos seis outras congruências entre diedros e faces de  $V(x, y, z)$ , e  $V'(x', y', z')$ . Logo,  $V(x, y, z) \equiv V'(x', y', z')$ .

2ª) Em qualquer triedro, a medida de um diedro (em graus) aumentada em  $180^\circ$  supera a soma dos outros dois.

*Demonstração*

Sejam  $d_1, d_2$  e  $d_3$  as medidas (em graus) dos diedros de um triedro e  $f_1, f_2$  e  $f_3$  as medidas (em graus) das respectivas faces opostas no polar.

Das relações entre as faces temos  $f_1 < f_2 + f_3$ . Como  $f_1 = 180^\circ - d_1$ ,  $f_2 = 180^\circ - d_2$  e  $f_3 = 180^\circ - d_3$ , temos:

$$f_1 < f_2 + f_3 \implies 180^\circ - d_1 < (180^\circ - d_2) + (180^\circ - d_3) \implies d_2 + d_3 < 180^\circ + d_1.$$

$$\text{Logo, } d_2 + d_3 < 180^\circ + d_1.$$

$$\text{Analogamente: } d_1 + d_3 < 180^\circ + d_2$$

$$d_1 + d_2 < 180^\circ + d_3$$

3ª) A soma dos diedros de um triedro está compreendida entre 2 retos ( $180^\circ$ ) e 6 retos ( $540^\circ$ ).

$$2r < di(a) + di(b) + di(c) < 6r$$

### Demonstração

Pela definição de triedro, cada diedro é menor que 2 retos, logo

$$di(a) + di(b) + di(c) < 6r.$$

Considerando as faces  $\widehat{xy}$ ,  $\widehat{xz}$  e  $\widehat{yz}$  do polar, temos:

$$\begin{aligned} \widehat{xy} + \widehat{xz} + \widehat{yz} < 4r &\implies [2r - di(c)] + [2r - di(b)] + [2r - di(a)] < 4r \implies \\ \implies di(a) + di(b) + di(c) > 2r \end{aligned}$$

## 104. Nota

Da relação

$$|f_2 - f_3| < f_1 < f_2 + f_3$$

entre as faces de um triedro sai a relação

$$2r - |d_3 - d_2| > d_1 > (d_2 + d_3) - 2r$$

entre os diedros de um triedro.

De fato, considerando  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  as faces do polar respectivamente opostas a  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$ , temos:

$$|f_2 - f_3| < f_1 < f_2 + f_3.$$

E, aplicando o teorema fundamental, vem:

$$\begin{aligned} |2r - d_2 - (2r - d_3)| < 2r - d_1 < 2r - d_2 + 2r - d_3 &\implies \\ \implies |2r - d_2 - 2r + d_3| < 2r - d_1 < 4r - (d_2 + d_3) &\implies \\ \implies |d_3 - d_2| < 2r - d_1 < 4r - (d_2 + d_3) &\implies \\ \implies -2r + |d_3 - d_2| < -d_1 < 2r - (d_2 + d_3) &\implies \\ \implies 2r - |d_3 - d_2| > d_1 > -2r + (d_2 + d_3) \end{aligned}$$

## EXERCÍCIOS

**156.** Pode haver triedro cujos diedros meçam  $40^\circ$ ,  $120^\circ$  e  $15^\circ$ ? Por quê?

### Solução

Não, pois, sendo  $d_1 = 40^\circ$ ,  $d_2 = 120^\circ$  e  $d_3 = 15^\circ$  no polar, temos:  $f_1 = 140^\circ$ ,  $f_2 = 60^\circ$  e  $f_3 = 165^\circ$  e  $140^\circ + 165^\circ + 60^\circ < 360^\circ$  (que é falso).

**157.** Existem ângulos triedros cujos diedros medem respectivamente:

- |  |  |
|--|--|
| a) $90^\circ$ , $90^\circ$ , $90^\circ$    | e) $125^\circ$ , $165^\circ$ , $195^\circ$ |
| b) $60^\circ$ , $60^\circ$ , $60^\circ$    | f) $175^\circ$ , $99^\circ$ , $94^\circ$   |
| c) $200^\circ$ , $300^\circ$ , $100^\circ$ | g) $100^\circ$ , $57^\circ$ , $43^\circ$   |
| d) $120^\circ$ , $200^\circ$ , $15^\circ$  | h) $110^\circ$ , $100^\circ$ , $70^\circ$  |

**158.** Podem os diedros de um triedro medir respectivamente  $40^\circ$ ,  $50^\circ$  e  $60^\circ$ ? Por quê?

**159.** Se um diedro de um triedro é reto, entre que valores deve estar compreendida a soma das medidas dos outros dois diedros?

**160.** Dois diedros de um triedro medem respectivamente  $60^\circ$  e  $110^\circ$ . Dê o intervalo de variação da medida do terceiro diedro.

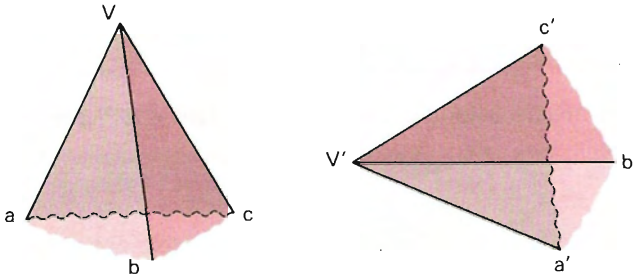
## V. Critérios ou casos de congruência entre triedros

### 105. Preliminar

1º) A definição de congruência de triedros dá *todas* as condições fundamentais que devem ser satisfeitas para que dois triedros sejam congruentes. Essas condições (seis congruências: três entre faces e três entre diedros) são totais, porém existem *condições mínimas* para que dois triedros sejam congruentes. Estas condições mínimas são chamadas *casos* ou *critérios* de congruência.

Cada caso ou critério traduz uma condição necessária e suficiente para que dois triedros sejam congruentes.

2.º) *Figura e elementos para as demonstrações*



Notação:  $T = V(a, b, c)$        $T' = V'(a', b', c')$   
*P* polar de *T*                      *P'* polar de *T'*

**106.** 1.º critério: *FDF*

Se dois triedros têm, ordenadamente congruentes, duas faces e o diedro compreendido, então eles são congruentes.

<i>Hipótese</i>	<i>Tese</i>
$\widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'} \quad (1)$	$\Rightarrow T \equiv T'$
$\widehat{di(b)} \equiv \widehat{di(b')} \quad (2)$	
$\widehat{bc} \equiv \widehat{b'c'} \quad (3)$	

*Demonstração*

As faces  $\widehat{ac}$  e  $\widehat{a'c'}$  são secções igualmente inclinadas ((1) e (3)) de diedros congruentes (2); então,  $\widehat{ac} \equiv \widehat{a'c'} \quad (4)$ .

As faces  $\widehat{bc}$  e  $\widehat{b'c'}$  são secções igualmente inclinadas ((1) e (4)) e congruentes ((3)) dos diedros  $di(a)$  e  $di(a')$ , respectivamente. Então,  $di(a) \equiv di(a') \quad (5)$ .

As faces  $\widehat{ab}$  e  $\widehat{a'b'}$  são secções igualmente inclinadas ((3) e (4)) e congruentes (1) dos diedros  $di(c)$  e  $di(c')$ , respectivamente. Então,  $di(c) \equiv di(c') \quad (6)$ .

((1), (2), (3), (4), (5), (6))  $\Rightarrow T \equiv T'$

**107.** 2.º critério: *DFD*

“Se dois triedros têm, ordenadamente congruentes, dois diedros e a face compreendida, então eles são congruentes.”



*Demonstração*

Se  $T$  e  $T'$  têm  $DFD$ , pelo teorema fundamental, os polares  $P$  e  $P'$  têm  $FDF$  e, pelo caso anterior, são congruentes. Ora, se  $P$  e  $P'$  são congruentes, seus polares  $T$  e  $T'$  também o são.

**108.** 3º critério:  $FFF$ 

“Se dois triedros têm, ordenadamente congruentes, as três faces, então eles são congruentes.”

$$\begin{array}{l} \text{Hipótese} \\ \left( \begin{array}{l} \widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'} \quad (1) \\ \widehat{bc} \equiv \widehat{b'c'} \quad (2) \\ \widehat{ac} \equiv \widehat{a'c'} \quad (3) \end{array} \right) \Rightarrow T \equiv T' \\ \text{Tese} \end{array}$$

*Demonstração*

As faces  $\widehat{ac}$  e  $\widehat{a'c'}$  são secções igualmente inclinadas ((1) e (2)) e congruentes ((3)) dos diedros  $di(b)$  e  $di(b')$ , respectivamente.

Então,  $di(b) \equiv di(b')$  (4).

Analogamente:  $di(c) \equiv di(a')$  (5)

$di(c) \equiv di(c')$  (6)

((1), (2), (3), (4), (5), (6))  $\Rightarrow T \equiv T'$

**109.** 4º critério:  $DDD$ 

“Se dois triedros têm, ordenadamente congruentes, os três diedros, então eles são congruentes.”

*Demonstração*

Se  $T$  e  $T'$  têm  $DDD$ , pelo teorema fundamental, os polares  $P$  e  $P'$  têm  $FFF$  e, pelo caso anterior, são congruentes. Ora, se  $P$  e  $P'$  são congruentes, seus polares  $T$  e  $T'$  também o são.

**110.** Nota

Para efeito de memorização é bom comparar os casos  $FDF$ ,  $DFD$  e  $FFF$  com os casos de congruência entre triângulos  $LAL$ ,  $ALA$  e  $LLL$ .

# EXERCÍCIOS

- 161.** Num triédrio  $V(a, b, c)$  as faces  $\widehat{ac}$  e  $\widehat{bc}$  medem cada uma  $45^\circ$  e formam um diedro reto. Determine a medida da face  $\widehat{ab}$ .

**Solução**

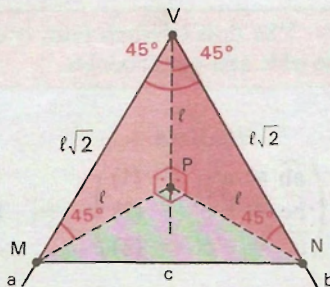
Por um ponto  $P$  da aresta  $c$  a uma distância  $\ell$  de  $V$  conduzimos uma secção reta do diedro  $di(c)$ .

Sendo os triângulos  $VPN$  e  $VPM$  retângulos isósceles, temos:

$$\overline{VM} \equiv \overline{VN} = \ell\sqrt{2}.$$

Mas o  $\triangle PMN$  também é retângulo isósceles e  $\overline{MN} = \ell\sqrt{2}$ .

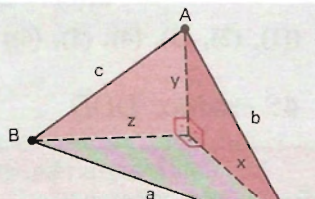
Portanto,  $\overline{VM} \equiv \overline{VN} \equiv \overline{MN} \Rightarrow \triangle VMN$  equilátero, logo  $\widehat{ab} = 60^\circ$ .



- 162.** Um plano intercepta as arestas de um triédrio tri-retângulo, determinando um triângulo de lados  $a, b$  e  $c$ . Determine as distâncias dos vértices desse triângulo ao vértice do triédrio tri-retângulo.

**Solução**

Sendo  $\triangle AVC, \triangle AVB, \triangle BVC$ , retângulos, temos:



$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad x^2 + z^2 = a^2 \\ (2) \quad x^2 + y^2 = b^2 \\ (3) \quad y^2 + z^2 = c^2 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \quad (4)$$

$$(4) - (3) \Rightarrow x^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}$$

$$(4) - (1) \Rightarrow y^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}$$

$$(4) - (2) \Rightarrow z^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \Rightarrow z = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}}$$

- 163.** A que distância do vértice de um triedro tri-retângulo deve passar um plano para que a secção obtida seja um triângulo equilátero de lado  $l$ ?
- 164.** Classifique em verdadeiro (*V*) ou falso (*F*):
- Em todo triedro tri-retângulo, cada aresta é perpendicular ao plano da face oposta.
  - Se dois diedros de um triedro medem respectivamente  $40^\circ$  e  $70^\circ$ , o terceiro diedro pode medir  $70^\circ$ .
  - Se um plano intercepta as arestas de um triedro tri-retângulo nos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  equidistantes de seu vértice  $V$ , a secção determinada é um triângulo equilátero.
  - Se um plano intercepta as arestas de um triedro nos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  equidistantes de seu vértice  $V$ , a secção determinada é um triângulo equilátero.
  - Cada face de um triedro é maior que a soma das outras duas.
  - Três retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  incidentes num ponto  $V$  determinam  $\delta$  triedros.
  - Três retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  não coplanares e incidentes num ponto  $V$  determinam  $\delta$  triedros.
  - Se dois triedros são opostos pelo vértice, então eles são congruentes.
- 165.** Demonstre que, se um triedro tem um diedro reto, o cosseno da face oposta ao diedro reto é igual ao produto dos cossenos das faces que formam o diedro reto.
- 166.** Seja um triedro de vértice  $V$ , cujos ângulos das faces medem  $60^\circ$  cada um. Considere os segmentos  $\overline{VA} \equiv \overline{VB} \equiv \overline{VC} = 9 \text{ cm}$  sobre suas arestas. Determine o comprimento do segmento  $\overline{AP}$ , sendo  $P$  o pé da perpendicular à face oposta à aresta  $VA$ .
- 167.** Um ponto  $A$  é interior a um triedro tri-retângulo. As distâncias desse ponto às arestas do triedro medem  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Calcule a distância  $\overline{OA}$ , sendo  $O$  o vértice do triedro.

**Solução**

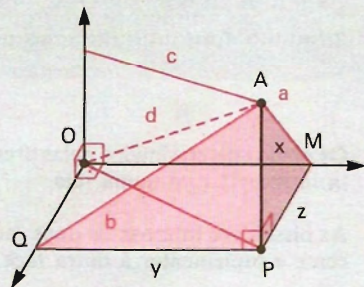
Seja  $\overline{OA} = d$ .

Traçando  $\overline{AP}$ , perpendicular a uma face do triedro (vide figura), temos:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + z^2 &= a^2 \\ x^2 + y^2 &= b^2 \\ y^2 + z^2 &= c^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

$$\text{Sendo } d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}.$$

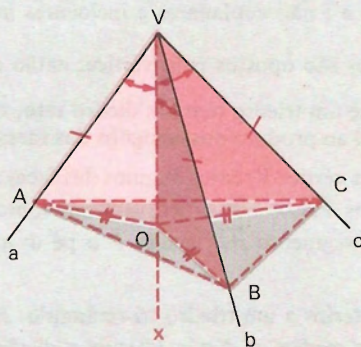


- 168.** Dado um triedro  $V(a, b, c)$ , construa uma semi-reta  $Vx$  que forme ângulos congruentes com as arestas do triedro.

**Solução**

a) Construção:

- 1º) Construimos uma secção  $ABC$ , com  $A \in a, B \in b, C \in c$  e tal que  $\overline{VA} \equiv \overline{VB} \equiv \overline{VC}$ .
- 2º) No triângulo  $ABC$ , consideramos o ponto  $O$ , a igual distância dos vértices:  $OA \equiv OB \equiv OC$ .
- 3º) Construimos a semi-reta  $Vx$  passando por  $O$ .



b) Prova:

$$\triangle OVA \equiv \triangle OVB \equiv \triangle OVC \Rightarrow \widehat{xVa} \equiv \widehat{xVb} \equiv \widehat{xVc}$$

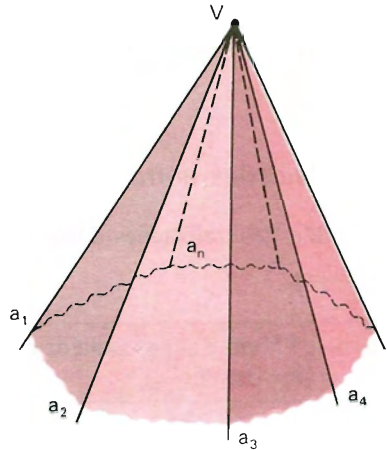
Logo,  $Vx$  forma ângulos congruentes com  $Va, Vb$  e  $Vc$ .

- 169.** Os planos determinados pelas arestas de um triedro e pela bissetriz da face oposta interceptam-se numa reta.
- 170.** As bissetrizes internas de duas faces de um triedro e a bissetriz do ângulo adjacente e suplementar à outra face são coplanares.
- 171.** Sendo  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  os planos conduzidos pelas arestas de um triedro e perpendiculares aos planos das faces opostas, prove que  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  têm uma reta comum.
- 172.** No plano de cada face de um triedro conduz-se pelo vértice a perpendicular à aresta oposta. Prove que as três retas assim obtidas são coplanares.

## VI. Ângulos poliédricos convexos

### 111. Conceito e elementos

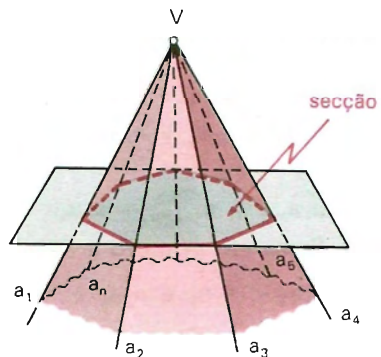
Dado um número finito  $n$  ( $n \geq 3$ ) de semi-retas  $Va_1, Va_2, Va_3, \dots, Va_n$ , de mesma origem  $V$ , tais que o plano de duas consecutivas ( $Va_1$  e  $Va_2, Va_2$  e  $Va_3, \dots, Va_n$  e  $Va_1$ ) deixa as demais num mesmo semi-espaço, consideremos  $n$  semi-espaços  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ , cada um deles com origem no plano de duas semi-retas consecutivas e contendo as restantes.



$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n$$

Ângulo poliédrico convexo determinado por  $Va_1, Va_2, Va_3, \dots, Va_n$  é a interseção dos semi-espaços  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ .

O ponto  $V$  é o vértice, as semi-retas  $Va_1, Va_2, Va_3, \dots, Va_n$  são as  $n$  arestas e os ângulos  $\widehat{a_1a_2}, \widehat{a_2a_3}, \dots, \widehat{a_na_1}$  são as  $n$  faces do ângulo poliédrico. Ele também possui  $n$  diedros, cada um deles determinado por duas faces consecutivas.



*Superfície* de um ângulo poliédrico é a reunião de suas faces.

**112.** *Secção* é um polígono plano com um único vértice em cada aresta.

### 113. Notas

1º) O ângulo poliédrico convexo acima definido pode assumir outros nomes: *pirâmide ilimitada* ou *limitada* ou *ângulo sólido*.

2º) O triedro é um ângulo poliédrico convexo de 3 arestas.

### 114. Relações entre as faces

São generalizações das duas propriedades válidas para triedros:

1ª)

“Num ângulo poliédrico convexo, qualquer face é menor que a soma das demais”.

$$\begin{array}{l} \text{Hipótese} \\ \widehat{a_1 a_2} \text{ é a maior face} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Tese} \\ \widehat{a_1 a_2} < \widehat{a_2 a_3} + \dots + \widehat{a_1 a_n} \end{array}$$

#### Demonstração

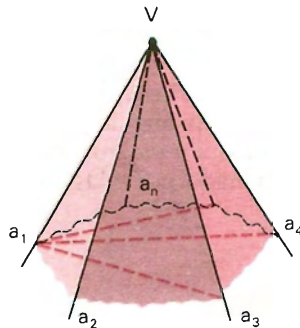
Os planos  $(a_1, a_3), (a_1, a_4), \dots, (a_1, a_{n-1})$  dividem o ângulo poliédrico em  $(n - 2)$  triedros. Aplicando a relação entre faces a cada um deles, vem:

$$\begin{aligned} \widehat{a_1 a_2} &< \widehat{a_2 a_3} + \widehat{a_1 a_3} \\ \widehat{a_1 a_3} &< \widehat{a_3 a_4} + \widehat{a_1 a_4} \\ &\dots\dots\dots \\ \widehat{a_1 a_{n-1}} &< \widehat{a_{n-1} a_n} + \widehat{a_1 a_n} \end{aligned}$$

Somando membro a membro:

$$\widehat{a_1 a_2} < \widehat{a_2 a_3} + \widehat{a_3 a_4} + \dots + \widehat{a_1 a_n}$$

2ª)



“Num ângulo poliédrico convexo, a soma das faces é menor que quatro ângulos retos”.

$$\begin{array}{l} \text{Hipótese} \\ (\widehat{a_1 a_2} + \widehat{a_2 a_3} + \dots + \widehat{a_n a_1} = S_n) \implies S_n < 4r \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Tese} \\ S_n < 4r \end{array}$$

*Demonstração*

Os planos  $(a_1, a_2)$  e  $(a_3, a_4)$  têm a reta  $x$  comum.

Consideremos:

O ângulo poliédrico convexo  $V(a_1, x, a_4, \dots, a_n)$ , cujas  $(n - 1)$  faces somam  $S_{(n-1)}$ .

O triédrio  $V(a_2, x, a_3)$ , em que temos:

$$\widehat{a_2 a_3} < \widehat{a_2 x} + \widehat{x a_3} \quad (1)$$

e ainda a soma:

$$\widehat{a_1 a_2} + \widehat{a_3 a_4} + \widehat{a_4 a_5} + \dots + \widehat{a_n a_1} = S_p.$$

Com isso temos:

$$\begin{aligned} S_n &= S_p + \widehat{a_2 a_3} \\ S_{n-1} &= S_p + \widehat{a_2 x} + \widehat{x a_3} \end{aligned}$$

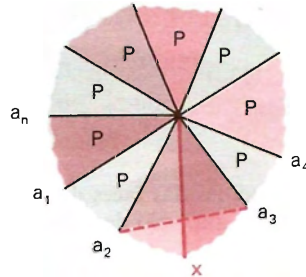
e, em vista de (1), vem:

$$S_n < S_{n-1}.$$

Repetindo-se o processo, vem:

$$S_{n-1} < S_{n-2} < \dots < S_3.$$

Então:  $S_n < S_3$ , e, como  $S_3 < 4r$ , conclui-se que:  $S_n < 4r$ .



**115. Congruência**

Dois ângulos poliédricos são congruentes quando é possível estabelecer uma correspondência entre as arestas de um e as do outro, de modo que as faces e os diedros correspondentes sejam ordenadamente congruentes.

**116. Ângulo poliédrico regular**

Um ângulo poliédrico convexo é regular se, e somente se, as faces são todas congruentes entre si.

## EXERCÍCIOS

- 173.** As faces de um ângulo poliédrico convexo medem respectivamente  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $40^\circ$  e  $x$ . Dê o intervalo de variação de  $x$ .

### Solução

$$\left. \begin{array}{l} x < 10^\circ + 20^\circ + 30^\circ + 40^\circ \Rightarrow x < 100^\circ \\ 10^\circ + 20^\circ + 30^\circ + 40^\circ + x < 360^\circ \Rightarrow x < 260^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow x < 100^\circ$$

- 174.** As medidas das faces de um ângulo tetraédrico convexo são  $120^\circ$ ,  $140^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $x$ . Dê o intervalo de variação de  $x$ .
- 175.** Qual é o intervalo de variação de  $x$  para que  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $120^\circ$  e  $x$  sejam as medidas das faces de um ângulo poliédrico convexo?
- 176.** As faces de um ângulo heptaédrico convexo medem respectivamente  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $x$  e  $160^\circ$ . Entre que valores  $x$  pode variar?
- 177.** Existem ângulos poliédricos convexos cujas faces medem, respectivamente:
- $40^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $150^\circ$
  - $100^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $130^\circ$ ,  $70^\circ$
  - $4^\circ$ ,  $5^\circ$ ,  $6^\circ$ ,  $7^\circ$ ,  $8^\circ$
  - $60^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $60^\circ$
  - $108^\circ$ ,  $108^\circ$ ,  $108^\circ$
- 178.** Quantos tipos de ângulos poliédricos convexos podemos formar:
- com todas as faces iguais a  $60^\circ$
  - com todas as faces iguais a  $90^\circ$
  - com todas as faces iguais a  $120^\circ$
- 179.** Qual é o número máximo de arestas de um ângulo poliédrico convexo cujas faces são todas de  $70^\circ$ ?



# Poliedros Convexos

## I. Poliedros convexos

### 117. Superfície poliédrica limitada convexa

Superfície poliédrica limitada convexa é a reunião de um número finito de polígonos planos e convexos (ou regiões poligonais convexas), tais que:

- dois polígonos não estão num mesmo plano;
- cada lado de polígono não está em mais que dois polígonos;
- havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, eles devem formar uma única poligonal fechada, plana ou não, chamada contorno;
- o plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semi-espço (condição de convexidade).

As superfícies poliédricas limitadas convexas que têm contorno são chamadas *abertas*. As que não têm contorno são chamadas *fechadas*.

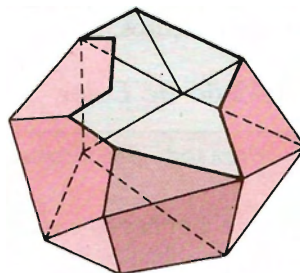
*Elementos*: uma superfície poliédrica limitada convexa tem:

*faces*: são os polígonos;

*arestas*: são os lados dos polígonos;

*vértices*: são os vértices dos polígonos;

*ângulos*: são os ângulos dos polígonos.



**118. Nota**

Uma superfície poliédrica limitada convexa aberta ou fechada não é uma região convexa.

**119. Poliedro convexo**

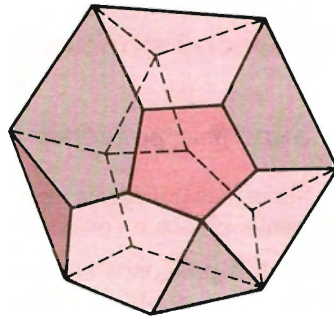
Consideremos um número finito  $n$  ( $n \geq 4$ ) de polígonos planos convexos (ou regiões poligonais convexas) tais que:

- dois polígonos não estão num mesmo plano;
- cada lado de polígono é comum a dois e somente dois polígonos;
- o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semi-espaço.

Nessas condições, ficam determinados  $n$  semi-espaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os restantes. A interseção desses semi-espaços é chamado *poliedro convexo*.

Um poliedro convexo possui: *faces*, que são os polígonos convexos; *arestas*, que são os lados dos polígonos e *vértices*, que são os vértices dos polígonos.

A reunião das faces é a *superfície* do poliedro.

**120. Congruência**

Dois poliedros são congruentes se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus elementos de modo que as faces e os ângulos poliédricos de um sejam ordenadamente congruentes às faces e ângulos poliédricos do outro.

Da congruência entre dois poliedros sai a congruência das faces, arestas, ângulos e diedros.

**121. Relação de Euler**

Para todo poliedro convexo, ou para sua superfície, vale a relação

$$V - A + F = 2$$

em que  $V$  é o número de vértices,  $A$  é o número de arestas e  $F$  é o número de faces do poliedro.

*Demonstração*

a) Por indução finita referente ao número de faces, vamos provar, em caráter preliminar, que, para uma superfície poliédrica limitada convexa *aberta*, vale a relação:

$$V_a + A_a + F_a = 1$$

em que

$V_a$  é o número de vértices,

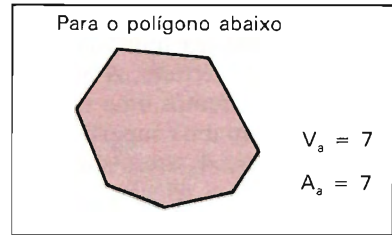
$A_a$  é o número de arestas e

$F_a$  é o número de faces

da superfície poliédrica limitada aberta.

1) Para  $F_a = 1$ .

Neste caso a superfície se reduz a um polígono plano convexo de  $n$  lados e, então,  $V_a = n$ ,  $A_a = n$ . Temos:



$$V_a - A_a + F_a = n - n + 1 = 1 \Rightarrow V_a - A_a + F_a = 1.$$

Logo, a relação está verificada para  $F_a = 1$ .

2) Admitindo que a relação vale para uma superfície de  $F'$  faces (que possui  $V'$  vértices e  $A'$  arestas), vamos provar que também vale para uma superfície de  $F' + 1$  faces (que possui  $F' + 1 = F_a$  faces,  $V_a$  vértices e  $A_a$  arestas).

Por hipótese, para a superfície de  $F'$  faces,  $A'$  arestas e  $V'$  vértices vale:

$$V' - A' + F' = 1.$$

Acrescentando a essa superfície (que é aberta) uma face de  $p$  arestas (lados) e considerando que  $q$  dessas arestas (lados) coincidem com arestas já existentes, obtemos uma nova superfície com  $F_a$  faces,  $A_a$  arestas e  $V_a$  vértices tais que:

$$F_a = F' + 1$$

$$A_a = A' + p - q \quad (q \text{ arestas coincidiram})$$

$$V_a = V' + p - (q + 1) \quad (q + 1 \text{ vértices coincidem})$$

Formando a expressão  $V_a - A_a + F_a$  e substituindo os valores acima, vem:

$$\begin{aligned} V_a - A_a + F_a &= V' + p - (q + 1) - (A' + p - q) + (F' + 1) = \\ &= V' + p - q - 1 - A' - p + q - F' + 1 = V' - A' + F' \end{aligned}$$

Com  $V_a - A_a + F_a = V' - A' + F'$  provamos que essa expressão não se altera se acrescentamos (ou retiramos) uma face da superfície.

Como, por hipótese,  $V' - A' + F' = 1$ , vem que

$$V_a - A_a + F_a = 1$$

o que prova a relação preliminar.

b) Tomemos a superfície de qualquer poliedro convexo ou qualquer superfície poliédrica limitada convexa fechada (com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces) e dela retiremos uma face. Ficamos, então, com uma superfície aberta (com  $V_a$  vértices,  $A_a$  arestas e  $F_a$  faces) para a qual vale a relação

$$V_a - A_a + F_a = 1.$$

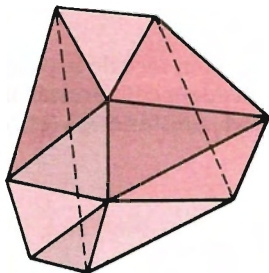
Como

$V_a = V$ ,  $A_a = A$  e  $F_a = F - 1$ , vem  $V - A + (F - 1) = 1$ , ou seja:

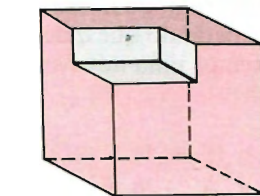
$$V - A + F = 2$$

**Nota:** O teorema de Euler está ligado a um conceito que engloba o de poliedro convexo, razão pela qual vale para este.

*Exemplos*



$$V - A + F = 9 - 18 + 11 = 2$$



$$V - A + F = 14 - 21 + 9 = 2$$

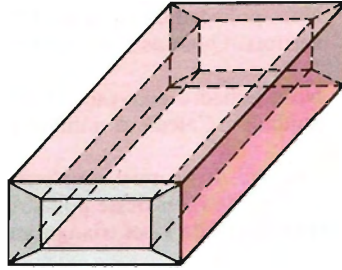
Veja ao lado a figura de um poliedro para o qual não vale a relação de Euler.

Note que ele possui:

$$V = 16, A = 32 \text{ e } F = 16.$$

Então:

$$V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0.$$



## 122. Poliedro euleriano

Os poliedros para os quais é válida a relação de Euler são chamados poliedros eulerianos.

Todo poliedro convexo é euleriano, mas nem todo poliedro euleriano é convexo.

# EXERCÍCIOS

- 180.** Um poliedro convexo de onze faces tem seis faces triangulares e cinco faces quadrangulares. Calcule o número de arestas e de vértices do poliedro.

### Solução

Número de arestas:

nas 6 faces triangulares temos  $6 \times 3$  arestas e nas 5 faces quadrangulares  $5 \times 4$  arestas.

Cada aresta é comum a duas faces; todas as arestas foram contadas 2 vezes. Então:

$$2A = 6 \times 3 + 5 \times 4 \implies 2A = 38 \implies A = 19.$$

Número de vértices:

com  $F = 11$  e  $A = 19$  na relação  $V - A + F = 2$ , temos:

$$V - 19 + 11 = 2, \text{ ou seja, } V = 10.$$

- 181.** Determine o número de vértices de um poliedro convexo que tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 pentagonal e 2 hexagonais.

- 182.** Num poliedro convexo de 10 arestas, o número de faces é igual ao número de vértices. Quantas faces tem esse poliedro?
- 183.** Num poliedro convexo o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces desse poliedro.
- 184.** Um poliedro convexo apresenta faces quadrangulares e triangulares. Calcule o número de faces desse poliedro, sabendo que o número de arestas é o quádruplo do número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares é igual a 5.
- 185.** Um poliedro convexo tem 11 vértices, o número de faces triangulares igual ao número de faces quadrangulares e uma face pentagonal. Calcule o número de faces desse poliedro.
- 186.** Calcule o número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares de um poliedro com 20 arestas e 10 vértices.
- 187.** Um poliedro de sete vértices tem cinco ângulos tetraédricos e dois ângulos pentaédricos. Quantas arestas e quantas faces tem o poliedro?

### Solução

*Arestas:* O número de arestas dos 5 ângulos tetraédricos é  $5 \times 4$  e o número de arestas dos 2 pentaédricos é  $2 \times 5$ ; notando que cada aresta foi contada duas vezes, pois é comum a dois ângulos poliédricos, temos:

$$2A = 5 \times 4 + 2 \times 5 \implies 2A = 30 \implies A = 15.$$

*Faces:* Com  $V = 7$  e  $A = 15$  em  $V - A + F = 2$ , vem  $F = 10$ .

- 188.** Ache o número de faces de um poliedro convexo que possui 16 ângulos triedros.
- 189.** Determine o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo formado por cinco triedros, sete ângulos tetraédricos, nove ângulos pentaédricos e oito ângulos hexaédricos.
- 190.** Um poliedro convexo possui 1 ângulo pentaédrico, 10 ângulos tetraédricos, e os demais triedros. Sabendo que o poliedro tem: número de faces triangulares igual ao número de faces quadrangulares, 11 faces pentagonais, e no total 21 faces, calcule o número de vértices do poliedro convexo.
- 191.** O “cubo-octaedro” possui seis faces quadradas e oito triangulares. Determine o número de faces, arestas e vértices desse sólido euleriano.
- 192.** O tetraexaedro possui 4 faces triangulares e 6 faces hexagonais. Determine o número de faces, arestas e vértices desse sólido, sabendo que ele é euleriano.
- 193.** Num poliedro convexo, 4 faces são quadriláteros e as outras triângulos. O número de arestas é o dobro do número de faces triangulares. Quantas são as faces?

- 194.** Um poliedro convexo possui apenas faces triangulares e quadrangulares. Sabendo que os números de faces triangulares e quadrangulares são diretamente proporcionais aos números 2 e 3 e que o número de arestas é o dobro do número de vértices, calcule o número total de faces desse poliedro.
- 195.** Um poliedro convexo possui, apenas, faces triangulares, quadrangulares e pentagonais. O número de faces triangulares excede o de faces pentagonais em duas unidades. Calcule o número de faces de cada tipo, sabendo que o poliedro tem 7 vértices.
- 196.** Um poliedro convexo de 24 arestas é formado apenas por faces triangulares e quadrangulares. Seccionado por um plano convenientemente escolhido, dele se pode destacar um novo poliedro convexo, sem faces triangulares, com uma face quadrangular a mais e um vértice a menos que o poliedro primitivo. Calcule o número de faces do poliedro primitivo.
- 197.** Ache o número de vértices de um poliedro convexo que tem  $a$  faces de  $l$  lados,  $b$  faces de  $m$  lados e  $c$  faces de  $n$  lados. Discuta.

### 123. Propriedade

A soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo é

$$S = (V - 2) \cdot 4r$$

em que  $V$  é o número de vértices e  $r$  é um ângulo reto.

#### Demonstração

$V$ ,  $A$  e  $F$  são, nessa ordem, os números de vértices, arestas e faces do poliedro. Sejam  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_F$  os números de lados das faces 1, 2, 3, ...  $F$ , ordenadamente. A soma dos ângulos de uma face é  $(n - 2) \cdot 2r$ .

Para todas as faces, temos:

$$\begin{aligned} S &= (n_1 - 2) \cdot 2r + (n_2 - 2) \cdot 2r + (n_3 - 2) \cdot 2r + \dots + (n_F - 2) \cdot 2r = \\ &= n_1 \cdot 2r - 4r + n_2 \cdot 2r - 4r + n_3 \cdot 2r - 4r + \dots + n_F \cdot 2r - 4r = \\ &= (n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_F) \cdot 2r - \underbrace{4r - 4r - \dots - 4r}_{F \text{ vezes}} \end{aligned}$$

Sendo

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_F = 2A$$

(pois cada aresta foi contada duas vezes em  $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_F$ ),

substituindo, vem:

$$S = 2A \cdot 2r - F \cdot 4r \implies S = (A - F) \cdot 4r. \quad (1)$$

Como vale a relação de Euler,

$$V - A + F = 2 \implies V - 2 = A - F. \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$S = (V - 2) \cdot 4r$$

## II. Poliedros de Platão

### 124. Definição

Um poliedro é chamado poliedro de Platão se, e somente se, satisfaz as três seguintes condições:

- todas as faces têm o mesmo número ( $n$ ) de arestas,
- todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número ( $m$ ) de arestas,
- vale a relação de Euler ( $V - A + F = 2$ ).

### 125. Propriedade

Existem cinco, e somente cinco, *classes* de poliedros de Platão.

#### *Demonstração*

Usando as condições que devem ser verificadas por um poliedro de Platão, temos:

- cada uma das  $F$  faces tem  $n$  arestas ( $n \geq 3$ ), e como cada aresta está em duas faces:

$$n \cdot F = 2A \implies F = \frac{2A}{n}. \quad (1)$$

- cada um dos  $V$  ângulos poliédricos tem  $m$  arestas ( $m \geq 3$ ), e como cada aresta contém dois vértices:

$$m \cdot V = 2A \implies V = \frac{2A}{m}. \quad (2)$$

- $V - A + F = 2$  (3)



Substituindo (1) e (2) em (3) e depois dividindo por  $2A$ , obtemos:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2 \implies \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \quad (4)$$

Sabemos que  $n \geq 3$  e  $m \geq 3$ . Notemos, porém, que se  $m$  e  $n$  fossem simultaneamente maiores que 3 teríamos:

$$\left. \begin{array}{l} m > 3 \Rightarrow m \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{m} \leq \frac{1}{4} \\ n > 3 \Rightarrow n \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq 0$$

o que contraria a igualdade (4), pois  $A$  é um número positivo.

Concluimos então que, nos poliedros de Platão,  $m = 3$  ou  $n = 3$  (isto significa que um poliedro de Platão possui, obrigatoriamente, *triedro* ou *triângulo*):

1º) Para  $m = 3$  (supondo que tem *triedro*).

Em (4) vem:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \implies \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \implies n < 6.$$

m	n
3	3
3	4
3	5

Então,  $n = 3$  ou  $n = 4$  ou  $n = 5$

(respectivamente faces triangulares ou quadrangulares ou pentagonais).

2º) Para  $n = 3$  (supondo que tem *triângulo*).

Em (4):

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \implies \frac{1}{m} > \frac{1}{6} \implies m < 6.$$

m	n
3	3
4	3
5	3

Então,  $m = 3$  ou  $m = 4$  ou  $m = 5$

(respectivamente ângulos triédricos ou tetraédricos ou pentaédricos).

Resumindo os resultados encontrados no 1º e no 2º, concluímos que os poliedros de Platão são determinados pelos pares  $(m, n)$  da tabela ao lado, sendo, portanto, cinco, e somente cinco, as classes de poliedros de Platão.

m	n
3	3
3	4
3	5
4	3
5	3

### Conseqüência

Para saber o número de arestas  $A$ , o número de faces  $F$  e o número de vértices  $V$  de cada poliedro de Platão, basta substituir em (4) os valores de  $m$  e  $n$  encontrados e depois trabalhar com (1) e (2).

#### Exemplo

Uma das possibilidades encontradas para  $m$  e  $n$  foi  $m = 3$  e  $n = 5$ .

Com esses valores em (4), temos:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{30} = \frac{1}{A} \Rightarrow A = 30.$$

$$\text{Em (2): } V = \frac{2 \cdot 30}{3} \Rightarrow V = 20.$$

$$\text{Em (1): } F = \frac{2 \cdot 30}{5} \Rightarrow F = 12.$$

Como é o número de faces que determina nome, o poliedro de nosso exemplo é *dodecaedro*.

Notemos que  $m = 3$  significa ângulos *triédricos* (ou triedros) e  $n = 5$ , faces *pentagonais*.

### 126. Nomes dos poliedros de Platão

Procedendo como indicamos no problema acima, temos, em resumo:

m	n	A	V	F	nome
3	3	6	4	4	<b>Tetraedro</b>
3	4	12	8	6	<b>Hexaedro</b>
4	3	12	6	8	<b>Octaedro</b>
3	5	30	20	12	<b>Dodecaedro</b>
5	3	30	12	20	<b>Icosaedro</b>

## III. Poliedros regulares

Um poliedro convexo é regular quando:

- suas faces são polígonos regulares e congruentes,
- seus ângulos poliédricos são congruentes.

## 127. Propriedade

Existem cinco, e somente cinco, *tipos* de poliedros regulares.

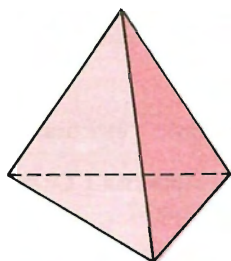
### Demonstração

Usando as condições para um poliedro ser regular, temos:

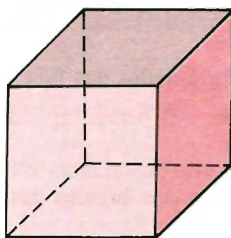
a) suas faces são polígonos regulares e congruentes, então todas têm o mesmo número de arestas;

b) seus ângulos poliédricos são congruentes, então todos têm o mesmo número de arestas.

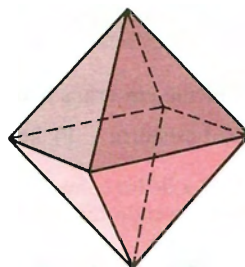
Por essas conclusões temos que os poliedros regulares são poliedros de Platão e portanto existem cinco e somente cinco tipos de poliedros regulares: *tetraedro regular*, *hexaedro regular*, *octaedro regular*, *dodecaedro regular* e *icosaedro regular*.



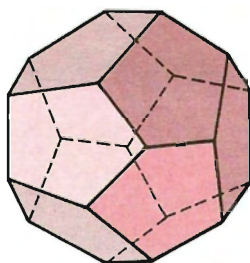
Tetraedro regular



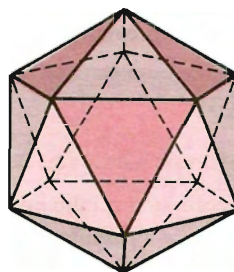
Hexaedro regular



Octaedro regular



Dodecaedro regular



Icosaedro regular

## 128. Observação

Todo poliedro regular é poliedro de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é poliedro regular.





- 209.** Demonstre que em qualquer poliedro convexo vale a relação:  
 $2V = 4 + F_3 + 2F_4 + 3F_5 + 4F_6 + 6F_7 + \dots$

**Solução**

Tomando as relações (1) e (2) do exercício 204, a relação de Euler e eliminando  $A$  nessas relações, obtemos:

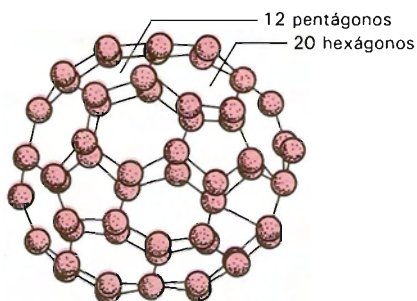
$$2V = 4 + F_3 + 2F_4 + 3F_5 + 4F_6 + \dots$$

- 210.** Em qualquer poliedro euleriano, a soma do número de faces triangulares com o número de triedros é superior ou igual a 8.
- 211.** Demonstre que os números  $F$ ,  $V$ ,  $A$ , das faces, vértices e arestas de um poliedro qualquer estão limitados por:

a)  $A + 6 \leq 3F \leq 2A$

b)  $A + 6 \leq 3V \leq 2A$

- 212.** Numa molécula tridimensional de carbono, os átomos ocupam os vértices de um poliedro convexo com 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais regulares, como em uma bola de futebol.  
 Qual é o número de átomos de carbono na molécula? E o número de ligações entre esses átomos?



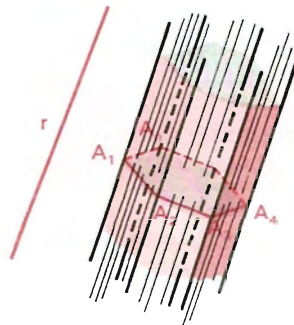
# Prisma

## I. Prisma ilimitado

### 129. Definição

Consideremos uma região poligonal convexa plana (polígono plano convexo)  $A_1 A_2 \dots A_n$  de  $n$  lados e uma reta  $r$  não paralela nem contida no plano da região (polígono). Chama-se *prisma ilimitado convexo* ou *prisma convexo indefinido* à reunião das retas paralelas a  $r$  e que passam pelos pontos da região poligonal dada.

Se a região poligonal (polígono)  $A_1 A_2 \dots A_n$  for côncava, o prisma ilimitado resultará côncavo.



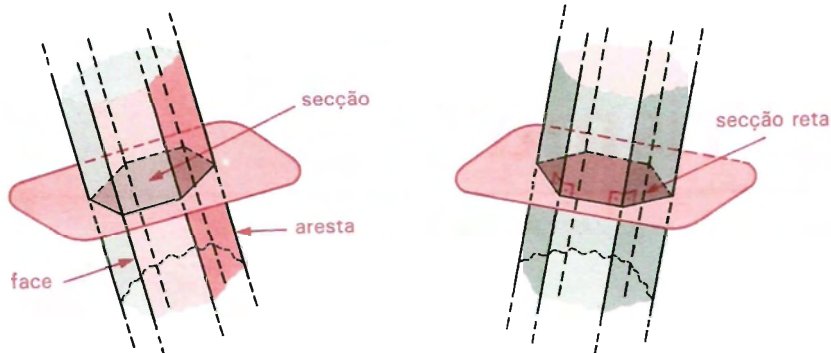
### 130. Elementos

Um prisma ilimitado convexo possui:  $n$  arestas,  $n$  diedros e  $n$  faces (que são faixas de plano).

### 131. Secções

*Secção* é uma região poligonal plana (polígono plano) com um só vértice em cada aresta.

*Secção reta* ou *secção normal* é uma secção cujo plano é perpendicular às arestas.



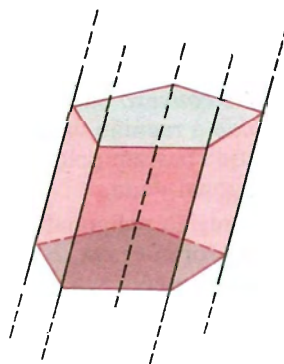
### 132. Superfície

A superfície de um prisma ilimitado convexo é a reunião das faces desse prisma. É chamada *superfície prismática convexa ilimitada* ou *indefinida*.

### 133. Propriedades

1ª) Secções paralelas de um prisma ilimitado são polígonos congruentes.

De fato, pelo paralelismo das arestas e pelo paralelismo dos planos de duas secções, podemos concluir que estas secções têm lados congruentes (lados opostos de paralelogramos) e ângulos congruentes (ângulos de lados respectivamente paralelos). Logo, as secções são congruentes.



2ª) A soma dos diedros de um prisma ilimitado convexo de  $n$  arestas é igual a  $(n - 2) \cdot 2$  retos.



### Demonstração

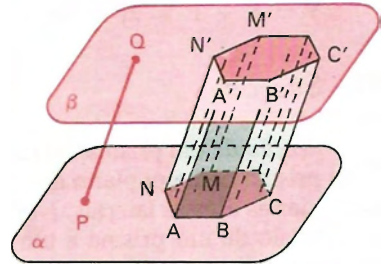
Sabemos que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo é igual a  $(n - 2) \cdot 2 \text{ retos}$ .

Como a secção reta do prisma é um polígono convexo de  $n$  lados, e a medida de cada ângulo desse polígono é a medida do diedro correspondente, pois o plano do polígono determina secção reta no diedro, então a soma dos diedros é igual a  $(n - 2) \cdot 2 \text{ retos}$ .

## II. Prisma

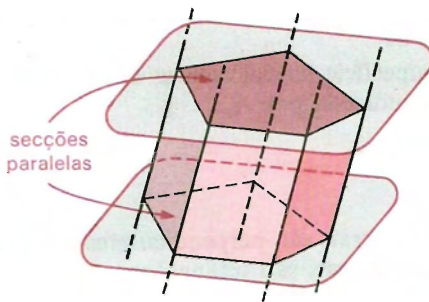
### 134. Definição

Consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa)  $ABCD \dots MN$  situado num plano  $\alpha$  e um segmento de reta  $PQ$ , cuja reta suporte intercepta o plano  $\alpha$ . Chama-se *prisma* (ou *prisma convexo*) à reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a  $\overline{PQ}$ , com uma extremidade nos pontos do polígono e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por  $\alpha$ .

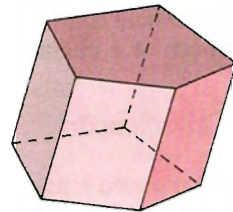


Podemos também definir o prisma como segue:

*Prisma convexo limitado* ou *prisma convexo definido* ou *prisma convexo* é a reunião da parte do prisma convexo ilimitado, compreendida entre os planos de duas secções paralelas e distintas, com essas secções.



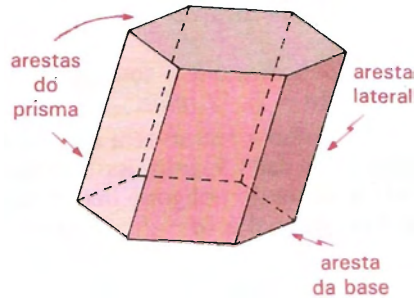
Prisma ilimitado



Prisma

### 135. Elementos

O prisma possui:  
 2 bases congruentes (as secções citadas acima),  
 $n$  faces laterais (paralelogramos),  
 $(n + 2)$  faces,  
 $n$  arestas laterais,  
 $3n$  arestas,  $3n$  diedros,  
 $2n$  vértices e  $2n$  triedros.



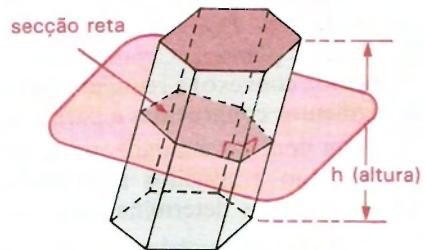
Prisma (hexagonal)

**136.** A *altura* de um prisma é a distância  $h$  entre os planos das bases. Devemos observar que para o prisma é válida a relação de Euler:  $V - A + F = 2n - 3n + (n + 2) = 2 \Rightarrow V - A + F = 2$ .

### 137. Secções

*Secção* de um prisma é a interseção do prisma com um plano que intercepta todas as arestas laterais. Notemos que a secção de um prisma é um polígono com vértice em cada aresta lateral.

*Secção reta* ou *secção normal* é uma secção cujo plano é perpendicular às arestas laterais.



### 138. Superfícies

*Superfície lateral* é a reunião das faces laterais. A área desta superfície é chamada área lateral e indicada por  $A_l$ .

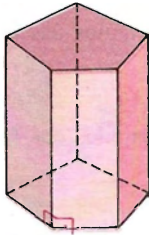
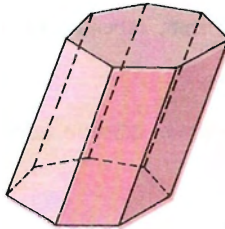
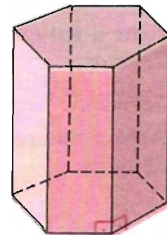
*Superfície total* é a reunião da superfície lateral com as bases. A área desta superfície é chamada área total e indicada por  $A_t$ .

### 139. Classificação

*Prisma reto* é aquele cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Num prisma reto as faces laterais são retângulos.

*Prisma oblíquo* é aquele cujas arestas são oblíquas aos planos das bases.

*Prisma regular* é um prisma reto cujas bases são polígonos regulares.

Prisma reto  
(pentagonal)Prisma oblíquo  
(heptagonal)Prisma regular  
(hexagonal)**140.** *Natureza de um prisma*

Um prisma será triangular, quadrangular, pentagonal, etc., conforme a *base* for um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.

## EXERCÍCIOS

**213.** Ache a natureza de um prisma, sabendo que ele possui:

- a) 7 faces;      b) 8 faces;      c) 15 arestas;      d) 24 arestas.

**214.** Prove que a soma dos ângulos de todas as faces de um prisma de  $n$  faces laterais vale  $S = (n - 1) \cdot 8r$ , em que  $r = 90^\circ$ .

**1ª solução**

Se o prisma tem  $n$  faces laterais, sua base é um polígono convexo de  $n$  lados, e a soma dos ângulos internos desse polígono é dada por  $(n - 2) \cdot 2r$ . Cada face lateral é um paralelogramo e a soma dos ângulos internos de cada uma é  $4r$ .

Como o prisma possui 2 bases e  $n$  faces laterais, vem:

$$S = 2 \cdot (n - 2) \cdot 2r + n \cdot 4r \Rightarrow S = n \cdot 4r - 8r + n \cdot 4r \Rightarrow S = n \cdot 8r - 8r \Rightarrow S = (n - 1) \cdot 8r.$$

**2ª solução**

O prisma possui  $2n$  vértices. Sendo a soma dos ângulos das faces dada por  $S = (V - 2) \cdot 4r$ , temos:

$$S = (2n - 2) \cdot 4r \Rightarrow S = (n - 1) \cdot 8r.$$

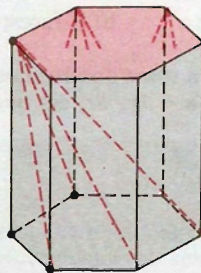
- 215.** Ache a natureza de um prisma, sabendo que a soma dos ângulos das faces é  $72$  retos.
- 216.** Ache a natureza de um prisma, sabendo que a soma dos ângulos das faces é  $32$  retos.
- 217.** Calcule a soma dos ângulos internos de todas as faces de um prisma oblíquo, sabendo que o prisma tem  $8$  faces.
- 218.** A soma dos ângulos internos de todas as faces de um prisma é igual a  $96r$ . Calcule a soma dos ângulos internos de uma de suas bases.
- 219.** Quantas diagonais possui um prisma cuja base é um polígono convexo de  $n$  lados?

### Solução

Observemos que, quando nos referimos às diagonais de um prisma, não levamos em consideração as diagonais das bases e das faces laterais do prisma. Seja então um prisma cuja base é um polígono convexo de  $n$  lados.

Unindo um vértice de uma das bases aos vértices da outra base, temos  $(n - 3)$  diagonais (eliminamos duas diagonais de face e uma aresta).

Como existem  $n$  vértices na base tomada, o número total de diagonais do prisma é  $n \cdot (n - 3)$ .



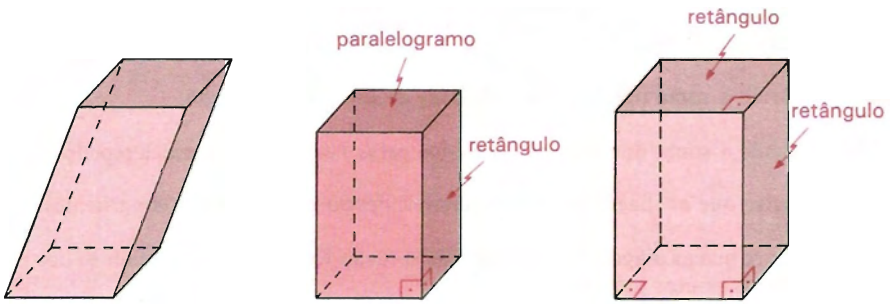
- 220.** Prove que o número de diagonais de um prisma é igual ao dobro do número de diagonais de uma de suas bases.
- 221.** Calcule a soma dos ângulos internos de todas as faces de um prisma que possui  $40$  diagonais.
- 222.** Calcule a soma dos ângulos diedros de um prisma que tem por base um polígono convexo de  $n$  lados.

### III. Paralelepípedos e romboedros

**141.** *Paralelepípedo* é um prisma cujas bases são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo é a reunião de seis paralelogramos.

**142.** *Paralelepípedo reto* é um prisma reto cujas bases são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo reto é a reunião de quatro retângulos (faces laterais) com dois paralelogramos (bases).

**143.** *Paralelepípedo reto-retângulo* ou *paralelepípedo retângulo* ou *ortoedro* é um prisma reto cujas bases são retângulos. A superfície total de um paralelepípedo retângulo é a reunião de seis retângulos.



Paralelepípedo  
(oblíquo)

Paralelepípedo  
reto

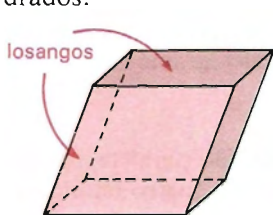
Paralelepípedo  
reto-retângulo

**144.** *Cubo* é um paralelepípedo retângulo cujas arestas são congruentes.

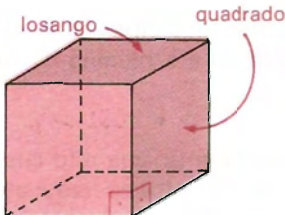
**145.** *Romboedro* é um paralelepípedo que possui as doze arestas congruentes entre si. A superfície total de um romboedro é a reunião de seis losangos.

**146.** *Romboedro reto* é um paralelepípedo reto que possui as doze arestas congruentes entre si. A superfície total de um romboedro reto é a reunião de quatro quadrados (faces laterais) com dois losangos (bases).

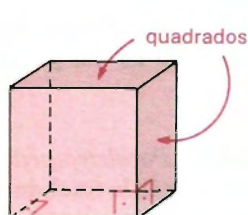
**147.** *Romboedro reto-retângulo* ou *cubo* é um romboedro reto cujas bases são quadrados. A superfície de um romboedro reto é a reunião de seis quadrados.



Romboedro (oblíquo)



Romboedro reto



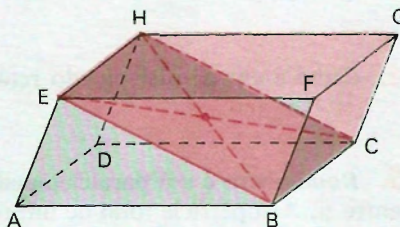
Romboedro reto-retângulo

## EXERCÍCIOS

- 223.** Calcule a soma dos ângulos das faces de um paralelepípedo.
- 224.** Calcule a soma dos diedros formados pelas faces de um paralelepípedo.
- 225.** Mostre que as diagonais de um paralelepípedo retângulo são congruentes.
- 226.** Mostre que as diagonais de um paralelepípedo retângulo interceptam-se nos respectivos pontos médios.

### Solução

Pelas arestas opostas ( $BC$  e  $EH$ ,  $AD$  e  $FG$ ) passam planos diagonais que determinam no paralelepípedo seções que são paralelogramos. As diagonais do paralelepípedo são diagonais desses paralelogramos. Como as diagonais de um paralelogramo se interceptam nos respectivos pontos médios, as diagonais do paralelepípedo também o fazem.

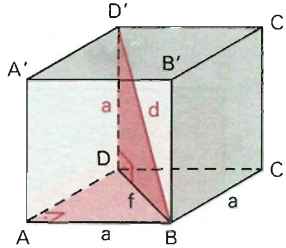


- 227.** Mostre que a seção feita em um paralelepípedo, por um plano que intercepta 4 arestas paralelas, é um paralelogramo.

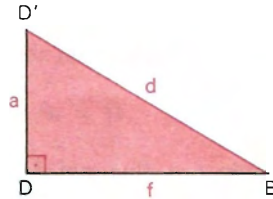
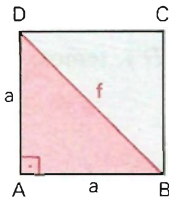
## IV. Diagonal e área do cubo

148. Dado um cubo de aresta  $a$ , calcular sua diagonal  $d$  e sua área total  $S$ .

**Solução**



base (face)



a) Cálculo de  $d$

Inicialmente calculemos a medida  $f$  de uma diagonal de face:

$$\text{No } \triangle BAD: f^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow f^2 = 2a^2 \Rightarrow f = a\sqrt{2}.$$

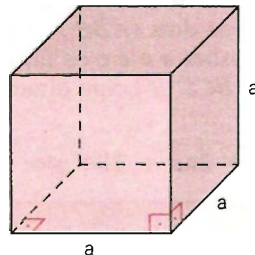
$$\text{No } \triangle BDD': d^2 = a^2 + f^2 \Rightarrow d^2 = a^2 + 2a^2 \Rightarrow d^2 = 3a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{d = a\sqrt{3}}$$

b) Cálculo de  $S$

A superfície total de um cubo é a reunião de seis quadrados congruentes de lado  $a$ . A área de cada um é  $a^2$ . Então, a área total do cubo é:

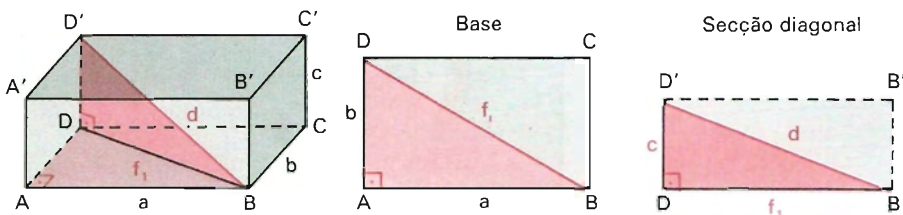
$$\boxed{S = 6a^2}$$



## V. Diagonal e área do paralelepípedo retângulo

**149.** Dado um paralelepípedo retângulo de dimensões  $a$ ,  $b$  e  $c$ , calcular as diagonais  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  das faces, a diagonal do paralelepípedo e sua área total  $S$ .

### Solução



a) Cálculo de  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$ .

Sendo  $f_1$  a diagonal da face  $ABCD$  (ou  $A'B'C'D'$ ), temos:

$$f_1^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow f_1 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Sendo  $f_2$  a diagonal da face  $ABB'A'$  (ou  $DCC'D'$ ) e  $f_3$  a diagonal da face  $ADD'A'$  (ou  $BCC'B'$ ), temos:

$$f_2^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow f_2 = \sqrt{a^2 + c^2} \qquad f_3^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow f_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

b) Cálculo de  $d$ .

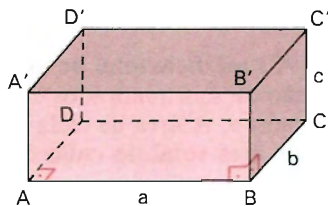
No  $\triangle BDD'$ :  $d^2 = f_1^2 + c^2 \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$

c) Cálculo da área total  $S$ .

A área total do paralelepípedo é a soma das áreas de seis retângulos: dois deles ( $ABCD$ ,  $A'B'C'D'$ ) com dimensões  $a$  e  $b$ , outros dois ( $ABB'A'$ ,  $DCC'D'$ ) com dimensões  $a$  e  $c$  e os últimos dois ( $ADD'A'$ ,  $BCC'B'$ ) com dimensões  $b$  e  $c$ . Logo,

$$S = 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow$$

$$S = 2(ab + ac + bc)$$





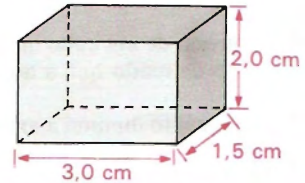
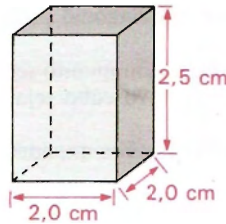
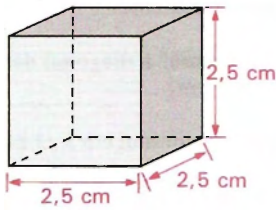
# EXERCÍCIOS

Calcule a medida da diagonal e a área total dos paralelepípedos, cujas medidas estão indicadas abaixo:

a) cubo

b) paralelepípedo retângulo

c) paralelepípedo retângulo

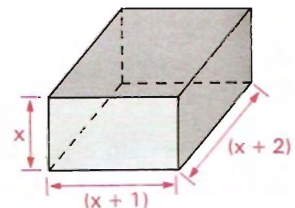
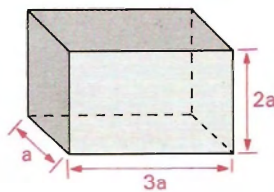
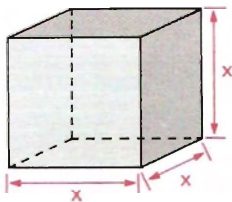


Represente através de expressões algébricas a medida da diagonal e a área total dos paralelepípedos, cujas medidas estão indicadas abaixo:

a) cubo

b) paralelepípedo retângulo

c) paralelepípedo retângulo



- 230.** Calcule a medida da aresta de um cubo de  $36 \text{ m}^2$  de área total.
- 231.** Calcule a diagonal de um paralelepípedo retângulo de dimensões  $y$ ,  $(y + 1)$  e  $(y - 1)$ .
- 232.** Calcule a medida da diagonal de um cubo, sabendo que a sua área total mede  $37,5 \text{ cm}^2$ .
- 233.** Calcule a medida da terceira dimensão de um paralelepípedo, sabendo que duas delas medem  $4 \text{ cm}$  e  $7 \text{ cm}$  e que sua diagonal mede  $3\sqrt{10} \text{ cm}$ .

- 234.** Calcule a medida da aresta de um cubo, sabendo que a diagonal do cubo excede em  $2\text{ cm}$  a diagonal da face.

### Solução

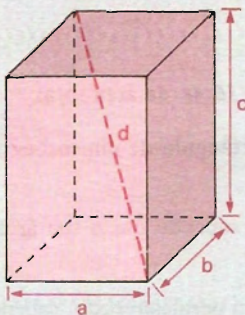
$$d - f = 2 \Rightarrow a\sqrt{3} - a\sqrt{2} = 2 \Rightarrow a(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2 \Rightarrow a = 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

Resposta:  $2(\sqrt{3} + \sqrt{2})\text{ cm}$ .

- 235.** Sabe-se que a diagonal de um cubo mede  $2,5\text{ cm}$ . Em quanto se deve aumentar a aresta desse cubo para que sua diagonal passe a medir  $5,5\text{ cm}$ ?
- 236.** A aresta de um cubo mede  $2\text{ cm}$ . Em quanto se deve aumentar a diagonal desse cubo de modo que a aresta do novo cubo seja igual a  $3\text{ cm}$ ?
- 237.** Em quanto diminui a aresta de um cubo quando a diagonal diminui em  $3\sqrt{3}\text{ cm}$ ?
- 238.** A diferença entre as áreas totais de dois cubos é  $164,64\text{ cm}^2$ . Calcule a diferença entre as suas diagonais, sabendo que a aresta do menor mede  $3,5\text{ cm}$ .
- 239.** Calcule a aresta de um cubo, sabendo que a soma dos comprimentos de todas as arestas com todas as diagonais e com as diagonais das seis faces vale  $32\text{ cm}$ .
- 240.** Determine a área total de um paralelepípedo retângulo cuja diagonal mede  $25\sqrt{2}\text{ cm}$ , sendo a soma de suas dimensões igual a  $60\text{ cm}$ .

### Solução

Considerando o paralelepípedo de dimensões  $a$ ,  $b$  e  $c$ , com a diagonal  $d = 25\sqrt{2}$ :



$$\begin{aligned} d^2 &= a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (25\sqrt{2})^2 &= a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 &= 1250 \end{aligned}$$

$$\text{Dados: } a + b + c = 60.$$

Sabendo que  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$  e observando que  $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$  e  $2(ab + ac + bc) = S$ , temos:

$$(a + b + c)^2 = d^2 + S.$$

Substituindo os valores, vem:

$$(60)^2 = 1\,250 + S \implies S = 2\,350.$$

Resposta: A área total do paralelepípedo é  $2\,350 \text{ cm}^2$ .

- 241.** Determine a diagonal de um paralelepípedo, sendo  $62 \text{ cm}^2$  sua área total e  $10 \text{ cm}$  a soma de suas dimensões.
- 242.** Prove que em um paralelepípedo retângulo a soma dos quadrados das quatro diagonais é igual à soma dos quadrados das doze arestas.
- 243.** Dois paralelepípedos retângulos têm diagonais iguais, e a soma das três dimensões de um é igual à soma das três do outro. Prove que as áreas totais de ambos são iguais.
- 244.** Determine as dimensões de um paralelepípedo retângulo, sabendo que são proporcionais aos números  $1, 2, 3$  e que a área total do paralelepípedo é  $352 \text{ cm}^2$ .

### Solução

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = k \implies (a = k, b = 2k, c = 3k) \quad (1)$$

$$S = 352 \implies 2(ab + ac + bc) = 352 \implies ab + ac + bc = 176 \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), vem:

$$1k \cdot 2k + 1k \cdot 3k + 2k \cdot 3k = 176 \implies 11k^2 = 176 \implies k^2 = 16 \implies k = 4.$$

Retornando a (1), temos:  $a = 4, b = 8$  e  $c = 12$ .

Resposta: As dimensões são  $4 \text{ cm}, 8 \text{ cm}$  e  $12 \text{ cm}$ .

- 245.** Calcule as dimensões de um paralelepípedo retângulo, sabendo que são proporcionais aos números  $5, 8, 10$  e que a diagonal mede  $63 \text{ cm}$ .
- 246.** As dimensões de um paralelepípedo são inversamente proporcionais aos números  $6, 4$  e  $3$ . Determine-as, sabendo que a área total desse paralelepípedo é  $208 \text{ m}^2$ .
- 247.** As dimensões  $x, y$  e  $z$  de um paralelepípedo retângulo são proporcionais a  $a, b$  e  $c$ . Dada a diagonal  $d$ , calcule essas dimensões.

- 248.** Com uma corda disposta em cruz, deseja-se amarrar um pacote em forma de ortoedro, cujas dimensões são  $1,40\text{ m}$ ,  $0,60\text{ m}$  e  $0,20\text{ m}$ . Se para fazer os nós gastam-se  $20\text{ cm}$ , responda: Quantos metros de corda serão necessários para amarrar o pacote?
- 249.** As dimensões de um ortoedro são inversamente proporcionais a  $r$ ,  $s$  e  $t$ . Calcule essas dimensões, dada a diagonal  $d$ .

**Solução**

Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$  as dimensões:

$$x^2 + y^2 + z^2 = d^2 \quad (1)$$

$$x = \frac{1}{r} k$$

$$y = \frac{1}{s} k$$

$$z = \frac{1}{t} k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{st}{rst} k$$

$$y = \frac{rt}{rst} k$$

$$z = \frac{rs}{rst} k$$

Mudando a constante para  $K = \frac{k}{rst}$ , vem:

$$x = stK$$

$$y = rtK$$

$$z = rsK \quad (2)$$

$$(2) \text{ em } (1): K^2(st^2t^2 + r^2t^2 + r^2s^2) = d^2 \Rightarrow K = \frac{d}{\sqrt{s^2t^2 + r^2t^2 + r^2s^2}}$$

Substituindo em (2), vem a resposta:

$$x = \frac{st d}{\sqrt{s^2t^2 + r^2t^2 + r^2s^2}};$$

$$y = \frac{rt d}{\sqrt{s^2t^2 + r^2t^2 + r^2s^2}};$$

$$z = \frac{rs d}{\sqrt{s^2t^2 + r^2t^2 + r^2s^2}}.$$

- 250.** As dimensões de um paralelepípedo retângulo são inversamente proporcionais a  $r$ ,  $s$ ,  $t$ . Calcule essas dimensões, sabendo que a área é  $S$ .
- 251.** As áreas de três faces adjacentes de um ortoedro estão entre si como  $p$ ,  $q$  e  $r$ . A área total é  $2\ell^2$ . Determine as três dimensões.
- 252.** Se a aresta de um cubo mede  $100\text{ cm}$ , encontre a distância de um vértice do cubo à sua diagonal.

## VI. Razão entre paralelepípedos retângulos

150.

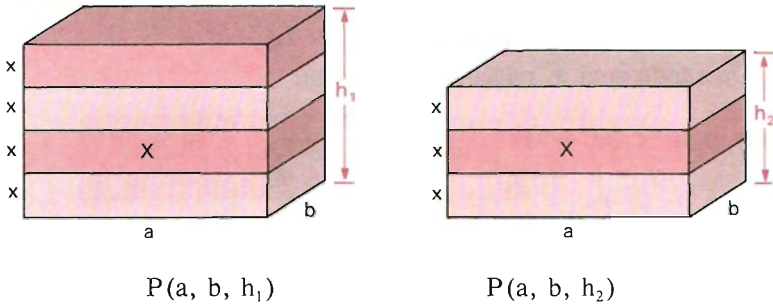
A razão entre dois paralelepípedos retângulos de bases congruentes é igual à razão entre as alturas.

Sejam  $P(a, b, h_1)$  e  $P(a, b, h_2)$  os paralelepípedos em que  $a, b, h_1$  e  $a, b, h_2$  são as respectivas dimensões.

Trata-se de demonstrar que:  $\frac{P(a, b, h_1)}{P(a, b, h_2)} = \frac{h_1}{h_2}$ .

*Demonstração*

1.º caso:  $h_1$  e  $h_2$  são comensuráveis



Sendo  $h_1$  e  $h_2$  comensuráveis, existe um segmento  $x$  submúltiplo comum de  $h_1$  e  $h_2$ :

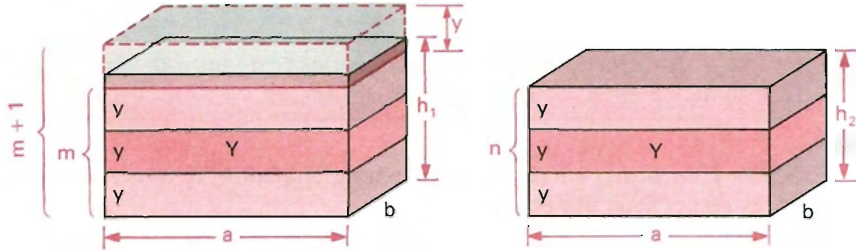
$$\left. \begin{array}{l} h_1 = p \cdot x \\ h_2 = q \cdot x \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{p}{q} \quad (1)$$

Construindo os paralelepípedos  $X(a, b, x)$ , temos:

$$\left. \begin{array}{l} P(a, b, h_1) = p \cdot X \\ P(a, b, h_2) = q \cdot X \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{P(a, b, h_1)}{P(a, b, h_2)} = \frac{p}{q} \quad (2)$$

De (1) e (2) vem:  $\frac{P(a, b, h_1)}{P(a, b, h_2)} = \frac{h_1}{h_2}$ .

2.º caso:  $h_1$  e  $h_2$  são *incomensuráveis*



Sendo  $h_1$  e  $h_2$  incomensuráveis, não existe segmento submúltiplo comum de  $h_1$  e  $h_2$ .

Tomemos um segmento  $y$  submúltiplo de  $h_2$  ( $y$  “cabe” um certo número inteiro  $n$  de vezes em  $h_2$ , isto é,  $h_2 = ny$ ).

Por serem  $h_1$  e  $h_2$  incomensuráveis, marcando sucessivamente  $y$  em  $h_1$ , temos que, chegando a um certo número inteiro  $m$  de vezes, acontece que:

$$my < h_1 < (m + 1)y.$$

Operando com as relações acima, vem:

$$my < h_1 < (m + 1)y \left. \begin{array}{l} \\ ny = h_2 = ny \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{h_1}{h_2} < \frac{m + 1}{n} \quad (3)$$

Construindo os paralelepípedos  $Y(a, b, y)$ , temos:

$$mY < P(a, b, h_1) < (m + 1)Y \left. \begin{array}{l} \\ nY = P(a, b, h_2) = nY \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{P(a, b, h_1)}{P(a, b, h_2)} < \frac{m + 1}{n} \quad (4)$$

Ora, sendo  $y$  submúltiplo de  $h_2$ , pode variar, e dividindo  $y$ , aumentamos  $n$ . Nessas condições,

$$\frac{m}{n} \text{ e } \frac{m + 1}{n}$$

formam um *par de classes contíguas* que definem um *único* número real, que é

$$\frac{h_1}{h_2} \text{ pela expressão (3) e } \frac{P(a, b, h_1)}{P(a, b, h_2)} \text{ pela expressão (4).}$$

Como esse número é *único*, então:

$$\frac{P(a, b, h_1)}{P(a, b, h_2)} = \frac{h_1}{h_2}.$$

## VII. Volume de um sólido

**151.** Volume de um sólido ou medida do sólido é um número real positivo associado ao sólido de forma que:

1º) sólidos congruentes têm volumes iguais;

2º) se um sólido  $S$  é a reunião de dois sólidos  $S_1$  e  $S_2$  que não têm pontos *interiores* comuns, então o volume de  $S$  é a soma dos volumes de  $S_1$  com  $S_2$ .

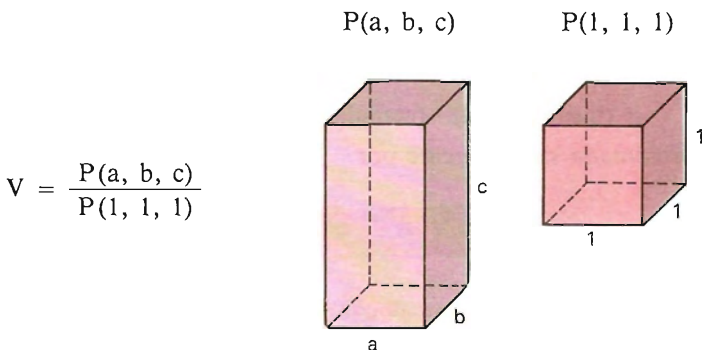
Os sólidos são medidos por uma *unidade* que, em geral, é um *cubo*. Assim, o volume desse cubo é  $1$ . Se sua aresta medir  $1\text{ cm}$  (um centímetro), seu volume será  $1\text{ cm}^3$  (um centímetro cúbico). Se sua aresta medir  $1\text{ m}$ , seu volume será  $1\text{ m}^3$ .

**152.** Dois sólidos são *equivalentes* se, e somente se, eles têm *volumes iguais* na mesma unidade de volume.

## VIII. Volume do paralelepípedo retângulo e do cubo

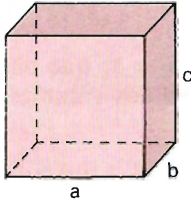
**153.** Seja  $P(a, b, c)$  o paralelepípedo retângulo de dimensões  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

Vamos medir esse paralelepípedo com o cubo unitário, isto é, com o paralelepípedo  $P(1, 1, 1)$ . Para isso, estabeleceremos a razão  $\frac{P(a, b, c)}{P(1, 1, 1)}$ , que será o volume procurado.

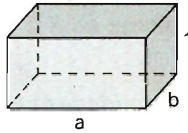


Consideremos, então, os paralelepípedos  $P(a, b, c)$ ,  $P(a, b, 1)$ ,  $P(a, 1, 1)$  e  $P(1, 1, 1)$  em que  $1$  é a unidade de comprimento.

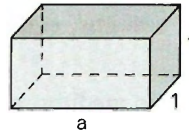
$P(a, b, c)$



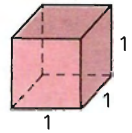
$P(a, b, 1)$



$P(a, 1, 1)$



$P(1, 1, 1)$



Com base na propriedade do item anterior, temos:

$$\frac{P(a, b, c)}{P(a, b, 1)} = \frac{c}{1} \quad (1) \quad \text{bases } (a, b) \text{ congruentes}$$

$$\frac{P(a, b, 1)}{P(a, 1, 1)} = \frac{b}{1} \quad (2) \quad \text{bases } (a, 1) \text{ congruentes}$$

$$\frac{P(a, 1, 1)}{P(1, 1, 1)} = \frac{a}{1} \quad (3) \quad \text{bases } (1, 1) \text{ congruentes}$$

Multiplicando-se membro a membro (1), (2) e (3):

$$\frac{P(a, b, c)}{P(a, b, 1)} \cdot \frac{P(a, b, 1)}{P(a, 1, 1)} \cdot \frac{P(a, 1, 1)}{P(1, 1, 1)} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P(a, b, c)}{P(1, 1, 1)} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{1} \Rightarrow V = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = (\text{medida de } a) \cdot (\text{medida de } b) \cdot (\text{medida de } c)$$

que será representada simplesmente por

$$V = a \cdot b \cdot c$$

em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são as *medidas* das dimensões do paralelepípedo retângulo na unidade escolhida.



## 154. Conclusões

1ª) O volume de um paralelepípedo retângulo é o produto das medidas de suas três dimensões.

2ª) Tomando como base a face de dimensões  $a$  e  $b$ , indicando por  $B$  a área dessa base ( $B = a \cdot b$ ) e a altura  $c$  por  $h$ , podemos escrever:

$$V = B \cdot h$$

Isto é:

O volume de um paralelepípedo retângulo é igual ao *produto* da *área da base* pela *altura*.

3ª) Volume do cubo

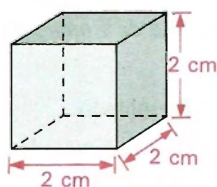
No cubo de aresta  $a$ , temos  $b = a$  e  $c = a$ .

$$V = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V = a \cdot a \cdot a \Rightarrow V = a^3$$

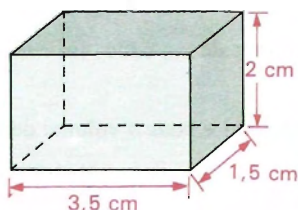
## EXERCÍCIOS

253. Calcule a área total e o volume dos paralelepípedos, cujas medidas estão indicadas abaixo.

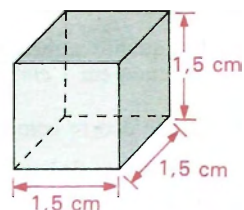
a) cubo



b) paralelepípedo retângulo

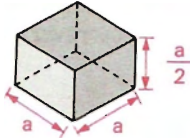


c) cubo

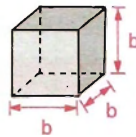


**254.** Represente através de expressões algébricas a área total e o volume dos paralelepípedos, cujas medidas estão indicadas abaixo.

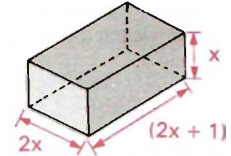
a) paralelepípedo retângulo



b) cubo



c) paralelepípedo retângulo



**255.** Calcule a medida da aresta de um cubo de  $27 \text{ m}^3$  de volume.

**256.** Calcule a diagonal, a área total e o volume de um paralelepípedo retângulo, sabendo que as suas dimensões são  $5 \text{ cm}$ ,  $7 \text{ cm}$  e  $9 \text{ cm}$ .

**257.** Determine as medidas da aresta e da diagonal de um cubo cujo volume é  $1728 \text{ cm}^3$ .

**258.** Calcule o volume de um cubo cuja área total mede  $600 \text{ cm}^2$ .

**259.** Determine o volume de um cubo de área total  $96 \text{ cm}^2$ .

**260.** Quer-se confeccionar um cubo por meio de uma folha de zinco de  $8,64 \text{ m}^2$ . Qual será o comprimento da aresta do cubo? Qual será o volume do cubo?

**261.** Calcule a medida da diagonal, a área total e o volume de um cubo, cuja soma das medidas das arestas vale  $30 \text{ cm}$ .

**262.** Calcule a medida da diagonal, a área total e o volume de um cubo, sabendo que a diagonal de uma face mede  $5\sqrt{2} \text{ cm}$ .

**263.** Expresse a área total e o volume de um cubo:

- em função da medida da diagonal da face ( $f$ );
- em função da medida da sua diagonal ( $d$ ).

**264.** Calcule as medidas da aresta e da diagonal de um cubo, sabendo que seu volume é oito vezes o volume de um outro cubo que tem  $2 \text{ cm}$  de aresta.

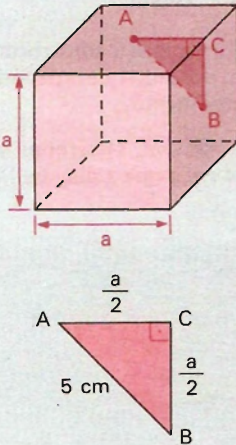
**265.** Se aumentamos a aresta de um cubo em  $2\sqrt{5} \text{ cm}$ , obtemos um outro cubo cuja diagonal mede  $30 \text{ cm}$ . Determine a área total e o volume do cubo primitivo.

**266.** Em quanto aumenta o volume de um cubo, em  $\text{cm}^3$ , se a aresta de  $1 \text{ metro}$  é aumentada em  $1 \text{ cm}$ ?

**267.** O que ocorre com a área total e com o volume de um cubo quando:

- a aresta dobra;
- a aresta é reduzida a  $1/3$ ;
- a aresta é reduzida à metade;
- sua aresta é multiplicada por  $k$ .

- 268.** Enche-se um recipiente cúbico de metal com água. Dado que um galão do líquido tem um volume de  $21\,600\text{ cm}^3$  e sendo  $120\text{ cm}$  a aresta do recipiente, calcule o número de galões que o recipiente pode conter.
- 269.** Calcule o volume de um cubo, sabendo que a distância entre os centros de duas faces contíguas é de  $5\text{ cm}$ .

**Solução**

Sejam  $A$  e  $B$  os centros das duas faces contíguas e  $C$  ponto médio da aresta comum às faces consideradas.

Aplicando a relação de Pitágoras, vem:

$$5^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2a^2}{4} = 25 \Rightarrow a = 5\sqrt{2}$$

Volume:

$$V = a^3 \Rightarrow V = (5\sqrt{2})^3 \Rightarrow \\ \Rightarrow V = 250\sqrt{2}$$

Resposta: O volume do cubo é  $250\sqrt{2}\text{ cm}^3$ .

- 270.** O segmento de reta que liga um dos vértices de um cubo ao centro de uma das faces opostas mede  $60\text{ cm}$ . Calcule o volume desse cubo.
- 271.** Calcule o volume de um cubo, sabendo que quando se aumenta sua aresta em  $1\text{ metro}$  a área lateral do mesmo cresce  $164\text{ m}^2$ .
- 272.** A medida da superfície total de um cubo é  $726\text{ cm}^2$ . Quanto devemos aumentar sua diagonal para que o volume aumente  $1\,413\text{ cm}^3$ ?
- 273.** Calcule a aresta e a área total de um cubo de volume igual ao do ortoedro cujas dimensões são  $8\text{ cm}$ ,  $27\text{ cm}$  e  $125\text{ cm}$ .
- 274.** Calcule o comprimento da aresta e a área total de um cubo equivalente a um paralelepípedo retângulo, cujas dimensões são  $8\text{ cm}$ ,  $64\text{ cm}$  e  $216\text{ cm}$ .
- 275.** O volume de um paralelepípedo retângulo vale  $270\text{ dm}^3$ . Uma de suas arestas mede  $5\text{ dm}$  e a razão entre as outras duas é  $2/3$ . Determine a área total desse paralelepípedo.

- 276.** As dimensões de um paralelepípedo retângulo são proporcionais aos números 3, 6 e 9. Calcule essas dimensões, a área total e o volume do paralelepípedo, sabendo que a diagonal mede  $63 \text{ cm}$ .
- 277.** As dimensões  $a$ ,  $b$  e  $c$  de um ortoedro são proporcionais a 6, 3 e 2. Sabendo que a área total é  $288 \text{ cm}^2$ , calcule as dimensões, a diagonal e o volume do paralelepípedo.
- 278.** A altura de um ortoedro mede  $10 \text{ cm}$  e as bases são quadrados de diagonal  $5\sqrt{2} \text{ cm}$ . Calcule a área da superfície lateral e o volume.
- 279.** Determine a área de uma placa de metal necessária para a construção de um depósito em forma de ortoedro (aberto em cima), sabendo que o depósito tem  $2 \text{ m}$  de largura,  $1,50 \text{ m}$  de altura e  $1,20 \text{ m}$  de comprimento.
- 280.** A área de um paralelepípedo reto-retângulo é  $720 \text{ cm}^2$ . Determine seu volume, sabendo que a soma de suas dimensões vale  $34 \text{ cm}$  e que a diagonal de uma das faces vale  $20 \text{ cm}$ .

### Solução

Sendo  $x$ ,  $y$  e  $z$  as dimensões, temos:

$$S = 720 \Rightarrow xy + xz + yz = 360 \quad (1)$$

$$x + y + z = 34 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 = f_1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 400 \quad (3)$$

De (2) vem:

$$(x + y + z)^2 = 34^2 \Rightarrow \underbrace{x^2 + y^2}_{400} + z^2 + 2\underbrace{(xy + xz + yz)}_{360} = 1\,156.$$

Com (3) e (1), temos:

$$400 + z^2 + 720 = 1\,156 \Rightarrow z^2 = 36 \Rightarrow z = 6.$$

Substituindo  $z = 6$  em (2), ficamos com:  $x + y = 28$ .

$$(x + y = 28, x^2 + y^2 = 400) \Rightarrow x = 16 \text{ e } y = 12 \text{ (ou } x = 12 \text{ e } y = 16).$$

$$\text{Volume: } V = x \cdot y \cdot z \Rightarrow V = 12 \cdot 16 \cdot 6 \Rightarrow V = 1\,152.$$

Resposta: O volume é  $1\,152 \text{ cm}^3$ .

- 281.** Determine as dimensões e o volume de um ortoedro, sendo a soma de suas dimensões igual a  $45 \text{ cm}$ , a diagonal da base igual a  $25 \text{ cm}$  e a área total igual a  $1\,300 \text{ cm}^2$ .
- 282.** Determine o volume e a área total de um paralelepípedo retângulo, dada a soma de suas dimensões  $43a$ , a diagonal  $25a$  e a área de uma face  $180a^2$ .

- 283.** Calcule as dimensões de um ortoedro cuja diagonal mede  $13 \text{ cm}$ , de área total  $192 \text{ cm}^2$ , e sabendo que a área da secção por um plano por duas arestas opostas é  $60 \text{ cm}^2$ .
- 284.** Determine o volume de um ortoedro de  $90 \text{ cm}^2$  de superfície, supondo que quatro faces do ortoedro são retângulos congruentes e que cada uma das outras é um quadrado de área igual à metade da área do retângulo.
- 285.** Um cubo e um ortoedro têm ambos soma das arestas igual a  $72 \text{ cm}$ . A dimensão menor do ortoedro é  $2/3$  da aresta do cubo e a dimensão maior do ortoedro é  $4/3$  da dimensão menor do ortoedro. Determine a relação entre os volumes de ambos os sólidos.
- 286.** Uma banheira tem a forma de um ortoedro cujas dimensões são  $1,20 \text{ m}$  de comprimento,  $0,90 \text{ m}$  de largura e  $0,50 \text{ m}$  de altura. Quantos litros de água pode conter? Se toda a água da banheira for colocada em um depósito em forma de cubo de  $3 \text{ m}$  de aresta, que altura alcançará a água?
- 287.** A altura  $h$  de um paralelepípedo retângulo mede  $60 \text{ cm}$ , sendo a sua base um quadrado. A diagonal do paralelepípedo forma um ângulo de  $60^\circ$  com o plano da base. Determine o volume do paralelepípedo retângulo.

**Solução**

Com os elementos caracterizados na figura ao lado, temos:

No triângulo  $ABC$ , vem

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{h}{d} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{d} \Rightarrow$$

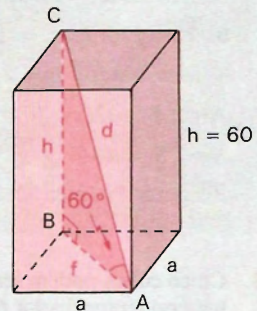
$$\Rightarrow d = 40\sqrt{3}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{h}{f} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{60}{f} \Rightarrow f = 20\sqrt{3}$$

$$\text{Na base, temos: } f = a\sqrt{2} \Rightarrow a\sqrt{2} = 20\sqrt{3} \Rightarrow a = 10\sqrt{6}.$$

$$\text{Volume: } V = B \cdot h \Rightarrow V = a^2 \cdot h \Rightarrow V = (10\sqrt{6})^2 \cdot 60 = 36\,000.$$

Resposta: O volume é  $36\,000 \text{ cm}^3$ .



- 288.** Calcule a área total  $S$  de um paralelepípedo retângulo em função de seu volume  $V$  e do lado  $l$  de sua base, sabendo que a base é um quadrado.
- 289.** Calcule as dimensões de um paralelepípedo retângulo, sabendo que a soma de duas delas é  $25 \text{ m}$ , o volume  $900 \text{ m}^3$  e a área total  $600 \text{ m}^2$ .
- 290.** Determine o volume de um paralelepípedo retângulo, sabendo que duas dimensões têm igual medida e que a diagonal mede  $9 \text{ cm}$ , sendo  $144 \text{ cm}^2$  sua área total.

- 291.** A área da superfície total de um cubo é igual à de um ortoedro de área  $216 \text{ cm}^2$ . A altura do ortoedro é de  $3 \text{ cm}$  e uma das dimensões da base é  $1/3$  da outra. Determine a relação entre os volumes de ambos os sólidos.
- 292.** Calcule a área total de um paralelepípedo retângulo, sendo  $192 \text{ cm}^3$  o seu volume, a diagonal o triplo da diagonal de uma das faces de menor área, que é o triplo da menor dimensão do paralelepípedo.

### Solução

Seja  $x, y$  e  $z$  (com  $x > y > z$ ) as medidas das dimensões, temos:

$$x \cdot y \cdot z = 192 \quad (1)$$

$$d = 3f \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 3\sqrt{y^2 + z^2} \quad (2)$$

$$f = 3z \Rightarrow \sqrt{y^2 + z^2} = 3z \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow y^2 + z^2 = 9z^2 \Rightarrow y^2 = 8z^2 \Rightarrow y = 2\sqrt{2}z$$

$$(2) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9(y^2 + z^2) \Rightarrow x^2 = 72z^2 \Rightarrow x = 6\sqrt{2}z$$

Substituindo  $y$  e  $x$  em (1), temos:

$$6\sqrt{2}z \cdot 2\sqrt{2}z \cdot z = 192 \Rightarrow 24z^3 = 192 \Rightarrow z = 2.$$

Temos, então:  $z = 2, y = 4\sqrt{2}$  e  $x = 12\sqrt{2}$ .

$$\begin{aligned} \text{Área: } S &= 2(xy + xz + yz) \Rightarrow S = 2(96 + 8\sqrt{2} + 24\sqrt{2}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow S = 64(3 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Resposta: A área total é  $64(3 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2$ .

- 293.** Cinco cubos podem ser dispostos um sobre o outro, formando um ortoedro. Também podemos dispor 6 cubos iguais aos anteriores, pondo 3 sobre 3, obtendo um outro ortoedro. Determine a razão entre os volumes e a razão entre as áreas dos ortoedros obtidos.
- 294.** Com seis cubos iguais, construímos um ortoedro, dispondo os cubos um sobre o outro de maneira que suas faces estejam exatamente superpostas. Determine a relação entre as áreas do ortoedro e de um cubo, sendo os volumes dos cubos os mesmos.
- 295.** Dos ortoedros que podemos formar dispondo de oito cubos iguais, determine o ortoedro de menor superfície.
- 296.** Sobre a base quadrada de um ortoedro, constrói-se exteriormente a ele um cubo que tem por base o quadrado cujos vértices são os pontos médios da base do ortoedro. Determine o volume e a área da superfície do sólido assim obtido, sabendo que a altura do ortoedro é os  $2/3$  do lado da base e a soma de suas dimensões é de  $16 \text{ cm}$ .

- 297.** Calcule as medidas  $x$  e  $y$  das arestas de dois cubos, conhecendo a soma  $x + y = \ell$  ( $\ell$  dado) e a soma dos volumes  $v^3$  ( $v$  é dado). Discuta.

**Solução**

$$x + y = \ell \quad (1) \qquad x^3 + y^3 = v^3 \quad (2)$$

$$(2) \implies (x + y)(x^2 - xy + y^2) = v^3 \implies x^2 - xy + y^2 = \frac{v^3}{\ell} \quad (3)$$

$$(1) \implies (x + y)^2 = \ell^2 \implies x^2 + 2xy + y^2 = \ell^2 \quad (4)$$

Fazendo (4) - (3), vem:

$$3xy = \ell^2 - \frac{v^3}{\ell} \implies xy = \frac{\ell^3 - v^3}{3\ell} \quad (\text{com } \ell^3 - v^3 > 0)$$

Sabendo a soma ( $S$ ) e o produto ( $P$ ) de  $x$  e  $y$  dados por (1) e (4), montamos a equação  $z^2 - Sz + P = 0$ , cujas raízes são  $x$  e  $y$ . Assim,

$$z^2 - \ell z + \frac{\ell^3 - v^3}{3\ell} = 0 \implies 3\ell z^2 - 3\ell^2 z + \ell^3 - v^3 = 0$$

$$\text{Então, } x = z_1 = \frac{3\ell^2 + \sqrt{3\ell(4v^3 - \ell^3)}}{6\ell} \quad \text{e} \quad y = z_2 = \frac{3\ell^2 - \sqrt{3\ell(4v^3 - \ell^3)}}{6\ell}.$$

Discussão: 1)  $3\ell(4v^3 - \ell^3) \geq 0 \implies 4v^3 - \ell^3 \geq 0 \implies \ell \leq v \sqrt[3]{4}$

2)  $\ell^3 - v^3 > 0 \implies \ell > v$

Logo,  $v < \ell \leq v \sqrt[3]{4}$ .

- 298.** Demonstre que:

- em um cubo as arestas são igualmente inclinadas em relação a uma diagonal qualquer.
- em um cubo as projeções das arestas sobre qualquer das diagonais são iguais à terça parte da diagonal.

- 299.** Sabendo que as faces de um cubo são inscritíveis em círculos de  $7,29\pi \text{ cm}^2$  de área, calcule:

- a medida da sua diagonal;
- a medida de sua área total;
- a medida de seu volume.

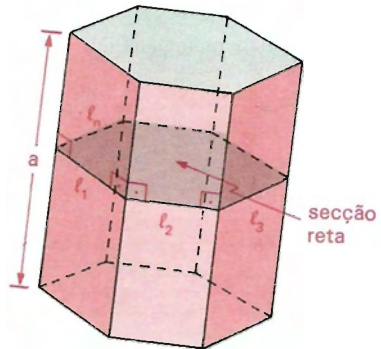
- 300.** Demonstre que, em todo paralelepípedo, a soma dos quadrados das áreas das secções, determinadas pelos seis planos diagonais, é igual ao dobro da soma dos quadrados das áreas das seis faces.

- 301.** a) Entre todos os paralelepípedos retângulos de mesmo volume, qual o de menor superfície?  
b) Entre todos os paralelepípedos retângulos de mesma superfície, qual o de maior volume?

## IX. Área lateral e área total do prisma

**155.** A *área lateral* ( $A_l$ ) de um prisma é a soma das áreas das faces laterais.

Seja um prisma de aresta lateral medindo  $a$  e  $l_1, l_2, \dots, l_n$  as medidas dos lados de uma secção reta. Cada face lateral é um paralelogramo de base  $a$  e altura igual a um lado da secção reta.



Assim,

$$A_l = al_1 + al_2 + \dots + al_n = \underbrace{(l_1 + l_2 + \dots + l_n)}_{2p} \cdot a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A_l = 2p \cdot a}$$

em que  $2p$  é a medida do perímetro da secção reta  
 $a$  é a medida da aresta lateral.

**156.** A *área total* de um prisma é a soma das áreas das faces laterais ( $A_l$ ) com as áreas das bases (duas bases).

Assim,

$$A_t = A_l + 2B \Rightarrow \boxed{A_t = 2p \cdot a + 2B}$$

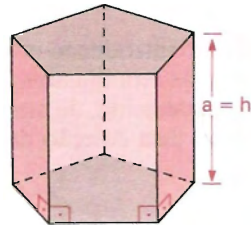
em que  $B$  é a área de uma base.



**157.** No *prisma reto* a aresta lateral é igual à altura ( $a = h$ ) e a base é secção reta. Então:

$$A_r = 2p \cdot a \Rightarrow A_r = 2ph$$

$$A_t = A_r + 2B \Rightarrow A_t = 2p \cdot h + 2B$$



**158.** No *prisma regular*, a aresta lateral é igual à altura ( $a = h$ ) e a base, que é secção reta, é um polígono regular.

*Cálculo da área de base B*

A área da base ( $B$ ) é a soma de  $n$  triângulos de base  $\ell$  (medida do lado) e altura  $m$  (medida do apótema). Então:

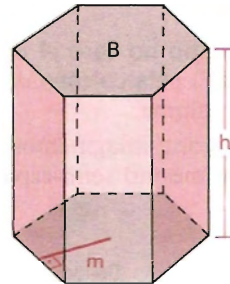
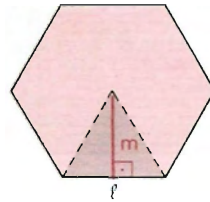
$$B = n \cdot \left( \frac{\ell \cdot m}{2} \right) \Rightarrow B = \frac{(n \cdot \ell)m}{2}$$

mas,

$$n\ell = 2p = \text{medida do perímetro}$$

Daí,

$$B = \frac{2p \cdot m}{2} \Rightarrow B = p \cdot m$$



*Cálculo da área total:  $A_t$*

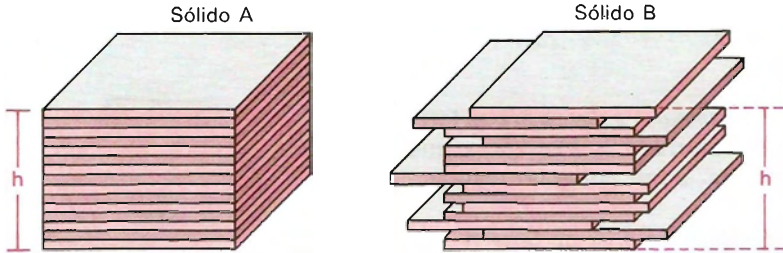
$$A_r = 2p \cdot a \Rightarrow A_r = 2p \cdot h$$

$$A_t = A_r + 2B \Rightarrow A_t = 2p \cdot h + 2p \cdot m \Rightarrow A_t = 2p(h + m)$$

$$A_t = 2p(h + m)$$

## X. Princípio de Cavalieri

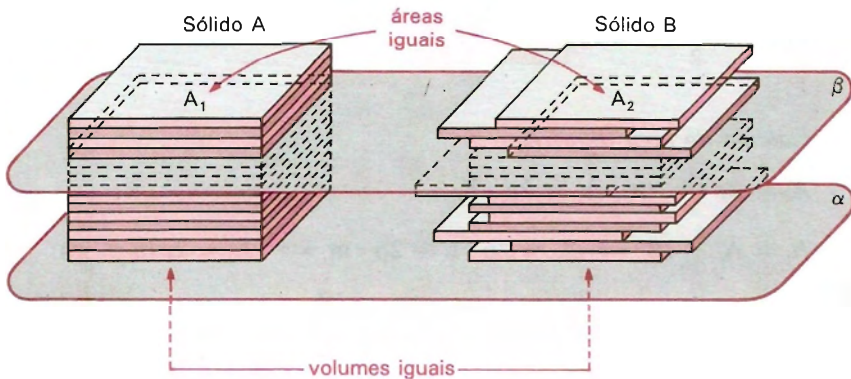
**159.** Como introdução intuitiva, suponhamos a existência de uma coleção finita de chapas retangulares (paralelepípedos retângulos) de mesmas dimensões e, conseqüentemente, de mesmo volume. Imaginemos ainda a formação de dois sólidos com essa coleção de chapas, como indicam as figuras *A* e *B* abaixo.



(pilhas de livros ou de folhas)

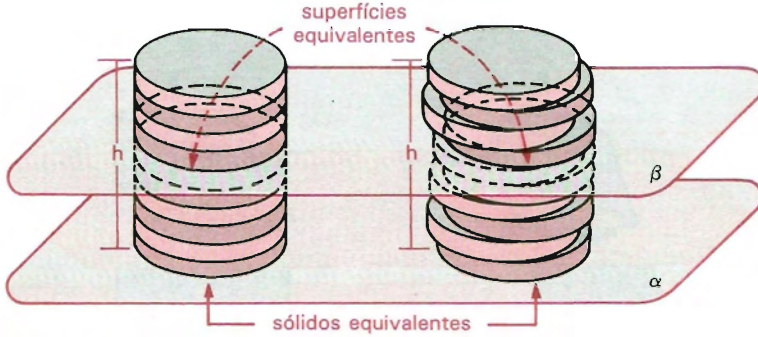
Tanto no caso *A* como no *B*, a parte de espaço ocupada (o “volume ocupado”) pela coleção de chapas é o mesmo, isto é, os sólidos *A* e *B* têm o mesmo volume.

Agora, imaginemos esses sólidos com base num mesmo plano  $\alpha$  e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por  $\alpha$ .



Qualquer plano  $\beta$ , secante aos sólidos A e B, paralelo a  $\alpha$ , determina em A e em B superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes).

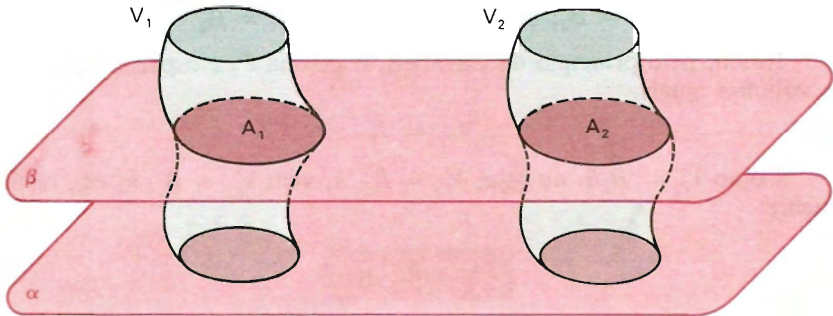
A mesma idéia pode ser estendida para duas pilhas com igual número de moedas congruentes.



O fato que acabamos de caracterizar intuitivamente é formalizado pelo *princípio de Cavalieri* ou *postulado de Cavalieri* (Francesco Bonaventura Cavalieri, 1598-1647) que segue:

**160.**

Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes).

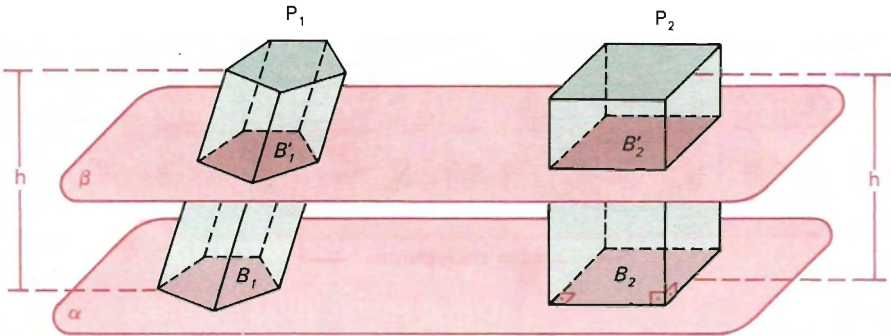


$$(A_1 = A_2 \Rightarrow V_1 = V_2)$$

A aplicação do princípio de Cavalieri, em geral, implica a colocação dos sólidos com base num mesmo plano, paralelo ao qual estão as secções de áreas iguais (que é possível usando a congruência).

## XI. Volume do prisma

**161.** Consideremos um prisma  $P_1$  de altura  $h$  e área da base  $B_1 = B$  e um paralelepípedo retângulo de altura  $h$  e área de base  $B_2 = B$  (o prisma e o paralelepípedo têm alturas congruentes e bases equivalentes).



Suponhamos, sem perda de generalidade, que os dois sólidos têm as bases num mesmo plano  $\alpha$  e estão num dos semi-espacos determinados por  $\alpha$ .

Qualquer plano  $\beta$  paralelo a  $\alpha$ , que secciona  $P_1$ , também secciona  $P_2$ , e as secções ( $B'_1$  e  $B'_2$ , respectivamente) têm áreas iguais, pois são congruentes às respectivas bases.

$$(B'_1 = B_1, B'_2 = B_2, B_1 = B_2 = B) \implies B'_1 = B'_2$$

Então, pelo princípio de Cavalieri, o prisma  $P_1$  e o paralelepípedo  $P_2$  têm volumes iguais.

$$V_{P_1} = V_{P_2}$$

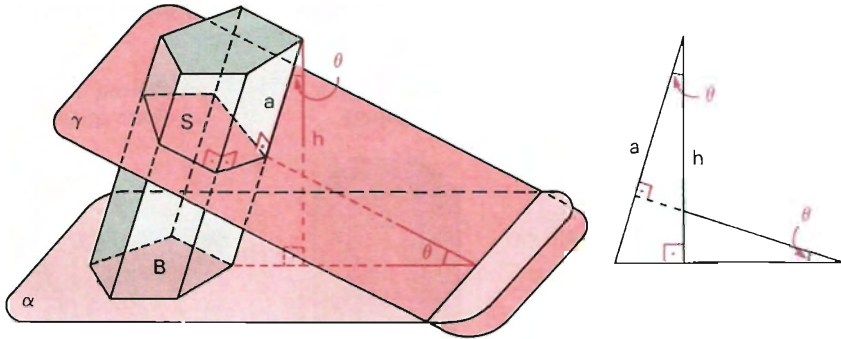
Como  $V_{P_2} = B_2 h$ , ou seja,  $V_{P_2} = B \cdot h$ , vem  $V_{P_1} = B \cdot h$ ; ou, resumidamente:

$$V = B \cdot h$$

### 162. Conclusão

O volume de um prisma é o *produto* da *área da base* pela *medida da altura*.

## 163. Observação



Consideremos um prisma oblíquo de área da base  $B$ , altura  $h$  e aresta lateral  $a$ . Seja  $\alpha$  o plano da base e  $S$  uma secção reta situada num plano  $\gamma$  que forma com  $\alpha$  um diedro de medida  $\theta$ .

Notemos que  $S$  é a projeção ortogonal de  $B$  sobre o plano  $\gamma$ . Daí vem:

$$S = B \cdot \cos \theta.$$

O ângulo entre  $a$  e  $h$  também é  $\theta$  (ângulos de lados respectivamente perpendiculares). Donde sai:

$$h = a \cdot \cos \theta.$$

Substituindo  $B$  e  $h$  na expressão do volume do prisma, vem:

$$V = B \cdot h \Rightarrow V = \frac{S}{\cos \alpha} \cdot a \cos \alpha \Rightarrow \boxed{V = S \cdot a}$$

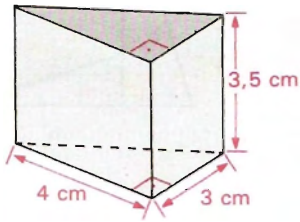
Notando que a expressão também é válida para um prisma reto, em que  $B = S$  e  $a = h$ , temos:

O volume de um prisma é o produto da área da *secção reta* pela medida da *aresta lateral*.

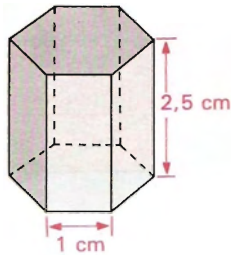
# EXERCÍCIOS

**302.** Calcule a área lateral, a área total e o volume dos prismas, cujas medidas estão indicadas nas figuras abaixo.

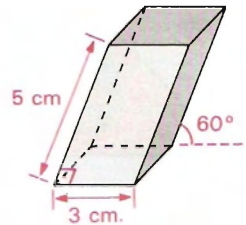
a) Prisma reto  
(triangular)



b) Prisma regular  
(hexagonal)

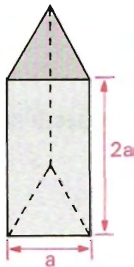


c) Prisma oblíquo  
(base quadrada)

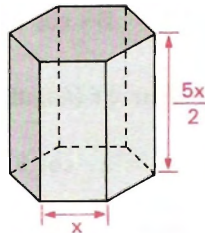


**303.** Represente através de expressões algébricas a área lateral, a área total e o volume dos prismas, cujas medidas estão indicadas nas figuras abaixo.

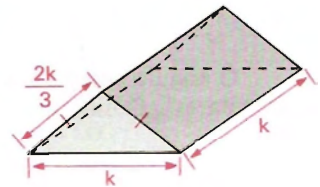
a) Prisma regular  
(triangular)



b) Prisma regular  
(hexagonal)



c) Prisma reto  
(triangular)



**304.** A base de um prisma de  $10\text{ cm}$  de altura é um triângulo retângulo isósceles de  $6\text{ cm}$  de hipotenusa. Calcule a área lateral e o volume do prisma.

**305.** Calcule o volume e a área total de um prisma, sendo sua seção reta um trapézio isósceles cujas bases medem  $30\text{ cm}$  e  $20\text{ cm}$  e cuja altura mede  $10\sqrt{2}\text{ cm}$  e a área lateral  $640\text{ cm}^2$ .

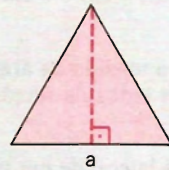
**306.** Determine a área lateral e o volume de um prisma reto de  $25\text{ cm}$  de altura, cuja base é um hexágono regular de apótema  $4\sqrt{3}\text{ cm}$ .

- 307.** Determine a medida da aresta da base de um prisma triangular regular, sendo seu volume  $8 \text{ m}^3$  e sua altura  $80 \text{ cm}$ .
- 308.** Um prisma reto tem por base um hexágono regular. Qual é o lado do hexágono e a altura do prisma, sabendo que o volume é de  $4 \text{ m}^3$  e a superfície lateral de  $12 \text{ m}^2$ ?
- 309.** Num prisma oblíquo a aresta lateral mede  $5 \text{ cm}$ , a secção reta é um trapézio isósceles cuja altura mede  $8 \text{ cm}$  e as bases medem  $7 \text{ cm}$  e  $19 \text{ cm}$ , respectivamente. Calcule a área lateral desse prisma.
- 310.** Determine a área total de um prisma triangular oblíquo, sendo a sua secção reta um triângulo equilátero de  $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$  de área e um dos lados da secção igual à aresta lateral do prisma.
- 311.** Um prisma triangular regular tem a aresta da base medindo  $10 \text{ dm}$ . Em quanto se deve aumentar a altura, conservando-se a mesma base, para que a área lateral do novo prisma seja igual à área total do prisma dado?

### Solução

Área de um triângulo equilátero de lado  $a$ :

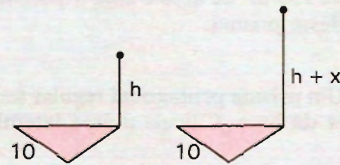
$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



Sejam  $A_{t_1}$  e  $A_{t_2}$  as áreas lateral e total do prisma e  $A_{t_3}$  a área lateral do novo prisma.

Seja  $B$  a área da base, temos:

$$B = \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}.$$



Supondo que a altura  $h$  do prisma teve um aumento  $x$ , vem:

$$A_{t_1} = A_{t_1} + 2B \Rightarrow A_{t_1} = 3(10 \cdot h) + 2 \cdot 25\sqrt{3} \Rightarrow A_{t_1} = 30h + 50\sqrt{3}$$

$$A_{t_2} = 3 \cdot (10 \cdot h_2) \Rightarrow A_{t_2} = 30 \cdot (h + x)$$

$$A_{t_1} = A_{t_2} \Rightarrow 30h + 50\sqrt{3} = 30(h + x) \Rightarrow 30x = 50\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Resposta:  $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ , dm.

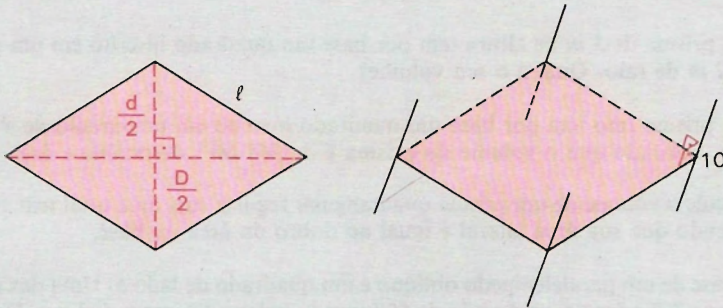
- 312.** Um prisma tem por base um triângulo equilátero cujo lado é  $a$  e a altura desse prisma é igual ao dobro da altura do triângulo da base. Determine o seu volume.
- 313.** A aresta da base de um prisma hexagonal regular é  $r$  e a aresta lateral é  $s$ . Sabendo que esse prisma é equivalente a um outro triangular regular, cuja aresta da base é  $s$  e cuja aresta lateral é  $r$ , calcule a relação entre  $r$  e  $s$ .
- 314.** Calcule o volume de um prisma hexagonal regular com  $3\text{ m}$  de altura, sabendo que se a altura fosse de  $5\text{ m}$  o volume do prisma aumentaria em  $6\text{ m}^3$ .
- 315.** A aresta da base de um prisma hexagonal regular mede  $8\text{ cm}$ . Em quanto se deve diminuir a altura desse prisma de modo que se tenha um novo prisma com área total igual à área lateral do prisma dado?
- 316.** Calcule o volume de um prisma triangular regular de  $5\sqrt{3}\text{ cm}$  de altura, sabendo que a área lateral excede a área da base em  $56\sqrt{3}\text{ cm}^2$ .
- 317.** A altura de um prisma reto mede  $15\text{ cm}$  e a base é um triângulo cujos lados medem  $4\text{ cm}$ ,  $6\text{ cm}$  e  $8\text{ cm}$ . Calcule a área lateral e o volume do sólido.
- 318.** Calcule a medida da aresta lateral de um prisma cuja área lateral mede  $72\text{ dm}^2$ , sendo os lados da secção reta respectivamente  $3\text{ dm}$ ,  $4\text{ dm}$  e  $5\text{ dm}$ .
- 319.** A aresta lateral de um prisma reto mede  $12\text{ m}$ ; a base é um triângulo retângulo de  $150\text{ m}^2$  de área e cuja hipotenusa mede  $25\text{ m}$ . Calcule a área total e o volume desse prisma.
- 320.** Um prisma pentagonal regular tem  $8\text{ cm}$  de altura, sendo  $7\text{ cm}$  a medida da aresta da base. Calcule a área lateral desse prisma.
- 321.** Calcule a área lateral do prisma oblíquo, cuja secção reta é um triângulo equilátero de  $4\sqrt{3}\text{ m}^2$  de área, sabendo que a aresta lateral é igual ao perímetro da secção reta.
- 322.** Calcule a área total e o volume de um prisma hexagonal regular de  $12\text{ m}$  de aresta lateral e  $4\text{ m}$  de aresta da base.
- 323.** Um prisma hexagonal regular tem a área da base igual a  $96\sqrt{3}\text{ cm}^2$ . Calcule a área lateral e o volume do prisma, sabendo que sua altura é igual ao apótema da base.



- 324.** A secção reta de um prisma oblíquo é um losango, cujas diagonais são diretamente proporcionais a 3 e 4. Calcule a área lateral do prisma, sabendo que sua aresta lateral mede 10 cm e que a área de sua secção reta é igual a 54 cm<sup>2</sup>.

### Solução

Sendo  $B$  a área,  $\ell$  o lado,  $d$  e  $D$  as diagonais do losango, temos:



$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{4} &= \frac{d}{3} = k \\ B &= 54 \cdot B = \frac{D \cdot d}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{4k \cdot 3k}{2} = 54 \Rightarrow k = 3$$

$$\ell^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow \ell^2 = 4k^2 + \frac{9}{4}k^2 = \frac{25k^2}{4} \Rightarrow \ell = \frac{5k}{2}$$

$$\ell = \frac{5k}{2} \Rightarrow \ell = \frac{5 \cdot 3}{2} \Rightarrow \ell = \frac{15}{2}$$

Sendo  $A_\ell$  a área lateral, temos:

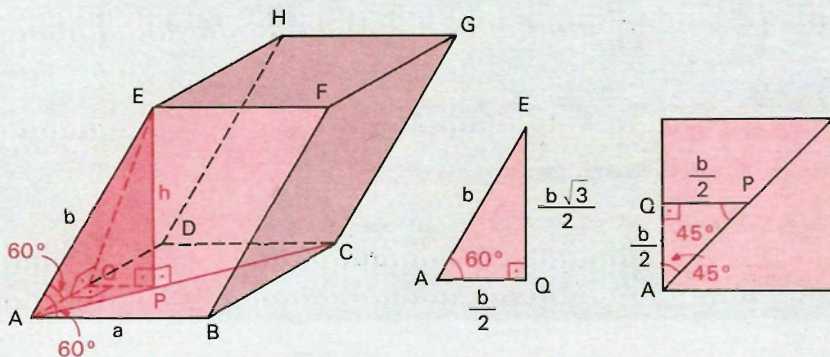
$$A_\ell = 4 \cdot (\ell \cdot a) \Rightarrow A_\ell = 4 \cdot \frac{15}{2} \cdot 10 \Rightarrow A_\ell = 300.$$

Resposta: 300 cm<sup>2</sup>.

- 325.** Um prisma reto tem por base um losango em que uma de suas diagonais é os  $3/4$  da outra, e a soma de ambas é 14 cm. Calcule a área total e o volume desse prisma, sabendo que sua altura é igual ao semiperímetro da base.
- 326.** Calcule a área lateral de um prisma oblíquo, sendo 8 cm a medida de sua aresta lateral, a secção reta do prisma um losango de 125 cm<sup>2</sup> de área e a razão das diagonais desse losango igual a  $2/5$ .

- 327.** Determine a medida da aresta e a área total de um prisma reto que tem por base um triângulo equilátero, sendo a altura do prisma igual à medida do lado do triângulo equilátero, e o volume,  $2\sqrt{3} \text{ cm}^3$ .
- 328.** Calcule o volume e a área total de um prisma cuja base é um triângulo equilátero de  $6 \text{ dm}$  de perímetro, sendo a altura do prisma o dobro da altura da base.
- 329.** Calcule o volume de um prisma triangular regular, sendo todas suas arestas de mesma medida e sua área lateral  $33 \text{ m}^2$ .
- 330.** Um prisma de  $3 \text{ m}$  de altura tem por base um quadrado inscrito em um círculo de  $2 \text{ m}$  de raio. Qual é o seu volume?
- 331.** Um prisma reto tem por base um quadrado inscrito em um círculo de  $8 \text{ cm}$  de raio. Sabendo que o volume do prisma é de  $768 \text{ cm}^3$ , determine a área total.
- 332.** Calcule o volume de um prisma quadrangular regular cuja área total tem  $144 \text{ m}^2$ , sabendo que sua área lateral é igual ao dobro da área da base.
- 333.** A base de um paralelepípedo oblíquo é um quadrado de lado  $a$ . Uma das arestas laterais é  $b$  e forma um ângulo de  $60^\circ$  com os lados adjacentes da base. Determine o volume do paralelepípedo.

**Solução**



$$V = B \cdot h \Rightarrow V = a^2 \cdot h \quad (1)$$

A aresta lateral  $AE = b$  é igualmente inclinada em relação aos lados  $AB = a$  e  $AD = a$  da base. A altura  $EP = h$  tem extremidade  $P$  sobre a diagonal  $AC$  da base. Conduzindo  $PQ$  perpendicular ao lado  $AD$  com  $Q$  em  $AD$ , temos os triângulos retângulos  $AQE$  e  $AQP$  e  $EPQ$  (notemos

que o plano  $(EQP)$  é perpendicular a  $AD$ .

No triângulo  $AQE$ , temos:

$$\cos 60^\circ = \frac{AQ}{AE} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AQ}{b} \Rightarrow AQ = \frac{b}{2}$$

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{EQ}{AE} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{EQ}{b} \Rightarrow EQ = \frac{b\sqrt{3}}{2}.$$

O triângulo  $AQP$  é isósceles, então:  $QP = AQ \Rightarrow QP = \frac{b}{2}$ .

Aplicando a relação de Pitágoras no triângulo  $EPQ$ , vem:

$$(EP)^2 = (EQ)^2 - (QP)^2 \Rightarrow h^2 = \left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

Substituindo em (1), temos:

$$V = a^2 \cdot \frac{b\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V = \frac{a^2 b \sqrt{2}}{2}.$$

Resposta: O volume é  $\frac{a^2 b \sqrt{2}}{2}$ .

- 334.** Determine o volume de um prisma triangular oblíquo, sendo a base um triângulo equilátero de lado  $a = 4 \text{ dm}$  e a aresta lateral de  $4 \text{ dm}$ , que forma um ângulo de  $60^\circ$  com a base do prisma.
- 335.** Calcule o volume de um paralelepípedo reto, que tem por altura  $10 \text{ cm}$  e por base um paralelogramo cujos lados medem  $8 \text{ cm}$  e  $12 \text{ cm}$ , sabendo que o ângulo entre esses lados vale  $60^\circ$ .
- 336.** Qual é o volume de um prisma reto no qual a base é um octógono regular de  $2 \text{ m}$  de lado e a superfície lateral é  $28 \text{ m}^2$ ?

**Solução**

$$V = B \cdot h$$

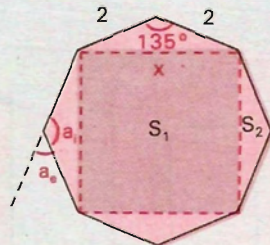
$$A_l = 28 \Rightarrow 8 \cdot 2h = 28 \Rightarrow h = \frac{7}{4}$$

Cálculo da área da base:

$$A_{\text{octógono}} = A_{\text{quadrado}} + 4A_{\text{triângulo}}$$

$$B = S_1 + 4S_2$$

$$\text{O ângulo externo } a_e \text{ do octógono regular é } a_e = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ.$$



Conseqüentemente, o ângulo interno  $a_i$  vale:

$$a_i = 180^\circ - a_e \Rightarrow a_e = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

O lado  $x$  é obtido pela lei dos cossenos:

$$x^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cos 135^\circ \Rightarrow x^2 = 4 + 4 + 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 4(2 + \sqrt{2}) \Rightarrow S_1 = 4(2 + \sqrt{2})$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 135^\circ \Rightarrow S_2 = \sqrt{2}.$$

Substituindo, temos:

$$B = S_1 + 4S_2 \Rightarrow B = 4(2 + \sqrt{2}) + 4\sqrt{2} \Rightarrow B = 8(\sqrt{2} + 1).$$

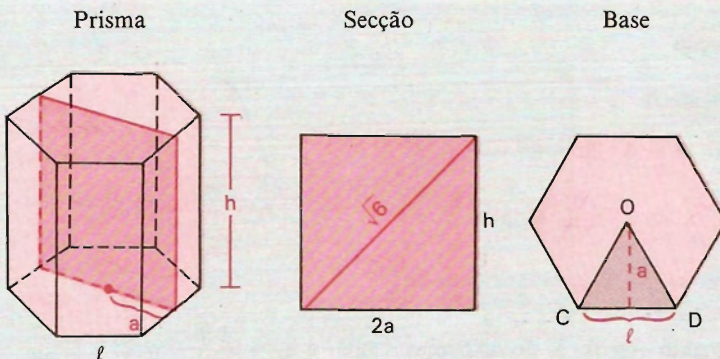
Cálculo do volume:

$$V = B \cdot h \Rightarrow V = 8(\sqrt{2} + 1) \cdot \frac{7}{4} \Rightarrow V = 14(\sqrt{2} + 1)$$

Resposta: O volume é  $14(\sqrt{2} + 1) m^3$ .

- 337.** Calcule o volume de um prisma regular cuja área lateral mede  $240 m^2$ , sendo a base um dodecágono regular de  $2 m$  de lado.
- 338.** Um prisma regular hexagonal é cortado por um plano perpendicular a uma aresta de uma base, segundo um quadrado de diagonal  $\sqrt{6} m$ . Calcule a área da base, a área lateral, a área total e o volume do prisma.

### Solução



Cálculo dos elementos (indicados na figura):

$$\text{Do quadrado vem: } 2a = h = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \Rightarrow h = \sqrt{3} \text{ e } a = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Do triângulo equilátero } OCD, \text{ vem: } \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = a \Rightarrow \ell = 1.$$

1º) Área da base:  $B$

$$B = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot a \Rightarrow B = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow B = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

2º) Área lateral:  $A_l$

$$A_l = 6 \cdot \ell \cdot h \Rightarrow A_l = 6 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow A_l = 6\sqrt{3}$$

3º) Área total:  $A_t$

$$A_t = A_l + 2B \Rightarrow A_t = 6\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_t = 9\sqrt{3}$$

4º) Volume

$$V = B \cdot h \Rightarrow V = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{9}{2}$$

$$\text{Resposta: } B = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ m}^2; A_l = 6\sqrt{3} \text{ m}^2; A_t = 9\sqrt{3} \text{ m}^2 \text{ e } V = \frac{9}{2} \text{ m}^3.$$

- 339.** Calcule o volume de um prisma hexagonal regular, sabendo que o plano que contém a menor diagonal da base e o centro do sólido produz uma secção quadrada de  $2 \text{ m}$  de lado.
- 340.** Calcule o volume de um prisma hexagonal regular de área total igual a  $12 \text{ dm}^2$ , sendo  $1 \text{ dm}$  a altura do prisma.
- 341.** Calcule o lado da base e a altura de um prisma hexagonal regular, sendo  $A$  sua área lateral e volume  $V$ .
- 342.** Calcule o perímetro da base de um prisma hexagonal regular, sabendo que o prisma é equivalente a um cubo de aresta  $a$ , cuja diagonal tem medida igual à altura do prisma.

## XII. Secções planas do cubo

### 164. Secção hexagonal do cubo

Consideremos o cubo  $ABCDEFGH$  (vide figura) e sejam  $M, N, O, P, Q$  e  $R$  os respectivos pontos médios de  $\overline{EH}$ ,  $\overline{EF}$ ,  $\overline{AF}$ ,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{CH}$ .

1º) Os pontos  $M, N, O, P, Q$  e  $R$  pertencem ao plano mediador da diagonal  $DG$ .

#### Demonstração

Os segmentos

$DM$  e  $GM$ ,  $DN$  e  $GN$ ,  $DO$  e  $GO$ ,  
 $DP$  e  $GP$ ,  $DQ$  e  $GQ$ ,  $DR$  e  $GR$

são congruentes entre si por serem hipotenusas de triângulos retângulos congruentes entre si.

Por exemplo:

$$\triangle DME \equiv \triangle GMH \Rightarrow DM \equiv GM.$$

Portanto, os pontos  $M, N, O, P, Q$  e  $R$ , sendo equidistantes de  $D$  e  $G$ , estão no plano mediador de  $DG$ .

Note-se que esse plano é perpendicular à *diagonal* do cubo pelo *centro* dele.

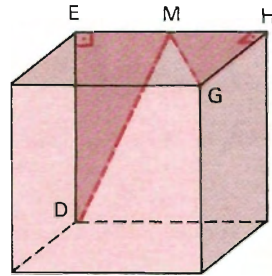
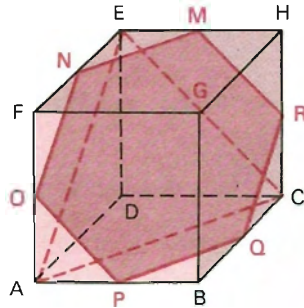
2º)  $MNOPQR$  é um hexágono regular.

#### Demonstração

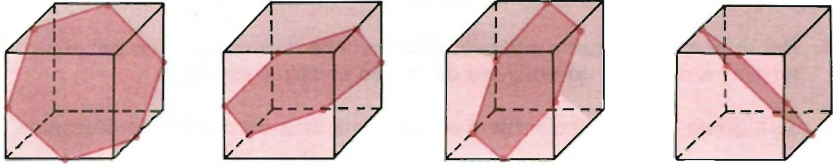
Os lados são congruentes, pois a medida deles é metade da medida da diagonal da face do cubo.

$$\begin{aligned} & \text{(Sendo } a \text{ a aresta do cubo, temos } MN = NO = OP = PQ = QR = \\ & = RM = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{.)} \end{aligned}$$

Os ângulos internos do hexágono  $MNOPQR$  são todos congruentes entre si por serem congruentes ao ângulo externo do triângulo equilátero  $ACE$  (ângulos de lados respectivamente paralelos).



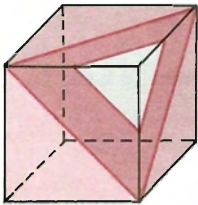
3º) Fixado um cubo, como ele possui quatro diagonais, os planos mediadores dessas diagonais determinam quatro hexágonos regulares como secção no cubo.



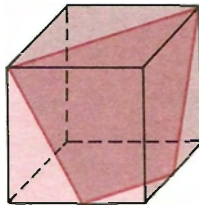
**165.** Outras secções planas do cubo

As secções planas de um cubo podem ser polígonos de 3, 4, 5 e 6 lados, isto é, triângulo, quadrilátero, pentágono e hexágono.

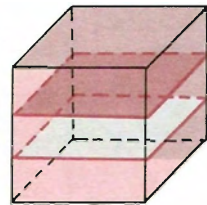
Vejamos isso nas figuras:



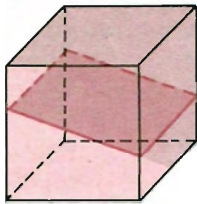
Triângulo



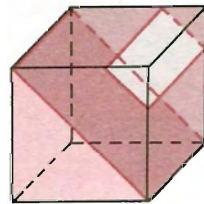
Trapézio



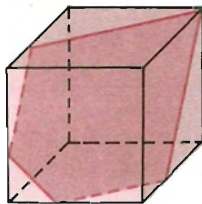
Quadrado



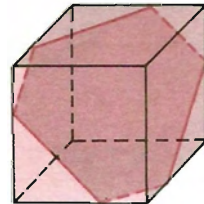
Retângulo



Retângulo (secção diagonal)



Pentágono

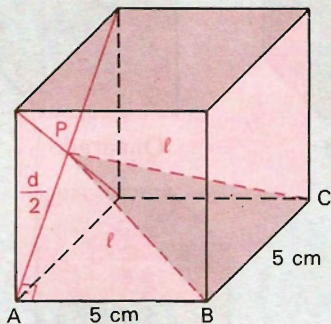


Hexágono

## EXERCÍCIOS

- 343.** Por duas arestas opostas e paralelas de um cubo de aresta  $a$  passa um plano. Determine a natureza do polígono da secção e calcule sua área.
- 344.** Se a aresta de um cubo mede  $6\text{ m}$ , calcule a área da sua secção diagonal.
- 345.** Secciona-se um cubo de aresta  $a$  por um plano que contém duas arestas opostas, obtendo-se um retângulo cuja área mede  $S$ . Exprima a área total do sólido em função da área da secção diagonal.
- 346.** Calcule a área do triângulo que se obtém unindo-se o centro de uma face de um cubo com as extremidades de uma aresta da face oposta, sabendo que a medida da aresta do cubo vale  $5\text{ cm}$ .

### Solução



Cálculo dos elementos indicados na figura:

$$d^2 = 5^2 \Rightarrow d = 5\sqrt{2}.$$

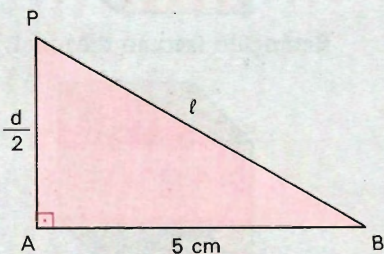
Do triângulo  $ABP$ , em que  $P$  é o centro de uma das faces opostas a  $\overline{BC}$ :

$$l^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 5^2 \Rightarrow$$

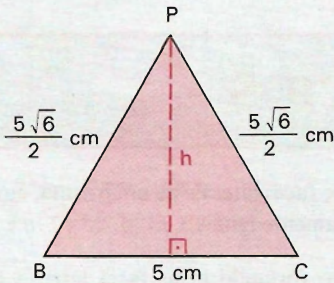
$$\Rightarrow l^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 5^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l^2 = \frac{50}{4} + 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$







Da secção  $BPC$ , temos:

$$\left(\frac{5\sqrt{6}}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{150}{4} = h^2 + \frac{25}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

Cálculo da área do  $\triangle BPC$ :

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5\sqrt{5}}{2} \Rightarrow S = \frac{25\sqrt{5}}{4}.$$

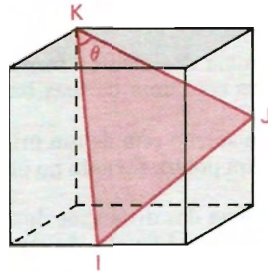
Resposta: A área da secção é  $\frac{25\sqrt{5}}{4} \text{ cm}^2$ .

- 347.** A secção determinada por um plano em um cubo é um hexágono regular. Calcule a razão entre a área desse hexágono e a área do círculo circunscrito a ele.
- 348.** Um cubo de área total igual a  $31,74 \text{ cm}^2$  é cortado por um plano, de modo a se obter uma secção hexagonal regular. Calcule o lado do quadrado inscrito no triângulo equilátero de perímetro igual ao do hexágono obtido.
- 349.** Seja dado um cubo  $ABCDEFGH$  cuja aresta mede  $a$ . Pela diagonal  $BE$  de uma das faces e o ponto médio  $P$  da aresta  $GH$ , paralela a essa face, faz-se passar um plano.
- Demonstre que a secção do cubo por esse plano é um trapézio isósceles.
  - Calcule os lados do trapézio e a área da secção em função da aresta do cubo.
- 350.** Pelas extremidades de três arestas que partem de um vértice  $A$  de um cubo traçamos um plano. Mostre que a secção é um triângulo equilátero. Mostre também que a diagonal do cubo que parte de  $A$  é perpendicular ao plano da secção e precise a posição do ponto onde ela é perpendicular. Calcule também a área do triângulo equilátero.

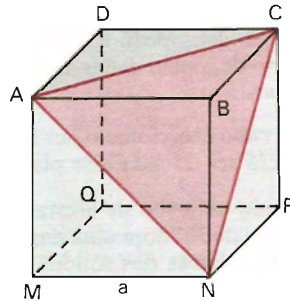


- 361.** Qual é a altura de um prisma reto cuja base é um triângulo equilátero de lado  $a$ , para que o seu volume seja igual ao volume de um cubo de aresta  $a$ ?
- 362.** Se um cubo tem suas arestas aumentadas em 50%, em quanto aumentará seu volume?
- 363.** Procura-se construir um cubo grande empilhando cubos pequenos e todos iguais. Quando se coloca um certo número de cubos pequenos em cada aresta, sobram cinco; se se tentasse acrescentar um cubo a mais em cada aresta, ficariam faltando trinta e dois. Quantos são os cubos pequenos?
- 364.** Os pontos  $J$  e  $I$  são os pontos médios das arestas do cubo sugerido na figura.

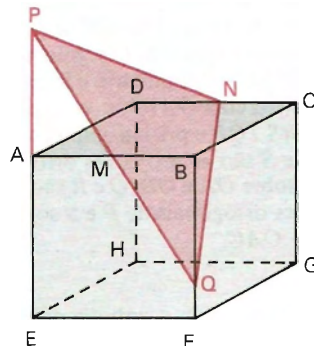
- a) Calcule, em função da medida  $a$  da aresta do cubo, a distância de  $I$  a  $J$ .
- b) Determine a medida  $\theta$  do ângulo  $\widehat{IKJ}$ .



- 365.** No cubo abaixo, faz-se um corte pelo plano que passa pelos vértices  $A$ ,  $C$  e  $N$ , retirando-se o sólido  $(ABCN)$  assim obtido. Determine o volume do sólido restante em função de  $a$ , sabendo que  $a$  é a medida do lado.

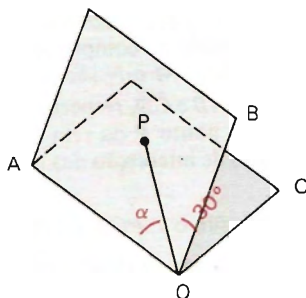


- 366.** Considere um cubo  $ABCDEFGH$  de lado 1 unidade de comprimento, como na figura.  $M$  e  $N$  são os pontos médios de  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , respectivamente. Para cada ponto  $P$  da reta  $AE$ , seja  $Q$  o ponto de interseção das retas  $PM$  e  $BF$ .
- a) Prove que o  $\triangle PQN$  é isósceles.
- b) A que distância do ponto  $A$  deve estar o ponto  $P$  para que o  $\triangle PQN$  seja retângulo?



- 367.** Uma caixa d'água com a forma de um paralelepípedo reto de  $1\text{ m} \times 1\text{ m}$  de base e  $\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ m}$  de altura está sobre uma laje horizontal com água até a altura  $h$ . Suponhamos que a caixa fosse erguida lateralmente, apoiada sobre uma das arestas da base (que é mantida fixa), sem agitar a água. Assim sendo, a água começaria a transbordar exatamente quando o ângulo da base da caixa com a laje medisse  $30^\circ$ . Calcule a altura  $h$ .
- 368.** Calcule as dimensões de um paralelepípedo retângulo, sabendo que elas estão em progressão aritmética, que a área total é  $S$  e a diagonal é  $d$ . Discuta.
- 369.** A soma dos diedros formados pelas faces laterais de um prisma triangular com uma de suas bases está compreendida entre dois e quatro retos.
- 370.** A soma dos diedros formados pelas faces laterais de um prisma convexo de  $n$  faces com uma de suas bases é superior a  $2$  retos e inferior a  $2(n - 1)$  retos.
- 371.** Se a secção reta de um prisma é um polígono equilátero, a soma das distâncias de um ponto, tomado no interior do sólido às faces laterais e às bases, é constante.
- 372.** A soma das distâncias dos vértices de um paralelepípedo a um plano que não o intercepta é igual a  $8$  vezes a distância do ponto de concurso de suas diagonais a esse plano.
- 373.** A soma dos quadrados das distâncias de um ponto qualquer aos oito vértices de um paralelepípedo é igual a oito vezes o quadrado da distância desse ponto ao ponto de concurso das diagonais, mais a metade da soma dos quadrados das diagonais.
- 374.** Um cubo é seccionado por um plano que passa por uma de suas diagonais. Como deverá ser traçado esse plano para que a área da secção seja mínima?
- 375.** É dado um cubo de aresta  $a$ . Secciona-se o cubo por um plano que forma um ângulo de  $30^\circ$  com uma das faces e passa por uma diagonal dessa face. Determine os volumes dos sólidos resultantes.

**376.** Na figura ao lado, os planos  $OAB$  e  $OAC$  formam entre si um ângulo de  $30^\circ$ . As retas  $OB$  e  $OC$  são perpendiculares à reta  $OA$ . O segmento  $OP$ , do plano  $OAB$ , é unitário e forma um ângulo  $\alpha$  com  $OA$  ( $0 < \alpha < 90^\circ$ ). Seja  $ORS\ TQP$  o prisma assim construído:  $T$  e  $S$  são as projeções ortogonais de  $P$  sobre  $OA$  e  $OB$ ;  $Q$  e  $R$  são as projeções ortogonais de  $P$  e  $S$  sobre o plano  $OAC$ .



- a) Determine o volume do prisma em função de  $\alpha$ .  
 b) Qual o valor de  $\text{tg } \alpha$  quando o volume do prisma é máximo?

## LEITURA

# Cavalieri e os Indivisíveis

Hygino H. Domingues

Ao início do século XVII, os métodos deixados pelos gregos para cálculos de áreas e volumes, apesar de sua beleza e rigor, mostravam-se cada vez menos adequados a um mundo em franco progresso científico. Pois faltavam a eles operacionalidade e algoritmos para implementá-los. E como não havia ainda condições matemáticas de obter esses requisitos, os métodos então surgidos eram sempre passíveis de críticas — como o mais famoso deles, a geometria dos indivisíveis, de Bonaventura Cavalieri (1598-1647).

O milanês Cavalieri foi um dos matemáticos mais influentes de sua época. De família nobre, Cavalieri seguiu paralelamente a carreira religiosa e a atividade científica. Discípulo de Galileu Galilei (1564-1642), por indicação deste ocupou desde 1629 a cátedra de Matemática da Universidade de Bolonha, ao mesmo tempo que era o superior do monastério de São Jerônimo. Cavalieri foi também astrônomo, mas, se ainda é lembrado, isso se deve em grande parte ao *método dos indivisíveis* que desenvolveu a partir de 1626.

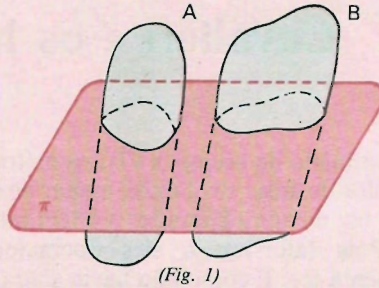
Cavalieri não definia, em suas obras sobre o assunto, o que vinham a ser os indivisíveis. Segundo ele, porém, uma figura plana seria formada por uma infinidade de cordas paralelas entre si e uma figura sólida por uma infinidade de secções planas paralelas entre si — a essas cordas e a essas secções chamava de *indivisíveis*. Num de seus livros “explicava” que um sólido é formado de indivisíveis, assim como um livro é composto de páginas. Do ponto de vista lógico, essas idéias envolviam uma dificuldade insuperável. Como uma figura de extensão finita poderia ser formada de uma infinidade de indivisíveis, tanto mais que estes não possuem espessura?



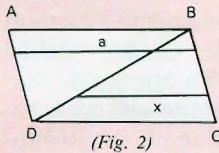
Bonaventura Cavalieri.

O *princípio de Cavalieri*, ainda bastante usado no ensino de geometria métrica no espaço, facilita bastante a aceitação da idéia de indivisível:

“Sejam dois sólidos  $A$  e  $B$ . Se todos os planos numa certa direção, ao interceptarem  $A$  e  $B$ , determinam secções (indivisíveis) de áreas iguais, então  $A$  e  $B$  têm mesmo volume” (fig. 1).

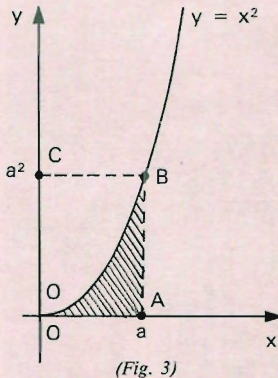


De alcance maior foram certos teoremas estabelecidos por Cavalieri relacionando os indivisíveis de um paralelogramo com aqueles dos triângulos determinados por uma de suas diagonais. Se  $a$  indica genericamente os primeiros e  $x$  os segundos (fig. 2), Cavalieri “provou” que



$$\sum a = 2 \sum x; \quad \sum a^2 = 3 \sum x^2; \quad \dots \quad (*)$$

onde os somatórios não têm o sentido atual (são infinitos e correspondem à idéia de “integrar” os indivisíveis para formar as figuras). Se o paralelogramo é um retângulo de altura  $b$ , sua área  $\sum a$  é igual ao produto de um divisível pelo “número”  $b$  de indivisíveis, isto é,  $\sum a = ab$ . Usando então a primeira das relações de (\*), obtém-se a área do triângulo:  $\sum x = \frac{1}{2} \sum a = \frac{1}{2} ab$ .



A segunda das relações de (\*) permite calcular a área compreendida entre a curva  $y = x^2$  e o eixo  $x$ , de  $O$  até  $a$  (fig. 3). Segundo as idéias de Cavalieri, essa área vale  $\sum x^2$ , pois cada um de seus indivisíveis (ordenadas) vale  $x^2$ . Mas, pela relação citada:

$$\sum x^2 = \frac{1}{3} \sum a^2,$$

onde  $\sum a^2$  é a área do retângulo  $OABC$ . Mas essa área é dada também por  $a \cdot a^2 = a^3$  (base vezes altura). Logo, a área sombreada é  $a^3/3$ , resultado correto.

Foram tantas as críticas que Cavalieri recebeu pelo seu método, embora este funcionasse (como no exemplo anterior), que certa vez disse: “O rigor é algo que diz respeito à filosofia e não à matemática”.

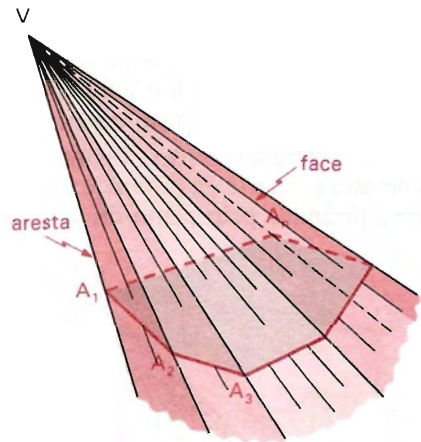
## Pirâmide

### I. Pirâmide ilimitada

#### 166. Definição

Consideremos uma região poligonal plano-convexa (polígono plano-convexo)  $A_1 A_2 \dots A_n$ , de  $n$  lados e um ponto  $V$  fora de seu plano. Chama-se *pirâmide ilimitada convexa* ou *pirâmide convexa indefinida* (ou ângulo poliédrico ou ângulo sólido) à reunião das semiretas de origem em  $V$  e que passam pelos pontos da região poligonal (polígono) dada.

Se a região poligonal (polígono)  $A_1 A_2 \dots A_n$  for côncava, a pirâmide ilimitada resulta côncava.



#### 167. Elementos

Uma pirâmide ilimitada convexa possui:  $n$  arestas,  $n$  diedros e  $n$  faces (que são ângulos ou setores angulares planos).

### 168. Secção

É uma região poligonal plana (polígono plano) com um só vértice em cada aresta.

### 169. Superfície

A superfície de uma pirâmide ilimitada convexa é a reunião das faces dessa pirâmide. É uma superfície poliédrica convexa ilimitada.

## II. Pirâmide

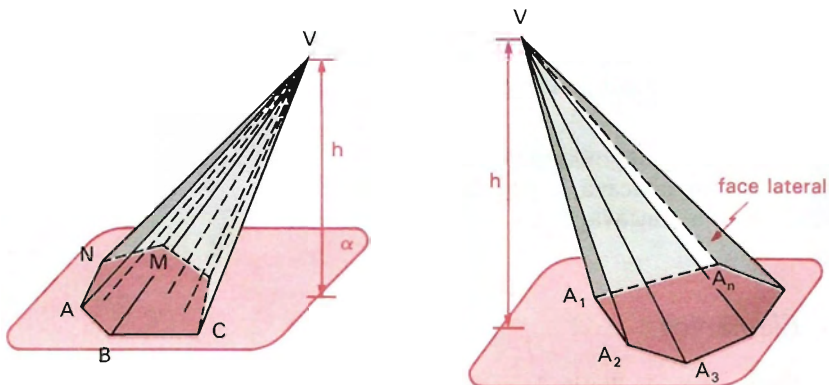
### 170. Definição

Consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa)  $ABC \dots MN$  situado num plano  $\alpha$  e um ponto  $V$  fora de  $\alpha$ . Chama-se *pirâmide* (ou *pirâmide convexa*) à reunião dos segmentos com uma extremidade em  $V$  e a outra nos pontos do polígono.

$V$  é o vértice e o polígono  $ABC \dots MN$ , a base da pirâmide.

Podemos também definir a pirâmide como segue:

*Pirâmide convexa limitada* ou *pirâmide convexa definida* ou *pirâmide convexa* é a parte da pirâmide ilimitada que contém o vértice quando se divide essa pirâmide pelo plano de uma secção, reunida com essa secção.





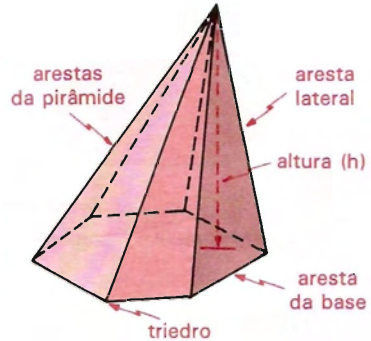
### 171. Elementos

Uma pirâmide possui:

1 base (a secção acima citada),  $n$  faces laterais (triângulos),  $n + 1$  faces,  $n$  arestas laterais,  $2n$  arestas,  $2n$  diedros,  $n + 1$  vértices,  $n + 1$  ângulos poliédricos e  $n$  triedros.

Para uma pirâmide é válida a relação de Euler:

$$V - A + F = (n + 1) - 2n + (n + 1) = 2 \Rightarrow V - A + F = 2$$



### 172. Altura

A *altura* de uma pirâmide é a distância  $h$  entre o vértice e o plano da base.

### 173. Superfícies

*Superfície lateral* é a reunião das faces laterais da pirâmide. A área dessa superfície é chamada área lateral e indicada por  $A_l$ .

*Superfície total* é a reunião da superfície lateral com a superfície da base da pirâmide. A área dessa superfície é chamada área total e indicada por  $A_t$ .

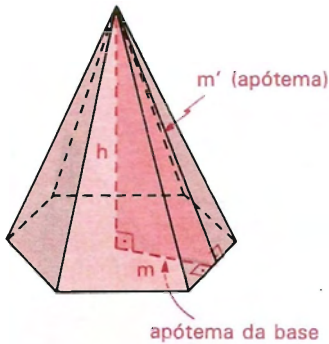
### 174. Natureza

Natureza de uma pirâmide: uma pirâmide será triangular, quadrangular, pentagonal, etc., conforme a *base* for um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.

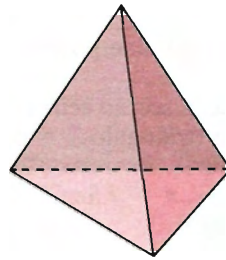
### 175. Pirâmide regular

*Pirâmide regular* é uma pirâmide cuja base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base. Numa pirâmide regular as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes.

Chama-se *apótema* de uma pirâmide regular à altura (relativa ao lado da base) de uma face lateral.



Pirâmide regular hexagonal



Tetraedro regular

### 176. Tetraedro

*Tetraedro* é uma pirâmide triangular.

*Tetraedro regular* é um tetraedro que tem as seis arestas congruentes entre si.

### 177. Nota

É comum encontrarmos referências a *pirâmide reta* para diferenciar de *pirâmide oblíqua*. Deve-se, então, entender que a *pirâmide reta* é aquela cuja projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base. Caso a base seja um polígono circunscritível, isto é, admita uma circunferência inscrita, o centro dessa circunferência (incentro do polígono), em geral, é adotado como o *centro da base*.

## EXERCÍCIOS

- 377.** Ache a natureza de uma pirâmide, sabendo que a soma dos ângulos das faces é 20 retos.
- 378.** Ache a natureza de uma pirâmide, sabendo que a soma dos ângulos das faces é 56 retos.
- 379.** Calcule o número de diagonais da base de uma pirâmide, sabendo que a soma dos ângulos internos de todas as suas faces é igual a 32 retos.

- 380.** Determine a soma dos ângulos internos da base de uma pirâmide, sendo  $24$  retos a soma dos ângulos internos de todas as faces dessa pirâmide.
- 381.** Prove que a soma dos ângulos de todas as faces de uma pirâmide de  $n$  faces laterais vale  $S = (n - 1) \cdot 4r$ .

**Solução**

A soma dos ângulos ( $S$ ) de todas as faces é a soma dos ângulos da base, que é  $(n - 2) \cdot 2r$ , com a soma dos ângulos das faces laterais, que é  $n \cdot 2r$ :

$$S = (n - 2) \cdot 2r + n \cdot 2r = 2 \cdot n \cdot 2r - 4r = (n - 1) \cdot 4r.$$

- 382.** Calcule a soma dos ângulos das faces de uma pirâmide cuja base é um polígono convexo de  $n$  lados.
- 383.** Ache a natureza de uma pirâmide que possui:
- a) 6 faces      b) 8 faces      c) 12 arestas      d) 20 arestas

### III. Volume da pirâmide

#### 178. Secção paralela à base de um tetraedro

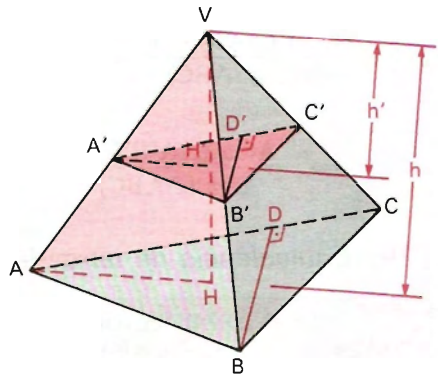
Quando se secciona uma pirâmide triangular (*tetraedro*) por um plano paralelo à base:

1º)

As arestas laterais e a altura ficam divididas na mesma razão.

De fato, as retas  $\overleftrightarrow{A'H'}$  e  $\overleftrightarrow{AH}$  são paralelas, pois são interseções de planos paralelos por um terceiro; logo, os triângulos  $VH'A'$  e  $VHA$  são semelhantes e portanto:

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{VH'}{VH} = \frac{h'}{h}$$



2º)

A secção e a base são triângulos semelhantes.

De fato, os ângulos da secção ( $\triangle A'B'C'$ ) e os ângulos da base ( $\triangle ABC$ ), por terem lados respectivamente paralelos, são congruentes. Donde se conclui que a secção  $A'B'C'$  e a base  $ABC$  são triângulos semelhantes.

A razão de semelhanças é  $\frac{h'}{h}$ , como segue:

$$\begin{aligned} \triangle VA'B' \sim \triangle VAB &\Rightarrow \frac{VA'}{VA} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{h'}{h} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{h'}{h} \end{aligned}$$

Portanto, os triângulos  $A'B'C'$  e  $ABC$  são semelhantes, sendo  $\frac{h'}{h}$  a razão de semelhança.

3º)

A razão entre as áreas da secção e da base é igual ao quadrado da razão de suas distâncias ao vértice.

De fato, sendo  $B'D'$  e  $BD$  duas respectivas alturas da secção e da base, vale:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'D'}{BD} \Rightarrow \frac{B'D'}{BD} = \frac{h'}{h}.$$

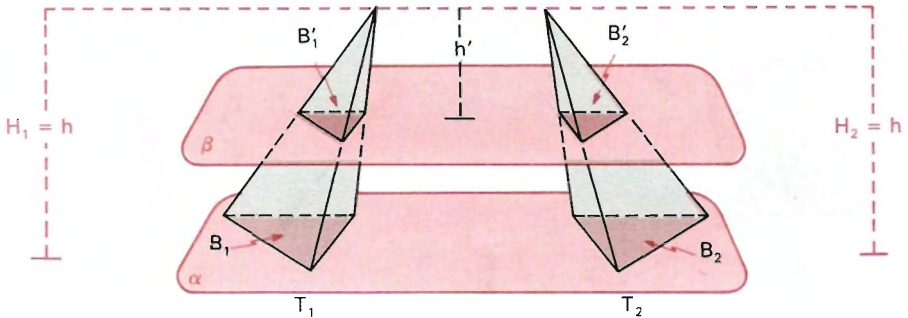
$$\begin{aligned} \text{Logo, } \frac{\text{Área}(\triangle A'B'C')}{\text{Área}(\triangle ABC)} &= \frac{\frac{1}{2}(A'C') \cdot (B'D')}{\frac{1}{2}(AC) \cdot (BD)} = \frac{A'C'}{AC} \cdot \frac{B'D'}{BD} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\text{Área}(\triangle A'B'C')}{\text{Área}(\triangle ABC)} = \frac{h'}{h} \cdot \frac{h'}{h} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \end{aligned}$$

### 179. Equivalência de tetraedros

Dois pirâmides triangulares (tetraedros) de bases de áreas iguais (bases equivalentes) e alturas congruentes têm volumes iguais (são equivalentes).

Sendo  $T_1$  e  $T_2$  os dois tetraedros,  $B_1$  e  $B_2$  as áreas das bases e  $H_1$  e  $H_2$  as alturas, temos, por hipótese:

$$B_1 = B_2 \text{ e } H_1 = H_2 = h.$$



### *Demonstração*

Podemos supor, sem perda de generalidade, que as bases equivalentes estão num plano  $\alpha$  e que os vértices estão num mesmo semi-espaco dos determinados por  $\alpha$ .

Considerando qualquer plano secante  $\beta$ , paralelo a  $\alpha$ , distando  $h'$  dos vértices e determinando em  $T_1$  e  $T_2$  secções de áreas  $B'_1$  e  $B'_2$ , temos:

$$\left[ \frac{B'_1}{B_1} = \left( \frac{h'}{h} \right)^2 \quad \frac{B'_2}{B_2} = \left( \frac{h'}{h} \right)^2 \right] \Rightarrow \frac{B'_1}{B_1} = \frac{B'_2}{B_2}.$$

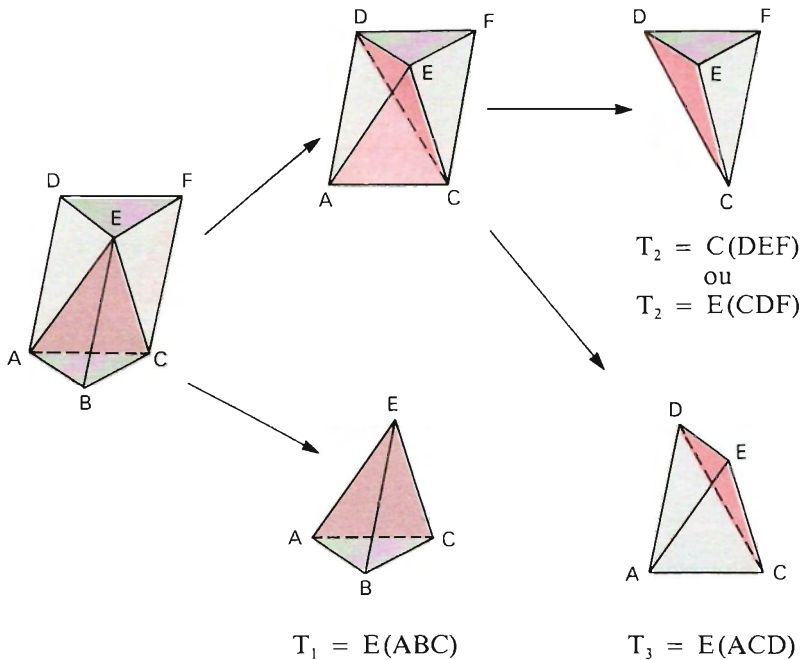
Como  $B_1 = B_2$ , da igualdade acima vem  $B'_1 = B'_2$ .

Se as secções têm áreas iguais ( $B'_1 = B'_2$ ), pelo princípio de Cavalieri os sólidos  $T_1$  e  $T_2$  têm volumes iguais (são equivalentes), isto é,  $V_{T_1} = V_{T_2}$ .

## **180.** *Decomposição de um prisma triangular*

Todo prisma triangular é soma de três pirâmides triangulares (tetraedros) equivalentes entre si (de volumes iguais).

Seja o prisma triangular  $ABCDEF$ .



Cortando esse prisma pelo plano  $(A, C, E)$ , obtemos o tetraedro  $T_1 = E(ABC)$  e a pirâmide quadrangular  $E(ACFD)$ .

Cortando a pirâmide  $E(ACFD)$  pelo plano  $(C, D, E)$ , obtemos o tetraedro  $T_2 = C(DEF)$  [ou  $T_2 = E(CDF)$ ] e  $T_3 = E(ACD)$ .

Temos, então:

$$\text{Prisma } ABCDEF = T_1 + T_2 + T_3 \implies V_{\text{prisma}} = V_{T_1} + V_{T_2} + V_{T_3}.$$

As pirâmides  $T_1 = E(ABC)$  e  $T_2 = C(DEF)$  têm o mesmo volume, pois possuem as bases  $(ABC)$  e  $(DEF)$  congruentes e a mesma altura (a do prisma). Então,  $V_{T_1} = V_{T_2}$ . (1)

As pirâmides  $T_2 = E(CDF)$  e  $T_3 = E(ACD)$  têm o mesmo volume, pois têm as bases  $(CDF)$  e  $(ACD)$  congruentes (note que  $CD$  é diagonal do paralelogramo  $ACFD$ ) e mesma altura (distância de  $E$  ao plano  $ACFD$ ). Então,  $V_{T_2} = V_{T_3}$ . (2)

De (1) e (2) vem:  $V_{T_1} = V_{T_2} = V_{T_3}$ .

**181.** Volume do tetraedro

Seja  $B$  a área da base e  $h$  a medida da altura do prisma do item anterior. Notemos que  $B$  é a área da base e  $h$  é a medida da altura do tetraedro  $T_1$ .

Em vista do teorema anterior e fazendo  $V_{T_1} = V_{T_2} = V_{T_3} = V_T$ :

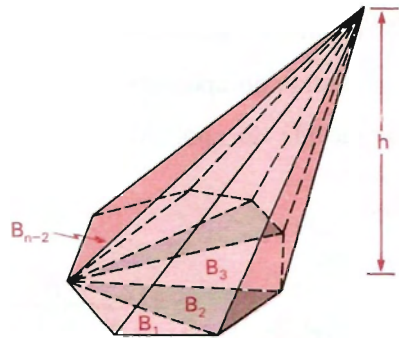
$$V_{T_1} + V_{T_2} + V_{T_3} = V_{\text{prisma}} \Rightarrow 3V_T = B \cdot h \Rightarrow V_T = \frac{1}{3} B \cdot h$$

**182.** Volume de uma pirâmide qualquer

Seja  $B$  a área da base e  $h$  a medida da altura de uma pirâmide qualquer. Esta pirâmide é soma de  $(n - 2)$  tetraedros.

$$\begin{aligned} V &= V_{T_1} + V_{T_2} + \dots + V_{T_{n-2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow V &= \frac{1}{3} B_1 h + \frac{1}{3} B_2 h + \dots + \\ &+ \frac{1}{3} B_{n-2} h \Rightarrow \\ \Rightarrow V &= \frac{1}{3} (B_1 + B_2 + \dots + B_{n-2}) h \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} B \cdot h$$

**183.** Conclusão

O volume de uma pirâmide é um terço do produto da área da base pela medida da altura.

## IV. Área lateral e área total da pirâmide

**184.** A área lateral de uma pirâmide é a soma das áreas das faces laterais.

$A_l$  = soma das áreas dos triângulos que são faces laterais.

**185.** A área total de uma pirâmide é a soma das áreas das faces laterais com a área da base.

$A_t = A_l + B$  em que  $B$  = área da base.

**186.** *Pirâmide regular*

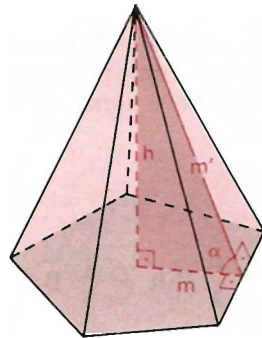
Numa pirâmide regular, sendo:

$2p$  = medida do perímetro da base

$m$  = medida do apótema da base

$m'$  = medida do apótema da pirâmide,

temos:



$$\text{Área lateral: } A_l = nA_{\Delta} = n \cdot \frac{2p}{2} \ell m' \Rightarrow A_l = pm'$$

$$\text{Área total: } A_t = A_l + B \Rightarrow A_t = pm' + pm \Rightarrow A_t = p(m + m')$$

$$\text{Volume: } V = \frac{1}{3} B \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} pm \cdot h$$

$$\text{Relação: } m'^2 = h^2 + m^2.$$

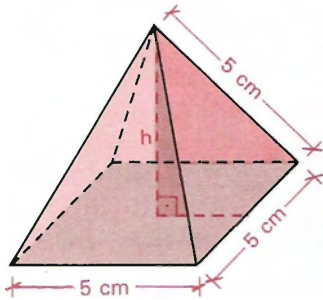
O ângulo  $\alpha$  entre o apótema da base  $m$  e o apótema da pirâmide  $m'$  é o ângulo que a face lateral forma com a base.



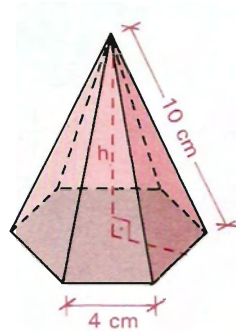
## EXERCÍCIOS

**384.** Calcule a área lateral, a área total e o volume das pirâmides regulares, cujas medidas estão indicadas nas figuras abaixo.

a)



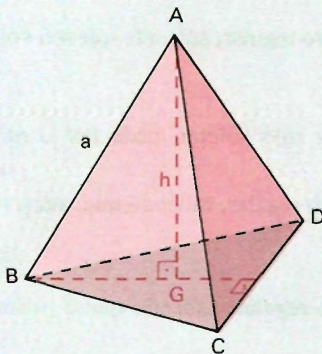
b)



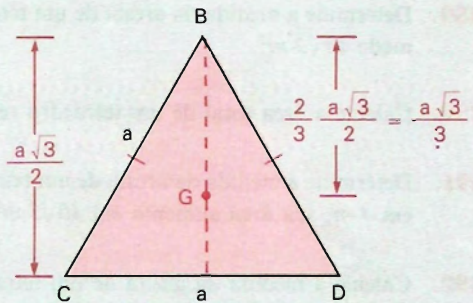
**385.** De um tetraedro regular de aresta  $a$ , calcule:

- a área total ( $A_t$ )
- a medida  $h$  da altura
- o seu volume ( $V$ )

**Solução**



Tetraedro



Face (base)

a) Área total:  $A_t = 4 \cdot B \Rightarrow A_t = 4 \left( \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow A_t = a^2\sqrt{3}$

b) Cálculo da altura:

$$\triangle AGB \Rightarrow h^2 = a^2 - (BG)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left( \frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3} \quad \text{ou ainda } h = \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3}$$

c) Volume:  $V = \frac{1}{3} B \cdot h$  em que  $B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$  e  $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ , então

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

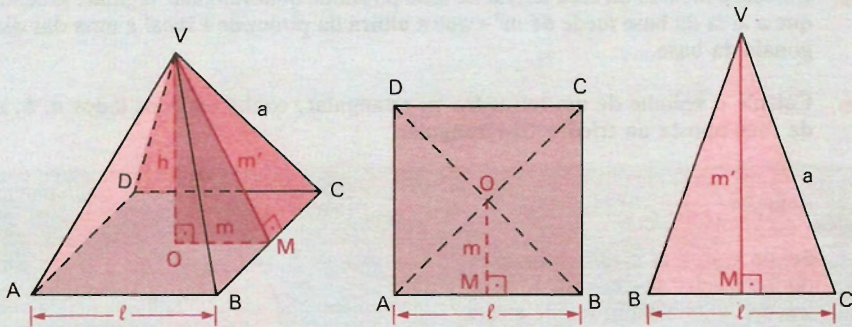
Resposta:  $A_t = a^2\sqrt{3}$ ,  $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$  e  $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ .

- 386.** Sabendo que a aresta de um tetraedro regular mede  $3 \text{ cm}$ , calcule a medida de sua altura, sua área total e seu volume.
- 387.** Determine a medida da aresta de um tetraedro regular, sabendo que sua superfície total mede  $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .
- 388.** Calcule a altura e o volume de um tetraedro regular de área total  $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .
- 389.** Determine a medida da aresta de um tetraedro regular, sabendo que seu volume mede  $18\sqrt{2} \text{ m}^3$ .
- 390.** Calcule a área total de um tetraedro regular cujo volume mede  $144\sqrt{2} \text{ m}^3$ .
- 391.** Determine a medida da aresta de um tetraedro regular, sabendo que, aumentada em  $4 \text{ m}$ , sua área aumenta em  $40\sqrt{3} \text{ m}^2$ .
- 392.** Calcule a medida da altura de um tetraedro regular, sabendo que o perímetro da base mede  $9 \text{ cm}$ .
- 393.** Calcule a aresta da base de uma pirâmide regular, sabendo que o apótema da pirâmide mede  $6 \text{ cm}$  e a aresta lateral  $10 \text{ cm}$ .

**394.** De uma pirâmide regular de base quadrada sabe-se que a área da base é  $32 \text{ dm}^2$  e que o apótema da pirâmide mede  $6 \text{ dm}$ . Calcule:

- a) a aresta da base ( $\ell$ );  
 b) o apótema da base ( $m$ );  
 c) a altura da pirâmide ( $h$ );  
 d) a aresta lateral ( $a$ );  
 e) a área lateral ( $A_l$ );  
 f) a área total ( $A_t$ ).

### Solução



a) aresta da base

$$\ell^2 = B \Rightarrow \ell^2 = 32 \Rightarrow \ell = \sqrt{32} \Rightarrow \ell = 4\sqrt{2} \text{ dm}$$

b) apótema da base

$$m = \frac{\ell}{2} \Rightarrow m = \frac{4\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m = 2\sqrt{2} \text{ dm}$$

c) altura da pirâmide

$$\triangle VOM: h^2 = m'^2 - m^2 \Rightarrow h^2 = 6^2 - (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{7} \text{ dm}$$

d) aresta lateral

$$\triangle VMC: a^2 = (m')^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 6^2 + \left(\frac{4\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{11} \text{ dm}$$

e) área lateral

$$A_l = 4 \cdot \frac{1}{2} \ell \cdot m' \Rightarrow A_l = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 6 \Rightarrow A_l = 48\sqrt{2} \text{ dm}^2$$

f) área total

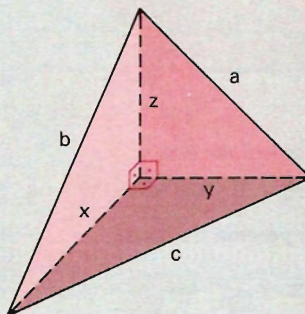
$$A_t = A_l + B \Rightarrow A_t = 48\sqrt{2} + 32 \Rightarrow A_t = 16(3\sqrt{2} + 2) \text{ dm}^2$$

**395.** A base de uma pirâmide de  $6 \text{ cm}$  de altura é um quadrado de  $8 \text{ cm}$  de perímetro. Calcule o volume.

- 396.** Calcule a área lateral e a área total de uma pirâmide triangular regular cuja aresta lateral mede  $82 \text{ cm}$  e cuja aresta da base mede  $36 \text{ cm}$ .
- 397.** Calcule a área lateral e a área total de uma pirâmide quadrangular regular, sendo  $7 \text{ m}$  a medida do seu apótema e  $8 \text{ m}$  o perímetro da base.
- 398.** Determine a área lateral e a área total de uma pirâmide triangular regular de  $7 \text{ cm}$  de apótema, sendo  $2 \text{ cm}$  o raio do círculo circunscrito à base.
- 399.** Calcule a medida da área lateral de uma pirâmide quadrangular regular, sabendo que a área da base mede  $64 \text{ m}^2$  e que a altura da pirâmide é igual a uma das diagonais da base.
- 400.** Calcule o volume de um tetraedro tri-retangular, conhecendo os lados  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , da face oposta ao triedro tri-retangular.

**Solução**

Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$  as medidas das arestas do triedro tri-retângulo. O tetraedro é uma pirâmide de altura  $z$  e base um triângulo retângulo de catetos  $x$  e  $y$ .



$$V = \frac{1}{3} B \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}xy\right) \cdot z \Rightarrow V = \frac{1}{6}xyz \quad (a)$$

Cálculo de  $x$ ,  $y$  e  $z$ :

$$x^2 + y^2 = c^2 \quad (1) \quad x^2 + z^2 = b^2 \quad (2) \quad y^2 + z^2 = a^2 \quad (3)$$

$$(1) + (2) + (3) \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \quad (4)$$

$$(4) - (1) \Rightarrow z^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \Rightarrow z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}$$

$$(4) - (2) \Rightarrow y^2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}}$$

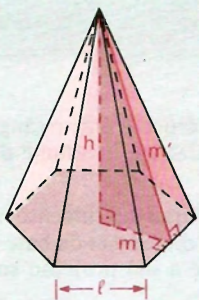
$$(4) - (3) \Rightarrow x^2 = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}}$$

Substituindo em (a), vem:

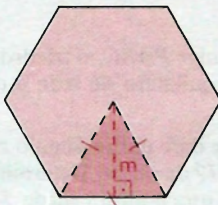
$$V = \frac{1}{24} \sqrt{2(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$$

- 401.** Numa pirâmide triangular  $PABC$ , o triedro de vértice  $P$  é tri-retângulo. O triângulo  $ABC$  da base é equilátero de lado  $4\text{ cm}$ . Calcule o volume da pirâmide.
- 402.** Uma pirâmide tem por base um retângulo cuja soma das dimensões vale  $34\text{ cm}$ , sendo uma delas os  $5/12$  da outra. Determine as dimensões da base e a área total da pirâmide, sabendo que a altura mede  $5\text{ cm}$  e a sua projeção sobre a base é o ponto de interseção das diagonais da base.
- 403.** Uma pirâmide tem por base um retângulo cujas dimensões medem  $10\text{ cm}$  e  $24\text{ cm}$ , respectivamente. As arestas laterais são iguais à diagonal da base. Calcule a área total da pirâmide.
- 404.** Calcule a área da base de uma pirâmide quadrangular regular cujas faces laterais são triângulos equiláteros, sendo  $81\sqrt{3}\text{ cm}^2$  a soma das áreas desses triângulos.
- 405.** Calcule a área lateral de uma pirâmide quadrangular regular, sabendo que uma diagonal da base mede  $3\sqrt{2}\text{ cm}$  e que o apótema da pirâmide mede  $5\text{ cm}$ .
- 406.** Determine a área lateral de uma pirâmide quadrangular regular, sendo  $144\text{ cm}^2$  a área da base da pirâmide e  $10\text{ cm}$  a medida da aresta lateral.
- 407.** Determine a área da base, a área lateral e a área total de uma pirâmide triangular regular, sabendo que a altura e a aresta da base medem  $10\text{ cm}$  cada uma.
- 408.** Calcule a área lateral de uma pirâmide quadrangular regular, sabendo que a diagonal da base da pirâmide mede  $8\sqrt{2}\text{ cm}$  e a aresta lateral é igual à diagonal da base.
- 409.** Sendo  $192\text{ m}^2$  a área total de uma pirâmide quadrangular regular e  $3\sqrt{2}\text{ m}$  o raio do círculo inscrito na base, calcule a altura da pirâmide.
- 410.** Uma pirâmide regular hexagonal de  $12\text{ cm}$  de altura tem aresta da base medindo  $\frac{10\sqrt{3}}{3}\text{ cm}$ . Calcule:  
apótema da base ( $m$ ), apótema da pirâmide ( $m'$ ), aresta lateral ( $a$ ), área da base ( $B$ ), área lateral ( $A_l$ ), área total ( $A_t$ ) e o volume ( $V$ ).

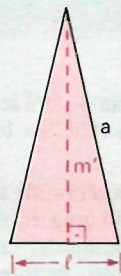
**Solução**



Pirâmide



Base



Face lateral

$$\text{Apótema da base: } m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = 5 \text{ cm.}$$

$$\text{Apótema da pirâmide: } (m')^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow (m')^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow m' = 13 \text{ cm.}$$

$$\text{Aresta lateral: } a^2 = (m')^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 13^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}\sqrt{399} \text{ cm.}$$

$$\text{Área da base: } B = 6 \cdot \frac{1}{2} \ell m = B = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot 5 \Rightarrow B = 50\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

$$\text{Área lateral: } A_l = 6 \cdot \frac{1}{2} \ell m' \Rightarrow A_l = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot 13 \Rightarrow A_l = 130\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

$$\text{Área total: } A_t = A_l + B = 130\sqrt{3} + 50\sqrt{3} \Rightarrow A_t = 180\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

$$\text{Volume: } V = \frac{1}{3} B \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 50\sqrt{3} \cdot 12 \Rightarrow V = 200\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

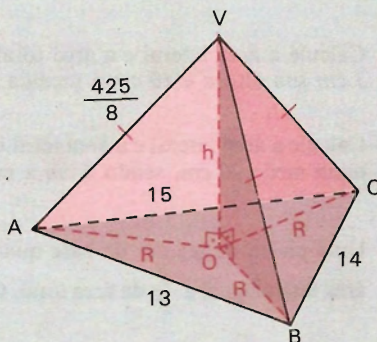
- 411.** Calcule a área lateral e a área total de uma pirâmide regular hexagonal cujo apótema mede 4 cm e a aresta da base mede 2 cm.

- 412.** Calcule a aresta lateral de uma pirâmide regular, sabendo que sua base é um hexágono de  $6\text{ cm}$  de lado, sendo  $10\text{ cm}$  a altura da pirâmide.
- 413.** A base de uma pirâmide regular é um hexágono inscrito em um círculo de  $12\text{ cm}$  de diâmetro. Calcule a altura da pirâmide, sabendo que a área da base é a décima parte da área lateral.
- 414.** Calcule a área lateral e a área total de uma pirâmide regular hexagonal, sendo  $3\text{ cm}$  sua altura e  $10\text{ cm}$  a medida da aresta da base.
- 415.** Calcule a área lateral e a área total de uma pirâmide regular hexagonal cujo apótema mede  $20\text{ cm}$ , sendo  $6\text{ cm}$  a medida do raio da base.
- 416.** Uma pirâmide regular de base quadrada tem o lado da base medindo  $8\text{ cm}$  e a área lateral igual a  $\frac{3}{5}$  da área total. Calcule a altura e a área lateral dessa pirâmide.
- 417.** A aresta lateral de uma pirâmide quadrangular regular mede  $15\text{ cm}$  e a aresta da base  $10\text{ cm}$ . Calcule o volume.
- 418.** Calcule o volume de uma pirâmide de  $12\text{ cm}$  de altura, sendo a base um losango cujas diagonais medem  $6\text{ cm}$  e  $10\text{ cm}$ .
- 419.** Se a altura de uma pirâmide regular hexagonal tem medida igual à aresta da base, calcule o seu volume, sendo  $a$  a aresta da base.
- 420.** Determine a razão entre os volumes de uma pirâmide hexagonal regular cuja aresta da base mede  $a$ , sendo  $a$  a medida de sua altura, e uma pirâmide cuja base é um triângulo equilátero de lado  $a$  e altura  $a$ .
- 421.** Calcule a razão entre os volumes de duas pirâmides,  $P_1$  e  $P_2$ , sabendo que os vértices são os mesmos e que a base de  $P_2$  é um quadrado obtido ligando-se os pontos médios da base quadrada de  $P_1$ .
- 422.** A área da base de uma pirâmide regular hexagonal é igual a  $216\sqrt{3}\text{ m}^2$ . Determine o volume da pirâmide, sabendo que sua altura mede  $16\text{ m}$ .
- 423.** Determine o volume de uma pirâmide triangular regular, sendo  $2\text{ m}$  a medida da aresta da base e  $3\text{ m}$  a medida de suas arestas laterais.
- 424.** O volume de uma pirâmide triangular regular é  $64\sqrt{3}\text{ cm}^3$ . Determine a medida da aresta lateral, sabendo que a altura é igual ao semiperímetro da base.

- 425.** Uma pirâmide triangular tem para base um triângulo de lados *13*, *14* e *15*; as outras arestas medem  $\frac{425}{8}$ . Calcule o volume.

**Solução**

As arestas laterais sendo congruentes, a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o circuncentro *O* (centro da circunferência circunscrita) do triângulo *ABC*. A altura é *VO*.



$$V = \frac{1}{3} B \cdot h \quad (1)$$

Tomando o *a* como unidade, vem:  
Área da base:

$$B = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \Rightarrow \quad B = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} \quad \Rightarrow \quad B = 84$$

*a* = 13, *b* = 14, *c* = 15

Altura:

$$R = \frac{abc}{4S} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{65}{8}$$

$$\triangle VOA \quad \Rightarrow \quad h^2 = \left(\frac{425}{8}\right)^2 - \left(\frac{65}{8}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{105}{2}$$

Substituindo em (1), vem:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 84 \cdot \frac{105}{2} \quad \Rightarrow \quad V = 1470$$

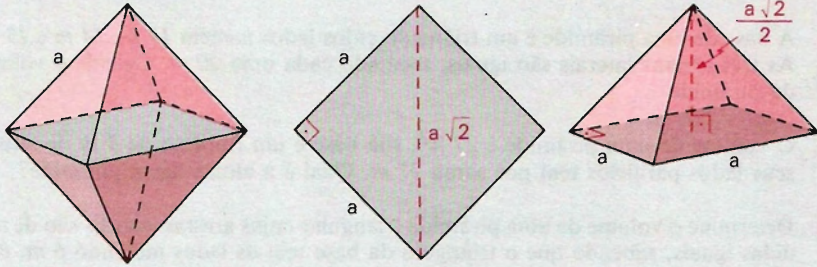
Resposta: 1470.

- 426.** Calcule o volume de uma pirâmide triangular regular, sabendo que o apótema da base mede *4 cm* e o apótema da pirâmide *5 cm*.
- 427.** Uma pirâmide triangular regular tem as medidas da altura e da aresta da base iguais a *6 cm*. Calcule a área da base, a área lateral, a área total e o volume dessa pirâmide.



- 428.** Calcule a área total e o volume de um octaedro regular de aresta  $a$ .

### Solução



Área:

A área de uma face ( $S$ ) é a área de um triângulo equilátero de lado  $a$ ; portanto,  $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ .

A superfície total é a reunião de 8 faces; então:

$$A_t = 8 \cdot S \Rightarrow A_t = 8 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_t = 2a^2 \sqrt{3}.$$

Volume:

O octaedro regular é a reunião de 2 pirâmides de base quadrada de lado  $a$  e de altura igual à metade da diagonal do quadrado; então:

$$V = 2 \left( \frac{1}{3} B \cdot h \right) \Rightarrow V = 2 \left( \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$$

- 429.** Calcule a área total e o volume de um octaedro regular de  $2 \text{ cm}$  de aresta.
- 430.** Calcule o volume da pirâmide quadrangular regular, sabendo que sua base é inscrita a um círculo de  $6 \text{ cm}$  de raio e que a aresta lateral mede  $12 \text{ cm}$ .
- 431.** Uma pirâmide regular de base quadrada tem lado da base medindo  $6 \text{ cm}$  e área lateral igual a  $5/8$  da área total. Calcule a altura, a área lateral e o volume dessa pirâmide.
- 432.** Calcule o volume de uma pirâmide hexagonal regular, sendo  $24 \text{ cm}$  o perímetro da base e  $30 \text{ cm}$  a soma dos comprimentos de todas as arestas laterais.
- 433.** Calcule o volume de uma pirâmide regular hexagonal, sendo  $6 \text{ cm}$  a medida da aresta da base e  $10 \text{ cm}$  a medida da aresta lateral.

- 434.** O volume de uma pirâmide regular hexagonal é  $60\sqrt{3} m^3$ , sendo  $4 m$  o lado do hexágono. Calcule a aresta lateral e a altura da pirâmide.
- 435.** A aresta da base de uma pirâmide regular hexagonal mede  $3 m$ . Calcule a altura e o volume dessa pirâmide, sendo a superfície lateral  $10$  vezes a área da base.
- 436.** A base de uma pirâmide é um triângulo cujos lados medem  $13 m$ ,  $14 m$  e  $15 m$ . As três arestas laterais são iguais, medindo cada uma  $20 m$ . Calcule o volume da pirâmide.
- 437.** O volume de uma pirâmide é  $27 m^3$ , sua base é um trapézio de  $3 m$  de altura, seus lados paralelos têm por soma  $17 m$ . Qual é a altura dessa pirâmide?
- 438.** Determine o volume de uma pirâmide triangular cujas arestas laterais são de medidas iguais, sabendo que o triângulo da base tem os lados medindo  $6 m$ ,  $8 m$  e  $10 m$  e que sua maior face lateral é um triângulo equilátero.
- 439.** A área lateral de uma pirâmide triangular regular é o quádruplo da área da base. Calcule o volume, sabendo que a aresta da base mede  $3 cm$ .
- 440.** Calcule as áreas lateral e total de uma pirâmide triangular regular, sabendo que sua altura mede  $12 cm$  e que o perímetro da base mede  $12 cm$ .
- 441.** Determine a altura de uma pirâmide triangular regular, sabendo que a área total é  $36\sqrt{3} cm^2$  e o raio do círculo inscrito na base mede  $2 cm$ .
- 442.** Calcule a medida do diedro formado pelas faces laterais com a base de uma pirâmide regular, sabendo que o apótema da pirâmide mede o dobro do apótema da base.
- 443.** Determine a medida da altura e da aresta lateral de uma pirâmide que tem por base um triângulo equilátero de lado  $16 cm$ , sabendo que as faces laterais formam com o plano da base ângulos de  $60^\circ$ .

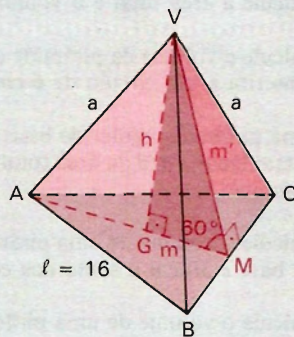
**Solução**

O apótema da base  $m$  é dado por

$$m = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$$

em que  $\ell = 16$ . Portanto,

$$m = \frac{16\sqrt{3}}{6} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$



Cálculo da altura  $h$ :

No triângulo  $VGM$ , temos:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{m} \Rightarrow h = m\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 8.$$

Cálculo da aresta lateral  $a$ :

1.º modo:

O apótema  $m'$  da pirâmide é dado por:

$$(m')^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow (m')^2 = 8^2 + \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (m')^2 = 64 + \frac{192}{9} = \frac{768}{9}.$$

No  $\triangle VMC$ , vem:

$$a^2 = (m')^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = \frac{768}{9} + 8^2 \Rightarrow a^2 = \frac{768}{9} + 64 \Rightarrow \\ \Rightarrow a = \sqrt{\frac{1344}{9}} \Rightarrow a = \frac{8\sqrt{21}}{3}.$$

2.º modo:

No  $\triangle VGA$ , temos:

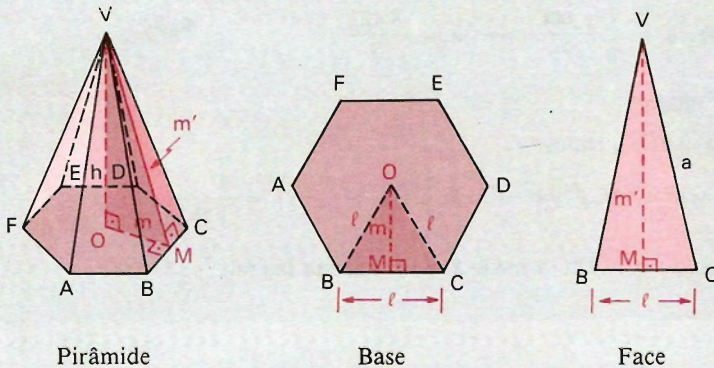
$$a^2 = h^2 + (AG)^2 \Rightarrow a^2 = 8^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{16\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{8^2 \cdot 21}{9} \Rightarrow a = \frac{8\sqrt{21}}{3}.$$

Resposta: A altura mede  $8 \text{ cm}$  e a aresta lateral  $\frac{8\sqrt{21}}{3} \text{ cm}$ .

- 444.** Uma pirâmide tem por base um triângulo equilátero de lado  $a$ . As faces laterais formam com o plano da base diedros de  $60^\circ$ . Calcule a altura, o comprimento das arestas e o volume da pirâmide.
- 445.** Uma pirâmide tem por base um hexágono regular de lado  $a$ , e cada aresta lateral da pirâmide mede  $2a$ .
- Qual o ângulo que cada aresta lateral forma com o plano da base?
  - Calcule, em função de  $a$ , a área lateral, a área total e o volume da pirâmide.
- 446.** Uma pirâmide quadrangular regular tem  $4 \text{ cm}$  de aresta da base e  $2\sqrt{5} \text{ cm}$  de aresta lateral. Calcule o ângulo que a face lateral forma com a base.

- 447. As faces laterais de uma pirâmide quadrangular regular de  $6\text{ m}$  de aresta da base formam  $60^\circ$  com o plano da base. Calcule o volume  $V$  e a área total dessa pirâmide.
- 448. Duas arestas opostas de uma pirâmide quadrangular regular medem  $2\text{ m}$  e formam, no interior do sólido, um ângulo de  $120^\circ$ . Calcule o volume da pirâmide.
- 449. Determine o volume de uma pirâmide cuja aresta lateral forma um ângulo de  $60^\circ$  com a diagonal do retângulo da base, sendo  $28\text{ m}$  o perímetro desse retângulo e  $3/4$  a razão entre suas dimensões.
- 450. A base de uma pirâmide é um losango de lado  $15\text{ dm}$ . A face lateral forma com a base um ângulo de  $45^\circ$ . A maior diagonal da base mede  $24\text{ dm}$ . Determine o volume da pirâmide.
- 451. Calcule o volume de uma pirâmide triangular cuja base tem os lados medindo  $12\text{ cm}$ ,  $15\text{ cm}$  e  $9\text{ cm}$ , a aresta lateral  $12,5\text{ cm}$  e sabendo que a projeção do vértice da pirâmide coincide com o circuncentro da base.
- 452. Calcule a aresta da base de uma pirâmide regular hexagonal, sendo  $30\sqrt{3}\text{ cm}^2$  a área lateral e  $2\sqrt{7}\text{ cm}$  a medida da aresta lateral.

**Solução**



$$A_l = 30\sqrt{3} \Rightarrow 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot m'\right) = 30\sqrt{3} \Rightarrow l m' = 10\sqrt{3} \Rightarrow m' = \frac{10\sqrt{3}}{l}$$

$$\triangle VMC : (m')^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow (m')^2 + \frac{l^2}{4} = (2\sqrt{7})^2 \Rightarrow 4(m')^2 + l^2 = 112$$

$$4\left(\frac{10\sqrt{3}}{l}\right)^2 + l^2 = 112 \Rightarrow \frac{1200}{l^2} + l^2 = 112 \Rightarrow l^4 - 112l^2 + 1200 = 0$$

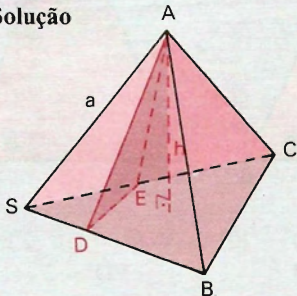
Resolvendo a equação acima, obtemos:  $l = 2\sqrt{3}$  ou  $l = 10$ .

A solução  $l = 10$  não convém pois, sendo  $l = 10$ , o apótema  $m' = \frac{10\sqrt{3}}{l}$  resulta  $m' = \sqrt{3}$  e o apótema da base  $m = \frac{l\sqrt{3}}{2}$  resulta  $m = 5\sqrt{3}$  e, com isso, teremos a hipotenusa  $m'$  menor que o cateto  $m$ .

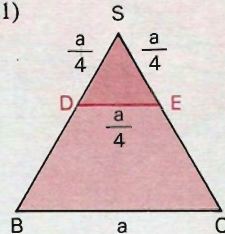
Resposta: A aresta da base mede  $2\sqrt{3}$  cm.

- 453.** Calcule o volume de uma pirâmide triangular regular, sendo 20 cm a medida de sua aresta lateral e  $36\sqrt{3}$  cm o perímetro do triângulo da base.
- 454.** Consideremos uma pirâmide de base quadrada, em que uma aresta lateral é perpendicular ao plano da base. A maior das arestas laterais mede 6 cm e forma um ângulo de  $45^\circ$  com a base. Calcule a área da base e o volume da pirâmide.
- 455.** A água da chuva é recolhida em um pluviômetro em forma de pirâmide quadrangular regular. Sabendo que a água alcança uma altura de 9 cm e forma uma pequena pirâmide de 15 cm de aresta lateral e que essa água é vertida em um cubo de 10 cm de aresta, responda: que altura alcançará a água no cubo?
- 456.** Calcule a superfície lateral, a superfície total e o volume de uma pirâmide que tem por vértice o centro da face de um cubo de aresta  $a$  e por base a face oposta.
- 457.** Uma pirâmide regular tem a base coincidente com uma das faces de um cubo de aresta  $a$  e é exterior ao cubo. Calcule a altura da pirâmide em função da aresta  $a$  do cubo, sabendo que o volume do cubo somado com o volume da pirâmide é  $3a^3$ .
- 458.** Um tetraedro regular  $SABC$  de aresta  $a$  é cortado por um plano que passa pelo vértice  $A$  e pelos pontos  $D$  e  $E$  situados respectivamente sobre as arestas  $SB$  e  $SC$ . Sabendo que  $SD = SE = \frac{1}{4}SC$ , ache o volume da pirâmide  $ASDE$ .

**Solução**



$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h \quad (1)$$



$$\text{Área da base: } B = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{4}\right) \cdot \left(\frac{a}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow B = \frac{a^2 \sqrt{3}}{64}$$

Altura: A altura de  $ASDE$  é a distância entre  $A$  e o plano  $SDE$ ; então  $h$  é igual à altura do tetraedro regular de aresta  $a$ , isto é,

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{3}$$

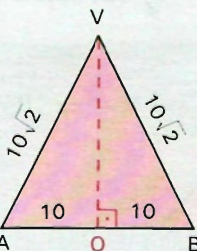
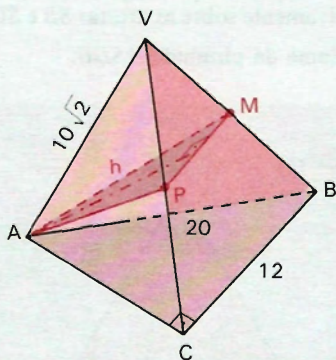
Substituindo  $B$  e  $h$  em (1), vem:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{64} \cdot \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3} \Rightarrow V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{192}$$

**459.** Uma pirâmide quadrangular regular tem as arestas laterais congruentes às arestas da base. Determine a área da secção obtida nesse poliedro por um plano que passa pelo vértice e pelos pontos médios de dois lados opostos da base, sendo  $a$  a medida das arestas laterais.

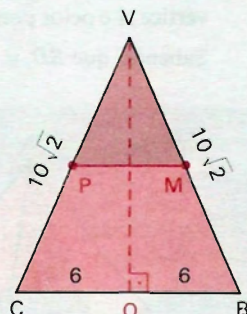
**460.** Os lados da base de uma pirâmide triangular são  $AB = 20 \text{ cm}$ ,  $BC = 12 \text{ cm}$  e  $AC = 16 \text{ cm}$ . As três arestas laterais são  $VA = VB = VC = 10\sqrt{2} \text{ cm}$ . Faz-se passar um plano secante pelo vértice  $A$  e pelos pontos médios  $M$  e  $P$  das arestas  $VB$  e  $VC$ , respectivamente. Calcule os volumes das pirâmides de vértice  $A$  e de bases  $VMP$  e  $MPCB$ , respectivamente.

**Solução**



$$(VO)^2 = (10\sqrt{2})^2 - 10^2$$

$$VO = 10$$



$$(VQ)^2 = (10\sqrt{2})^2 - 6^2$$

$$VQ = 2\sqrt{41}$$

Chamemos de  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$  os volumes das pirâmides  $VABC$ ,  $AVMP$  e  $AMPCB$ , respectivamente.

Cálculo de  $V_1$ :

$$V = \frac{1}{3} (\text{Área } \triangle ABC) \cdot (VO) \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 \right) \cdot 10 \Rightarrow V_1 = 320 \text{ cm}^3$$

Cálculo de  $h$ :

Distância de  $A$  ao plano  $VBC$ .

$$\text{Área } \triangle VBC = \frac{1}{2} (BC)(VQ) \Rightarrow \text{Área } \triangle VBC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{41} = 12\sqrt{41} \text{ cm}^2$$

$$V_1 = \frac{1}{3} (\text{Área } \triangle VBC) \cdot h \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{41} \cdot h = 320 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{320}{4\sqrt{41}} \Rightarrow h = \frac{80}{\sqrt{41}} \text{ cm}$$

Cálculo de  $V_2$ :

$$\text{Área } \triangle VMP = \frac{1}{4} (\text{Área } \triangle VBC) \Rightarrow \text{Área } \triangle VMP = 3\sqrt{41} \text{ cm}^2$$

$$V_2 = \frac{1}{3} (\text{Área } \triangle VMP) \cdot h \Rightarrow V_2 = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{41} \cdot \frac{80}{\sqrt{41}} \Rightarrow V_2 = 80 \text{ cm}^3$$

Cálculo de  $V_3$ :

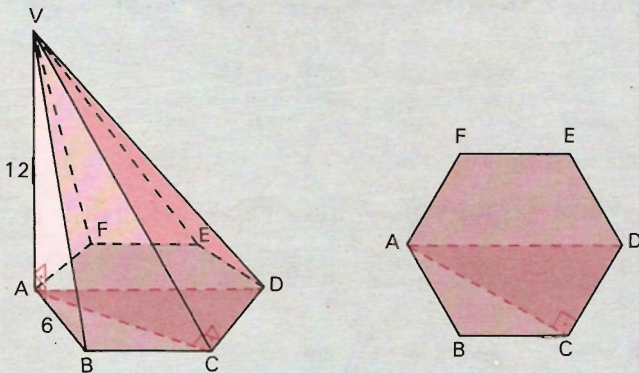
$$V_3 = V_1 - V_2 \Rightarrow V_3 = 320 - 80 \Rightarrow V_3 = 240.$$

Resposta: Os volumes são respectivamente  $80 \text{ cm}^3$  e  $240 \text{ cm}^3$ .

- 461.** Calcule a área da seção determinada em um tetraedro regular, por um plano que contém uma aresta do tetraedro e é perpendicular à aresta oposta, sabendo que a área total do tetraedro vale  $64\sqrt{3} \text{ m}^2$ .
- 462.** Seja um triedro de vértice  $S$ , cujos ângulos das faces medem  $60^\circ$ . Tomamos  $SA = a$  e pelo ponto  $A$  traçamos um plano perpendicular a  $SA$ , que corta as outras arestas em  $B$  e  $C$ . Calcule as arestas do tetraedro  $SABC$ , sua área total e seu volume.

- 463.** A base de uma pirâmide de vértice  $V$  é um hexágono regular  $ABCDEF$ , sendo  $AB = 6\text{ cm}$ . A aresta lateral  $VA$  é perpendicular ao plano da base e igual ao segmento  $AD$ . Prove que quatro faces laterais são triângulos retângulos e ache as suas áreas.

**Solução**



- a) Prova de que quatro faces laterais são triângulos retângulos:

$$VA \perp \text{plano } (ABCDEF) \Rightarrow \begin{cases} VA \perp AB \Rightarrow \triangle VAB \text{ é retângulo em } A \\ VA \perp AF \Rightarrow \triangle VAF \text{ é retângulo em } A \\ VA \perp CD \end{cases}$$

$C$  pertence à circunferência de diâmetro  $AD \Rightarrow AC \perp CD \Rightarrow \triangle VCD \text{ é retângulo}$

Analogamente,  $\triangle VED$  é retângulo em  $E$ .

- b) Cálculo das áreas:

1º) Os triângulos  $VAB$  e  $VAF$  têm área igual a  $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 36\text{ cm}^2$ .

2º) Os triângulos  $VCD$  e  $VED$  têm áreas  $S$  iguais.

Cálculo de  $S$ :

$$S = \frac{1}{2} (CD) \cdot (VC) \Rightarrow S = 3 \cdot (VC) \quad (1)$$

$$\triangle ACD \Rightarrow (AC)^2 = 12^2 - 6^2 \Rightarrow (AC)^2 = 108$$

$$\triangle VAC \Rightarrow (VC)^2 = (VA)^2 \Rightarrow (VC)^2 = 252 \Rightarrow VC = 6\sqrt{7}$$

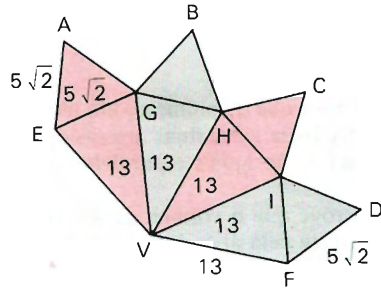
Substituindo em (1), vem:

$$S = 3 \cdot 6\sqrt{7} \Rightarrow S = 18\sqrt{7}\text{ cm}^2.$$

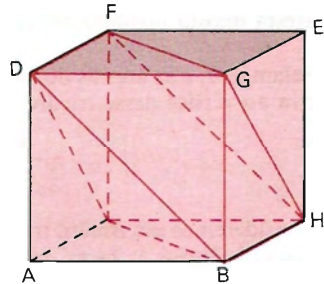


- 464.** Calcule o volume de uma pirâmide regular de altura  $h$ , sabendo que essa pirâmide tem por base um polígono convexo cuja soma dos ângulos internos é  $n\pi$  e a relação entre a superfície lateral e a área da base é  $k$ .
- 465.** Se  $K$  é a medida da aresta de um tetraedro regular, calcule a altura do tetraedro em função de  $K$ .
- 466.** A base de uma pirâmide reta de altura  $3r$  é um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio  $r$ . Determine o volume da pirâmide.
- 467.** Seja  $ABCD$  um tetraedro regular. Do vértice  $A$  traça-se a altura  $AH$ . Seja  $M$  o ponto médio do segmento  $AH$ . Mostre que as semi-retas  $MB$ ,  $MC$  e  $MD$  são as arestas de um triedro tri-retângulo.

- 468.** A figura é a planificação de um poliedro convexo ( $A = B = C = D$ ;  $E = F$ ). Calcule seu volume.

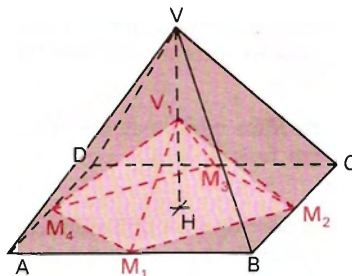


- 469.** Seja  $ABCDEFGH$  um cubo no qual  $AB, AC, AD, EF, EG, EH$  são seis de suas 12 arestas, de sorte que  $A$  e  $E$  são vértices opostos. Calcule o volume do sólido  $BCDFGH$  em termos do comprimento  $l$  das arestas do cubo.



- 470.** É possível construir uma pirâmide regular de 7 vértices com todas as arestas congruentes, isto é, da mesma medida? Justifique.
- 471.** Calcule o volume de uma pirâmide  $P_1$  quadrangular regular, dado o volume de uma pirâmide  $P_2$  igual a  $48 \text{ m}^3$  e sabendo que a base de  $P_1$  é formada pelos pontos médios das arestas da base de  $P_2$ , e cujo vértice é um ponto pertencente à altura de  $P_2$ , estando esse ponto situado a  $1/3$  do vértice de  $P_2$ .

**472.** Na figura, a pirâmide regular de base  $ABCD$  e altura  $\overline{VH}$  possui todas as arestas medindo  $4\text{ m}$ . Sabendo que  $V_1$  é ponto médio de  $VH$  e que  $M_1, M_2, M_3$  e  $M_4$  são pontos médios dos lados da base  $ABCD$ , forneça:



- a) o valor do lado  $M_1M_2$ ;
- b) a área do polígono  $M_1M_2M_3M_4$ ;
- c) o volume da pirâmide  $V_1M_1M_2M_3M_4$ .

**473.** Na pirâmide  $ABCDE$ , a base é um retângulo de  $6\text{ m}$  por  $4\text{ m}$ . A aresta  $DE$  é a altura e mede  $8\text{ m}$ . Prove que as quatro faces laterais são triângulos retângulos e calcule a área total da pirâmide.

**474.** Entre o volume  $V$ , a área lateral  $A$ , a área total  $S$  de uma pirâmide quadrangular regular existe a relação:

$$36 V^2 = S(S - A)(2A - S).$$

**475.** Prove que o volume de um tetraedro  $ABCD$  é a sexta parte do produto da menor distância entre duas arestas opostas  $AB, CD$ , pela área do paralelogramo cujos lados são iguais e paralelos a essas arestas.

**476.** Prove que o volume de um tetraedro é igual à terça parte do produto de uma aresta pela área do triângulo, projeção do sólido sobre um plano perpendicular a essa aresta.

**477.** Todo plano conduzido por uma aresta de um tetraedro e pelo ponto médio da aresta oposta divide o tetraedro em duas partes equivalentes.

**478.** Sejam  $a, b, c$  as arestas do triedro tri-retângulo de um tetraedro e  $h$  a altura relativa ao vértice desse triedro. Demonstre que:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

**479.** Consideremos um triedro tri-retângulo  $ABCD$  de vértice  $A$ , um ponto  $P$  interior, cujas distâncias às faces  $ABC, ABD, ACD$  são  $a, b, c$ , e pelo ponto  $P$  façamos passar um plano que corta as arestas  $AB, AC, AD$  em  $M, N, Q$ .

- a) Demonstre que  $\frac{a}{AQ} + \frac{b}{AN} + \frac{c}{AM} = 1$  e reciprocamente.
- b) Como deve ser escolhido esse plano para que o volume do tetraedro  $AMNQ$  seja mínimo?

**480.** Prove que o plano bissetor do ângulo diedro de um tetraedro divide a aresta oposta em segmentos proporcionais às áreas das faces do diedro.

- 481.** Demonstre que os segmentos que unem os vértices de uma pirâmide triangular com os baricentros das faces opostas se interceptam em um ponto e se dividem por esse ponto na relação  $1/3$ .
- 482.** Obtenha um ponto do interior de um tetraedro que, unido aos quatro vértices, determine quatro tetraedros equivalentes.
- 483.** Consideremos um tetraedro  $ABCD$  e um ponto  $P$  em seu interior. Traçamos  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  e  $DP$ , que cortam as faces opostas em  $M$ ,  $N$ ,  $R$  e  $Q$ . Demonstre que:

$$\frac{PM}{AM} + \frac{PN}{BN} + \frac{PR}{CR} + \frac{PQ}{DQ} = 1.$$

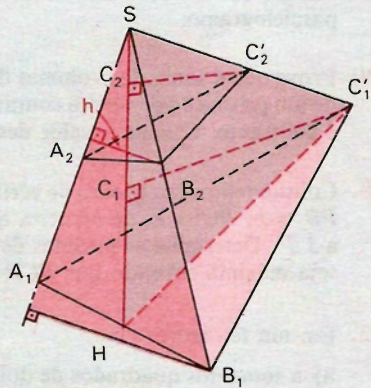
- 484.** Se dois tetraedros têm um triedro comum, seus volumes são proporcionais aos produtos das arestas desse triedro.

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{AQ} = \text{cte.}$$

**Solução**

Sejam  $S(A_1B_1C_1)$  e  $S(A_2B_2C_2)$  os tetraedros com o triedro  $S$  comum.

- $C_1C'_1$  = altura relativa à face  $SA_1B_1$
- $C_2C'_2$  = altura relativa à face  $SA_2B_2$
- $H$  = altura de  $SA_1B_1$  relativa a  $SA_1$
- $h$  = altura de  $SA_2B_2$  relativa a  $SA_2$



$$\frac{\text{Volume } S(A_1B_1C_1)}{\text{Volume } S(A_2B_2C_2)} = \frac{\frac{1}{3} (\text{Área } SA_1B_1) \cdot C_1C'_1}{\frac{1}{3} (\text{Área } SA_2B_2) \cdot C_2C'_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} (SA_1) \cdot H \cdot C_1C'_1}{\frac{2}{3} (SA_2) \cdot h \cdot C_2C'_2} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{SA_1}{SA_2} \cdot \frac{H}{h} \cdot \frac{C_1C'_1}{C_2C'_2}$$

Por semelhança de triângulo:  $\frac{H}{h} = \frac{SB_1}{SB_2}$  e  $\frac{C_1C'_1}{C_2C'_2} = \frac{SC_1}{SC_2}$ .

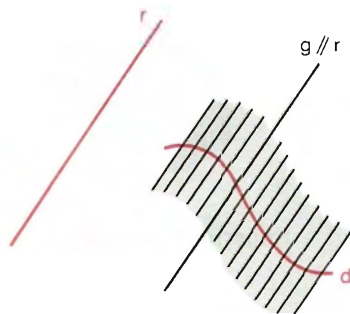
Substituindo  $\frac{H}{h}$  e  $\frac{C_1C'_1}{C_2C'_2}$ , vem:  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{SA_1}{SA_2} \cdot \frac{SB_1}{SB_2} \cdot \frac{SC_1}{SC_2}$

- 485.** Seja uma pirâmide triangular regular  $ABCD$  e um ponto  $P$  situado na sua altura  $AH$ . Por esse ponto passamos um plano qualquer que intercepta as arestas do triedro de vértice  $A$ , sendo  $M, N, Q$  os pontos de interseção; então:
- 486.** A base de uma pirâmide é um paralelogramo. Determine o plano que a divide em dois sólidos de iguais volumes, sabendo que esse plano contém um dos lados da base.
- 487.** Prove que, em todo tetraedro de arestas opostas ortogonais:
- os produtos das arestas opostas estão na razão inversa das mais curtas distâncias entre essas arestas;
  - as somas dos quadrados das arestas opostas são iguais e a soma dos quadrados dos produtos das arestas opostas é igual a quatro vezes a soma dos quadrados das quatro faces;
  - a soma dos seis diedros e dos doze ângulos formados pela interseção de cada aresta com as duas faces que ela corta é igual a doze ângulos retos.
- 488.** Mostre que a secção obtida da interseção de um plano com um tetraedro é um paralelogramo.
- 489.** Prove que a soma dos volumes das pirâmides que têm por bases as faces laterais de um prisma e por vértice comum um ponto  $O$  qualquer interior a uma das bases é constante. Calcule o valor dessa constante, se o volume do prisma é  $V$ .
- 490.** Consideremos um triedro de vértice  $P$  e sobre suas arestas os segmentos  $PA = a$ ,  $PB = b$ ,  $PC = c$ , de maneira que a área lateral da pirâmide  $PABC$  seja igual a  $3d^2$ . Determine as medidas de  $a, b, c$ , de modo que o volume dessa pirâmide seja máximo sabendo que  $BCP = \alpha$ ,  $CPA = \beta$  e  $APB = \varphi$ .
- 491.** Em um tetraedro:
- a soma dos quadrados de dois pares de arestas é igual à soma dos quadrados das arestas opostas do terceiro par mais quatro vezes o quadrado da distância entre os pontos médios destas duas últimas arestas;
  - a soma dos quadrados das seis arestas é igual ao quádruplo da soma dos quadrados dos três segmentos que unem os pontos médios das arestas opostas.
- 492.** Se um tetraedro tiver três faces equivalentes, a reta que une o vértice comum a essas três faces ao ponto de concurso das medianas da face oposta estará igualmente inclinada sobre os planos dessas três faces e reciprocamente.
- 493.** Seja um triedro de faces iguais, e consideremos os segmentos  $AM = AN = AP = a$ , todos partindo do vértice  $A$ . Qual deve ser o valor comum do ângulo dessas faces para que:
- a superfície lateral do tetraedro  $AMNP$ , de base  $MNP$ , seja máxima?
  - o volume desse tetraedro seja máximo?

## Cilindro

### I. Preliminar: noções intuitivas de geração de superfícies cilíndricas

**187.** *Superfícies regradas desenvolvíveis cilíndricas* são superfícies geradas por uma reta  $g$  (geratriz) que se mantém paralela a uma reta dada  $r$  (direção) e percorre os pontos de uma linha dada  $d$  (diretriz).

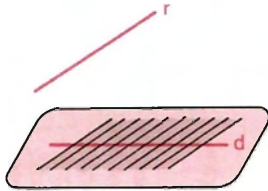


São superfícies *regradas* por serem geradas por *retas* e *desenvolvidas* por poderem ser aplicadas, estendidas ou desenvolvidas num plano (planificadas) sem dobras ou rupturas.

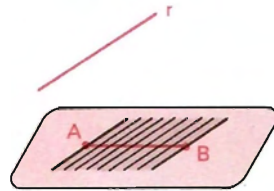
**188.** Como exemplos, temos:

- se a diretriz é uma *reta* não paralela a  $r$ , a superfície cilíndrica gerada é um *plano*.
- se a diretriz é um *segmento de reta* não paralelo a  $r$ , a superfície cilíndrica gerada é uma *faixa de plano*.
- se a diretriz é um *polígono* (linha poligonal fechada), cujo plano concorre com  $r$ , a superfície cilíndrica gerada é uma *superfície prismática ilimitada*.

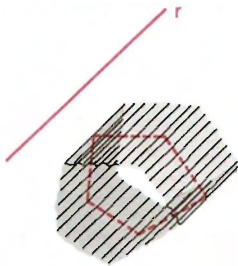
- se a diretriz é uma *circunferência* cujo plano concorre com  $r$ , a superfície cilíndrica gerada é uma superfície cilíndrica circular. E, ainda, se o plano da circunferência é *perpendicular* a  $r$ , temos uma *superfície cilíndrica circular reta*.



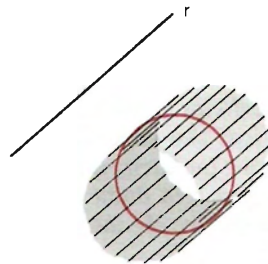
Plano



Faixa de plano



Superfície prismática

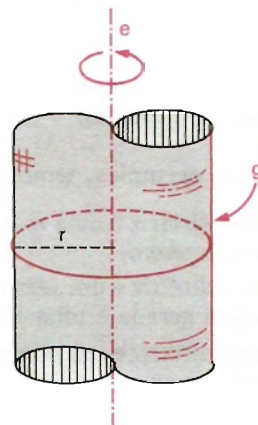


Superfície cilíndrica circular

**189.** *Superfície cilíndrica de rotação* ou *revolução* é uma superfície gerada pela rotação (ou revolução) de uma reta  $g$  (geratriz) em torno de uma reta  $e$  (eixo), fixa, sendo a reta  $g$  paralela e distinta da reta  $e$ .

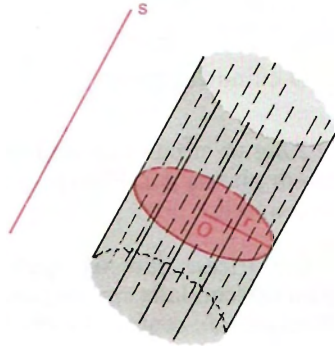
Considera-se que cada ponto da geratriz descreve uma circunferência com centro no eixo e cujo plano é perpendicular ao eixo.

A superfície cilíndrica de revolução de eixo  $e$ , geratriz  $g$  e raio  $r$  é o lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância dada ( $r$ ) de uma reta dada ( $e$ ).



**190.** Consideremos um círculo (região circular) de centro  $O$  e raio  $r$  e uma reta  $s$  não paralela nem contida no plano do círculo.

Chama-se *cilindro circular ilimitado* ou *cilindro circular indefinido* à reunião das retas paralelas a  $s$  e que pas- sam pelos pontos do círculo.



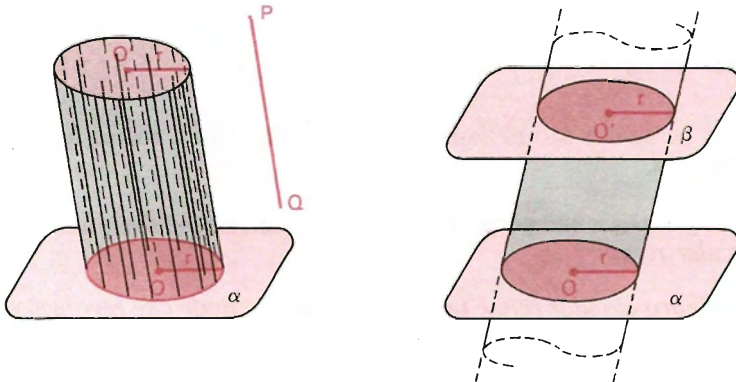
## II. Cilindro

### 191. Definição

Consideremos um círculo (região circular) de centro  $O$  e raio  $r$ , situado num plano  $\alpha$ , e um segmento de reta  $PQ$ , não nulo, não paralelo e não contido em  $\alpha$ . Chama-se *cilindro circular* ou *cilindro* à reunião dos segmentos congruentes e paralelos a  $PQ$ , com uma extremidade nos pontos do círculo e situados num mesmo semi-espaco dos determinados por  $\alpha$ .

Podemos também definir o cilindro como segue.

**192.** *Cilindro* é a reunião da parte do cilindro circular ilimitado, compreendida entre os planos de suas secções circulares paralelas e distintas em relação a essas secções.



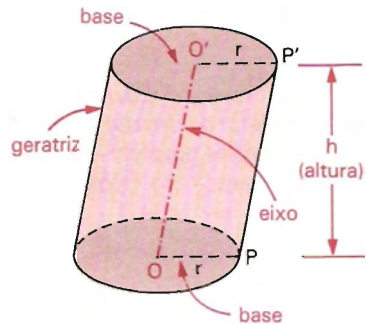
### 193. Elementos

O cilindro possui:

*2 bases*: círculos congruentes situados em planos paralelos (as secções citadas acima).

*Geratrizes*: são os segmentos com uma extremidade em um ponto da circunferência de centro  $O$  e raio  $r$  e a outra no ponto correspondente da circunferência de centro  $O'$  e raio  $r$ .

$r$  é o raio da base.



**194.** A *altura* de um cilindro é a distância  $h$  entre os planos das bases.

### 195. Superfícies

*Superfície lateral* é a reunião das geratrizes. A *área* dessa superfície é chamada *área lateral* e indicada por  $A_l$ .

*Superfície total* é a reunião da superfície lateral com os círculos das bases. A *área* dessa superfície é a *área total* e indicada por  $A_t$ .

### 196. Classificação

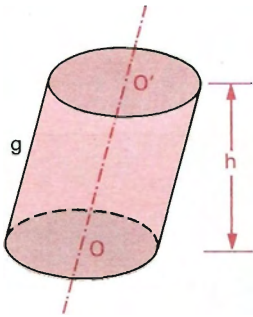
Se as geratrizes são oblíquas aos planos das bases, temos um *cilindro circular oblíquo*.

Se as geratrizes são perpendiculares aos planos das bases, temos um *cilindro circular reto*.

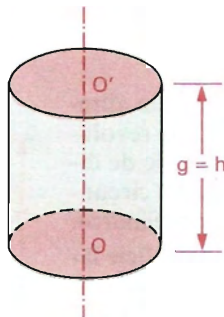
O *cilindro circular reto* é também chamado *cilindro de revolução*, pois é gerado pela rotação de um retângulo em torno de um eixo que contém um dos seus lados.



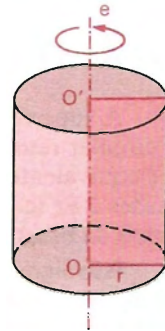
Cilindro oblíquo



Cilindro reto



Cilindro de revolução

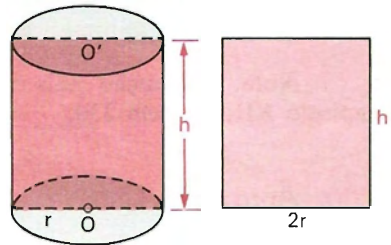


O *eixo* de um cilindro é a reta determinada pelos centros das bases.

### 197. Secção meridiana

*Secção meridiana* é a intersecção do cilindro com um plano que contém a reta  $OO'$  determinada pelos centros das bases.

A secção meridiana de um cilindro oblíquo é um paralelogramo e a secção meridiana de um cilindro reto é um retângulo.

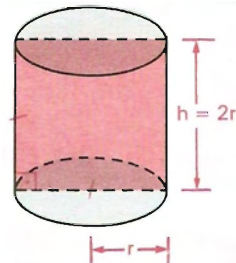


Cilindro reto    Secção meridiana

### 198. Cilindro equilátero

*Cilindro equilátero* é um cilindro cuja secção meridiana é um quadrado; portanto, apresenta:

$$g = h = 2r.$$

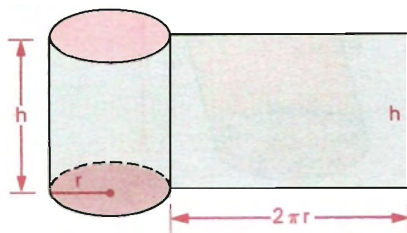


### III. Áreas lateral e total

#### 199. Área lateral

A superfície lateral de um cilindro circular reto ou cilindro de revolução é equivalente a um retângulo de dimensões  $2\pi r$  (comprimento da circunferência da base) e  $h$  (altura do cilindro).

Isso significa que a superfície lateral de um cilindro de revolução desenvolvida num plano (planificada) é um retângulo de dimensões  $2\pi r$  e  $h$ .



Portanto, a área lateral do cilindro é

$$A_l = 2\pi r h$$

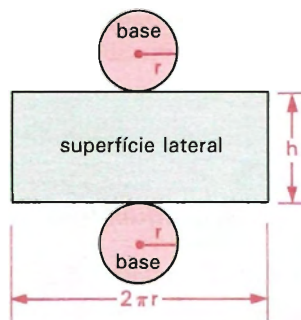
**Nota:** A dedução mais rigorosa desta fórmula encontra-se no final do capítulo XII, no item 230.

#### 200. Área total

A área total de um cilindro é a soma da área lateral ( $A_l$ ) com as áreas das duas bases ( $B = \pi r^2$ ); logo:

$$A_t = A_l + 2B \Rightarrow A_t = 2\pi r h + 2\pi r^2 \Rightarrow$$

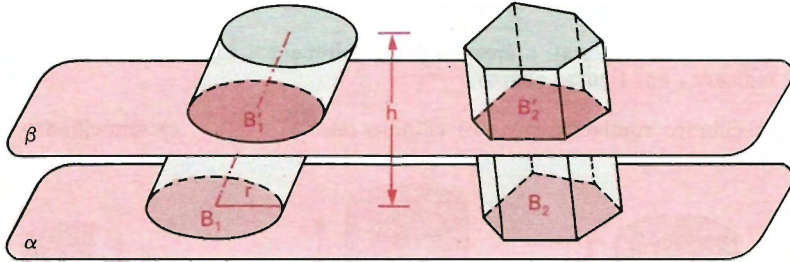
$$\Rightarrow A_t = 2\pi r (h + r)$$



### IV. Volume do cilindro

**201.** Consideremos um cilindro de altura  $h$  e área da base  $B_1 = B$  e um prisma de altura  $h$  e área da base  $B_2 = B$  (o cilindro e o prisma têm alturas congruentes e bases equivalentes).

Suponhamos que os dois sólidos têm as bases num mesmo plano  $\alpha$  e estão num dos semi-espacos determinados por  $\alpha$ .



Qualquer plano  $\beta$  paralelo a  $\alpha$ , que secciona o cilindro, também secciona o prisma e as secções ( $B'_1$  e  $B'_2$ , respectivamente) têm áreas iguais, pois são congruentes às respectivas bases.

$$(B'_1 = B_1, B'_2 = B_2, B_1 = B_2 = B) \implies B'_1 = B'_2$$

Então, pelo princípio de Cavalieri, o cilindro e o prisma têm volumes iguais.

$$V_{\text{cilindro}} = V_{\text{prisma}}$$

Como  $V_{\text{prisma}} = B_2 \cdot h$ , ou seja,  $V_{\text{prisma}} = B \cdot h$ , vem que  $V_{\text{cilindro}} = B \cdot h$ ; ou resumidamente:

$$V = B \cdot h$$

*Conclusão:*

O volume de um cilindro é o produto da *área da base* pela medida da *altura*.

Se  $B = \pi r^2$ , temos:  $V = \pi r^2 h$

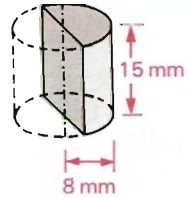
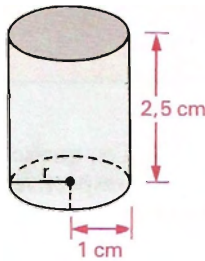
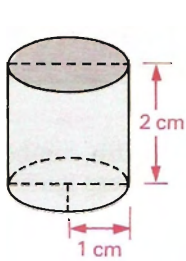
# EXERCÍCIOS

**494.** Calcule a área lateral, a área total e o volume dos sólidos cujas medidas estão indicadas nas figuras abaixo.

a) cilindro equilátero

b) cilindro reto

c) semicilindro reto

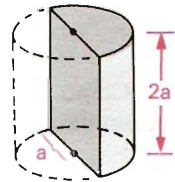
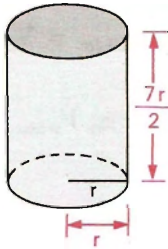
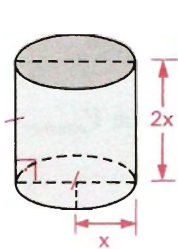


**495.** Represente através de expressões algébricas a área lateral, a área total e o volume dos cilindros cujas medidas estão indicadas nas figuras abaixo.

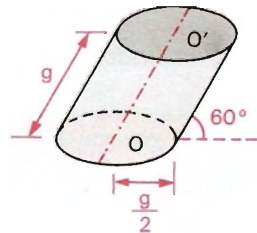
a) cilindro equilátero

b) cilindro reto

c) semicilindro reto



**496.** Calcule o volume do cilindro oblíquo da figura ao lado em função de  $g$ .



**497.** A área lateral de um cilindro de revolução de 10 cm de raio é igual à reta da base. Calcule a altura do cilindro.

- 498.** Calcule a medida da área lateral de um cilindro circular reto, sabendo que o raio da base mede  $4\text{ cm}$  e a geratriz  $10\text{ cm}$ .
- 499.** O raio de um cilindro circular reto mede  $3\text{ cm}$  e a altura  $3\text{ cm}$ . Determine a área lateral desse cilindro.
- 500.** Determine o raio de um círculo cuja área é igual à área lateral de um cilindro equilátero de raio  $r$ .
- 501.** Demonstre que, se a altura de um cilindro reto é a metade do raio da base, a área lateral é igual à área da base.
- 502.** Um cilindro tem  $2,7\text{ cm}$  de altura e  $0,4\text{ cm}$  de raio da base. Calcule a diferença entre a área lateral e a área da base.
- 503.** Qual a altura de um reservatório cilíndrico, sendo  $150\text{ m}$  o raio da base e  $900\pi\text{ m}^2$  sua área lateral?
- 504.** Constrói-se um depósito em forma cilíndrica de  $8\text{ m}$  de altura e  $2\text{ m}$  de diâmetro. Determine a superfície total do depósito.
- 505.** Calcule a medida do raio da base de um cilindro equilátero, sabendo que sua área total mede  $300\pi\text{ cm}^2$  e a geratriz  $40\text{ cm}$ .
- 506.** Determine a medida da geratriz de um cilindro reto, sendo  $250\pi\text{ cm}^2$  a medida de sua área lateral e  $10\text{ cm}$  o raio de sua base.
- 507.** A área lateral de um cilindro de  $1\text{ m}$  de altura é  $16\text{ m}^2$ . Calcule o diâmetro da base do cilindro.
- 508.** Calcule a área lateral, a área total e o volume de um cilindro equilátero de raio igual a  $r$ .

### Solução

a) área lateral

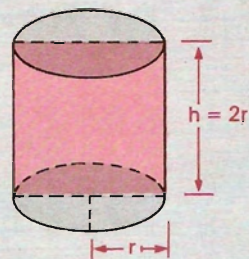
$$\left. \begin{array}{l} A_l = 2\pi r h \\ h = 2r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A_l = 2\pi r \cdot 2r \\ A_l = 4\pi r^2 \end{array} \right\}$$

b) área total

$$\left. \begin{array}{l} A_t = A_l + 2B \\ B = \pi r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A_t = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 \\ A_t = 6\pi r^2 \end{array} \right\}$$

c) volume

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = \pi r^2 \cdot 2r \Rightarrow V = 2\pi r^3$$



- 509.** Determine a área lateral de um cilindro equilátero, sendo  $15\text{ cm}$  a medida de sua geratriz.
- 510.** Calcule a área total de um cilindro que tem  $24\text{ cm}$  de diâmetro da base e  $38\text{ cm}$  de altura.
- 511.** Determine a medida do raio de um círculo cuja área é igual à área total de um cilindro equilátero de raio  $r$ .
- 512.** Determine a área lateral e o volume de um cilindro de altura  $10\text{ cm}$ , sabendo que a área total excede em  $50\text{ cm}^2$  sua área lateral.
- 513.** Quantos metros cúbicos de terra foram escavados para a construção de um poço que tem  $10\text{ m}$  de diâmetro e  $15\text{ m}$  de profundidade?
- 514.** Um vaso cilíndrico tem  $30\text{ dm}$  de diâmetro interior e  $70\text{ dm}$  de profundidade. Quantos litros de água pode conter aproximadamente?
- 515.** O raio interno de uma torre circular é de  $120\text{ cm}$ , a espessura  $50\text{ cm}$  e o volume  $145\pi\text{ m}^3$ . Qual é a altura da torre?
- 516.** Um pluviômetro cilíndrico tem um diâmetro de  $30\text{ cm}$ . A água colhida pelo pluviômetro depois de um temporal é colocada em um recipiente também cilíndrico, cuja circunferência da base mede  $20\pi\text{ cm}$ . Que altura havia alcançado a água no pluviômetro, sabendo que no recipiente alcançou  $180\text{ mm}$ ?
- 517.** Qual o valor aproximado da massa de mercúrio em quilogramas, necessária para encher completamente um vaso cilíndrico de raio interno  $6\text{ cm}$  e altura  $18\text{ cm}$ , se a densidade do mercúrio é  $13,6\text{ g/cm}^3$ ?

### Solução

a) Volume

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi \cdot 6^2 \cdot 18 = \pi \cdot 36 \cdot 18 = 648\pi\text{ cm}^3$$

b) Densidade

$$d = \frac{m}{V} \Rightarrow 13,6 = \frac{m}{648\pi} \Rightarrow m = 8\,812,8\pi$$

$$m \cong 8\,812,8 \cdot 3,14 = 27\,672,192 \cong 27\,672,2\text{ g} \cong 27,672\text{ kg}$$

- 518.** Calcule a área lateral, a área total e o volume de um cilindro reto de  $5\text{ cm}$  de raio, sabendo que a seção meridiana é equivalente à base.

- 519.** O que ocorre com o volume de um cilindro quando o diâmetro da base dobra? E quando quadruplica? E quando fica reduzido à metade?
- 520.** Determine o volume de um cilindro de revolução de  $10\text{ cm}$  de altura, sendo sua área lateral igual à área da base.
- 521.** Determine o volume de um cilindro reto, sabendo que a área de sua base é igual à sua área lateral e a altura igual a  $12\text{ m}$ .
- 522.** O desenvolvimento da superfície lateral de um cilindro é um quadrado de lado  $a$ . Determine o volume do cilindro.
- 523.** Determine a altura de um cilindro reto de raio da base  $r$ , sabendo que é equivalente a um paralelepípedo retângulo de dimensões  $a$ ,  $b$  e  $c$ .
- 524.** A altura de um cilindro reto é igual ao triplo do raio da base. Calcule a área lateral, sabendo que seu volume é  $46\,875\pi\text{ cm}^3$ .
- 525.** Qual é a altura aproximada de um cilindro reto de  $12,56\text{ cm}^2$  de área da base, sendo a área lateral o dobro da área da base?
- 526.** Determine a área lateral de um cilindro reto, sendo  $S$  a área de sua secção meridiana.
- 527.** Determine a razão entre a área lateral e a área da secção meridiana de um cilindro reto.
- 528.** Calcule a área lateral de um cilindro equilátero, sendo  $289\text{ cm}^2$  a área de sua secção meridiana.
- 529.** Determine o volume de um cilindro reto de raio  $r$ , sabendo que sua área total é igual à área de um círculo de raio  $5r$ .
- 530.** Determine a área total de um cilindro, sabendo que a área lateral é igual a  $80\text{ cm}^2$  e a sua secção meridiana é um quadrado.
- 531.** Determine a área total de um cilindro equilátero, sendo  $S$  a área de sua secção meridiana.
- 532.** Qual a razão entre a área total e a área lateral de um cilindro equilátero?
- 533.** Uma pipa cilíndrica tem profundidade de  $4,80\text{ dm}$ . Determine a medida do seu diâmetro, sabendo que a sua capacidade é de  $37\,680\text{ litros}$ . (Adote  $\pi = 3,14$ .)
- 534.** A altura de um cilindro é os  $5/3$  do raio da base. Determine a área da base desse cilindro, sendo  $64\pi\text{ cm}^2$  sua área lateral.
- 535.** A área total de um cilindro de raio  $r$  e altura  $h$  é o triplo da área lateral de um outro cilindro de raio  $h$  e altura  $r$ . Calcule  $r$  em função de  $h$ .

- 536.** Se a altura de um cilindro reto é igual ao raio da base, então a superfície lateral é igual à metade da superfície total.
- 537.** Calcule o raio da base de um cilindro reto em função do seu volume  $V$  e da sua área lateral  $A_l$ .
- 538.** Calcule a área lateral de um cilindro de revolução, conhecendo seu volume  $V$  e seu raio da base  $r$ .
- 539.** Determine a área lateral, a área total e o volume de um cilindro equilátero de altura  $h$ .
- 540.** Num cilindro de revolução com água colocamos uma pedra. Determine o volume dessa pedra, se em virtude de sua imersão total a água se elevou  $35\text{ cm}$ , sendo  $50\text{ cm}$  o raio da base do cilindro.
- 541.** O desenvolvimento de uma superfície cilíndrica de revolução é um retângulo de  $4\text{ cm}$  de altura e  $7\text{ cm}$  de diagonal. Calcule a área lateral do cilindro.
- 542.** Determine a área lateral de um cilindro reto de  $30\pi\text{ cm}^2$  de área total, sendo o raio da base  $3/2$  da medida da altura do cilindro.

### Solução

Seja  $r$  o raio da base e  $h$  a altura, temos:

$$A_t = 30\pi \Rightarrow A_l + 2B = 30\pi \Rightarrow 2\pi rh + 2\pi r^2 = 30\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} rh + r^2 = 15 \\ r = \frac{3}{2}h \end{array} \right\} = \frac{3}{2}h^2 + \frac{9}{4}h^2 = 15 \Rightarrow 15h^2 = 60 \Rightarrow h = 2$$

Com  $h = 2$  e  $r = \frac{3}{2}h$ , vem que  $r = 3$ .

Área lateral:  $A_l = 2\pi rh \Rightarrow A_l = 2\pi \cdot 3 \cdot 2 \Rightarrow A_l = 12\pi$ .

Resposta:  $12\pi\text{ cm}^2$ .

- 543.** Determine a medida da altura e do raio de um cilindro reto, sendo  $9/5$  sua razão, nessa ordem, e  $270\pi\text{ cm}^2$  a área lateral.
- 544.** Calcule a área lateral de um cilindro, sabendo que a base está circunscrita a um hexágono regular de  $30\text{ cm}$  de perímetro e cuja altura é o dobro do raio da base.
- 545.** Determine a medida da altura de um cilindro de  $30\pi\text{ m}^2$  de área lateral e  $45\pi\text{ m}^3$  de volume.

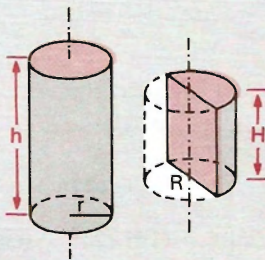


- 546.** Multiplica-se por  $k$  a altura e o raio de um cilindro de revolução. Como se modifica a sua área lateral?
- 547.** Determine a área lateral de um cilindro, sendo  $150 \pi \text{ cm}^2$  sua área total e sabendo que sua altura mede o triplo do raio da base.
- 548.** Calcule a área lateral de um cilindro reto, sendo  $12 \text{ m}^2$  sua área total e o raio  $1/5$  da altura.
- 549.** Determine a medida da altura de um cilindro reto de raio da base igual a  $5 \text{ cm}$ , sendo sua área total igual a  $50$  vezes a área de um círculo cujo raio tem medida igual à altura do cilindro.
- 550.** O volume de um cilindro de revolução é igual ao produto da área total pela quarta parte da média harmônica entre o raio e a altura.  
(Nota: Média harmônica entre dois números é o inverso da média aritmética dos inversos desses números.)
- 551.** Determine o raio da base de um cilindro equilátero, sabendo que a área lateral excede em  $4 \pi \text{ cm}^2$  a área da secção meridiana.
- 552.** Quanto se deve aumentar o raio da base de um cilindro reto de raio  $r$  e geratriz  $g$ , de modo que a área lateral do segundo cilindro seja igual à área total do primeiro?
- 553.** Com uma folha de zinco de  $5 \text{ m}$  de comprimento e  $4 \text{ m}$  de largura podemos construir dois cilindros, um segundo o comprimento e outro segundo a largura. Determine em qual dos casos o volume será maior.
- 554.** Com uma prancha retangular de  $8 \text{ cm}$  de largura por  $12 \text{ cm}$  de comprimento podemos construir dois cilindros, um segundo o comprimento e outro segundo a largura. Determine em qual dos casos o volume será menor.
- 555.** Um cilindro de revolução de raio da base  $r$  e um semicilindro de revolução de raio da base  $R$  são equivalentes e têm áreas laterais iguais. Calcule a relação entre  $r$  e  $R$ .

**Solução**

$$V_A = \pi r^2 h$$

$$A_{l(A)} = 2\pi r h$$



Sólido A      Sólido B

$$V_B = \frac{1}{2} \pi R^2 H$$

$$A_{l(B)} = \frac{1}{2} (2\pi R H) + 2 R H$$

$\frac{1}{2}$  sup. lat.      retângulo

$$A_{l(B)} = R H (\pi + 2)$$

$$V_A = V_B \Rightarrow \pi r^2 h = \frac{1}{2} \pi R^2 H \Rightarrow 2r^2 h = R^2 H \quad (1)$$

$$A_{l_A} = A_{l_B} \Rightarrow 2\pi r h = R H (\pi + 2) \quad (2)$$

$$(1) \div (2) \Rightarrow \frac{2r^2 h}{2\pi r h} = \frac{R^2 H}{R H (\pi + 2)} \Rightarrow \frac{r}{\pi} = \frac{R}{\pi + 2} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{\pi}{\pi + 2}$$

- 556.** Um cilindro de revolução é dividido em dois semicilindros. Sendo  $20\pi \text{ cm}^2$  sua área da base e  $8 \text{ cm}$  sua altura, determine a área total do semicilindro.
- 557.** Determine a altura de um cilindro reto em função da altura  $h$  de um semicilindro, sabendo que as áreas laterais são iguais e as bases equivalentes.
- 558.** Calcule a altura de um cilindro em função de sua área lateral  $A_l$  e da área da base  $B$ .
- 559.** Calcule o raio da base de um cilindro de área total  $\pi a^2$  e altura  $h$ .
- 560.** A geratriz de um cilindro oblíquo mede  $8 \text{ cm}$  e forma um ângulo de  $45^\circ$  com a base, que é um círculo de  $3 \text{ cm}$  de raio. Calcule o volume do cilindro.
- 561.** Calcule o volume de um cilindro cujo raio da base mede  $5 \text{ cm}$ , sabendo que as geratrizes de  $15 \text{ cm}$  formam com o plano da base um ângulo de  $60^\circ$ .
- 562.** Quanto se deve aumentar a geratriz de um cilindro reto para que a área total do novo cilindro seja o triplo da área lateral do primeiro?
- 563.** Dois cilindros têm a mesma área lateral e raios de  $9 \text{ cm}$  e  $12 \text{ cm}$ . Calcule a relação entre seus volumes e a relação entre suas áreas totais, sabendo que a altura do primeiro é  $10 \text{ cm}$ .
- 564.** A diferença entre a área da base e a área lateral de um cilindro de raio  $r$  e altura  $h$  é igual à área de um círculo de raio  $h$ . Calcule a medida de  $r$  em função de  $h$ .

### Solução

Dado:  $h$ .

Pede-se:  $r$ .

$$B - A_l = A_{\text{círculo}} \Rightarrow \pi r^2 - 2\pi r h = \pi h^2 \Rightarrow r^2 - 2hr - h^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{2 \pm \sqrt{4h^2 + 4h^2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} r = (1 + \sqrt{2})h & \text{(resposta)} \\ \text{ou} \\ r = (1 - \sqrt{2})h & \text{(esta não convém)} \end{cases}$$

$$\text{Resposta: } r = (1 + \sqrt{2})h.$$

- 565.** Com uma folha de cartolina em forma retangular, de base  $\ell$  e altura  $h$ , construímos a superfície lateral de um cilindro de altura  $h$  e volume  $V$ . Calcule  $\ell$  em função de  $h$  e  $V$ .
- 566.** Determine a área total  $A_t$  de um cilindro reto, em função do seu volume  $V$  e da sua altura  $h$ .
- 567.** Calcule o raio, a altura e a área total de um cilindro circular reto que tem volume igual ao de um cubo de aresta  $a$  e área lateral igual à área da superfície do cubo.

**Solução**

$$V_{\text{cilindro}} = V_{\text{cubo}} \Rightarrow \pi r^2 h = a^3 \quad (1)$$

$$A_{\text{f}}_{\text{cilindro}} = A_{\text{t}}_{\text{cubo}} \Rightarrow 2\pi r h = 6a^2 \Rightarrow \pi r h = 3a^2 \quad (2)$$

$$(1) \div (2) \Rightarrow r = \frac{1}{3} a$$

$$\text{Substituindo em (2): } \pi \frac{1}{3} a h = 3a^2 \Rightarrow h = \frac{9}{\pi} a.$$

$$\text{Área total: } A_t = A_f + 2B.$$

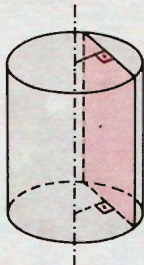
$$A_t = 6a^2 + 2\pi \cdot \frac{1}{9} a^2 \Rightarrow A_t = \frac{54a^2 + 2\pi a^2}{9} \Rightarrow A_t = \frac{2}{9} (27 + \pi) a^2$$

$$\text{Resposta: } r = \frac{a}{3}, h = \frac{9a}{\pi}, A_t = \frac{2}{9} (27 + \pi) a^2.$$

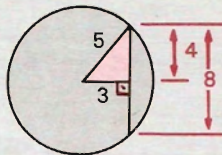
- 568.** Determine a razão entre o volume de um cilindro reto e um prisma triangular regular, sendo a área lateral do cilindro igual à área lateral do prisma e o raio do cilindro o dobro da aresta da base do prisma.
- 569.** Um prisma quadrangular regular e um cilindro circular reto têm mesma altura e mesmo volume. Sabendo que a área lateral do prisma é  $\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi} \text{ cm}^2$ , calcule a área lateral do cilindro.
- 570.** Determine a razão entre a área lateral de um cilindro reto e a área lateral de um semicilindro, sabendo que seus volumes e suas alturas são iguais.
- 571.** Determine a relação entre os volumes de dois cilindros retos, sabendo que suas áreas laterais são iguais e seus raios são, respectivamente,  $R$  e  $r$ .
- 572.** Dados dois cilindros com altura igual a  $5 \text{ cm}$ , a diferença entre os volumes é igual a  $400 \pi \text{ cm}^3$  e a diferença entre os raios é igual a  $8 \text{ cm}$ . Determine o raio do cilindro de maior volume.

- 573.** Dão-se as áreas totais  $18 \pi m^2$  e  $32 \pi m^2$  de dois cilindros. Cada um tem por raio e por altura, respectivamente, a altura e o raio do outro. Determine os dois volumes.
- 574.** Calcule a altura de um cilindro circular reto em função de sua área total  $2 \pi S$  e sua área lateral  $2 \pi A$ .
- 575.** Calcule o volume de um cilindro de revolução de raio igual a  $5 \text{ dm}$ , sabendo que esse cilindro cortado por um plano paralelo ao eixo e a uma distância de  $3 \text{ dm}$  desse eixo apresenta uma secção retangular equivalente à base.

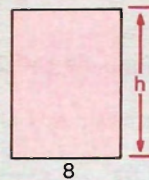
**Solução**



Cilindro



Base



Secção

$$\text{Área do retângulo} = \text{Área da base} \Rightarrow 8h = \pi 5^2 \Rightarrow h = \frac{25}{8} \pi.$$

$$\text{Volume: } V = B \cdot h \Rightarrow V = \pi 5^2 \cdot \frac{25}{8} \pi \Rightarrow V = \frac{625}{8} \pi^2.$$

$$\text{Resposta: } \frac{625}{8} \pi^2 \text{ dm}^3.$$

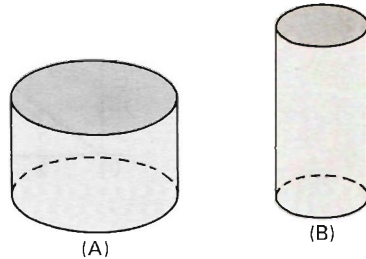
- 576.** Um cilindro equilátero de raio da base  $r$  é seccionado por um plano paralelo ao seu eixo e a uma distância  $d$  desse eixo. Calcule a medida da distância  $d$ , se a área da secção do plano com o cilindro é igual à área da base do cilindro.
- 577.** Um plano secciona um cilindro paralelamente ao eixo e forma um arco de  $60^\circ$  com a base do cilindro. A altura do cilindro é de  $20 \text{ cm}$ . Determine a área da secção, se a distância do plano ao eixo é de  $4 \text{ cm}$ .
- 578.** Dentre os cilindros de revolução de área total  $2 \pi a^2$ , determine o raio da base e a altura daquele de maior volume.

- 579.** Dentre os cilindros de revolução abertos em uma das bases, de área total  $2\pi a^2$ , determine o raio da base e a altura daquele de volume máximo.
- 580.** Dentre os cilindros de revolução equivalentes, determine o raio da base e a altura daquele de menor área total.
- 581.** Determine o volume de um cilindro de revolução em função de sua área total  $2\pi S$  e sua área lateral  $2\pi A$ .
- 582.** Trace um plano paralelo à base de um cilindro de raio  $r$  e altura  $h$ , de modo que a base seja média proporcional entre as duas partes em que fica dividida a superfície lateral.
- 583.** Um suco de frutas é vendido em dois tipos de latas cilíndricas: uma de raio  $r$  cheia até a altura  $h$  e outra de raio  $r/2$  e cheia até a altura  $2h$ . A primeira é vendida por  $R\$ 3,00$  e a segunda por  $R\$ 1,60$ . Qual a embalagem mais vantajosa para o comprador?
- 584.** Um cilindro circular reto tem raio de base  $R$  e altura  $H$ . A média harmônica entre  $R$  e  $H$  é  $4$ . A área total do cilindro é  $54\pi$ . Calcule o volume do cilindro e suas áreas da base e lateral.

- 585.** Um produto é embalado em latas cilíndricas (cilindros de revolução). O raio da embalagem  $A$  é igual ao diâmetro de  $B$  e a altura de  $B$  é o dobro da altura de  $A$ . Assim,

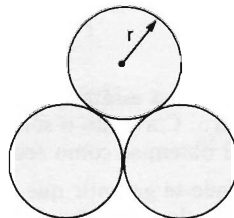
$$\text{Cilindro A} \begin{cases} \text{altura } h \\ \text{raio da base } 2R \end{cases}$$

$$\text{Cilindro B} \begin{cases} \text{altura } 2h \\ \text{raio da base } R \end{cases}$$

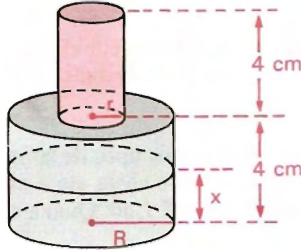


- a) As embalagens são feitas do mesmo material (mesma chapa). Qual delas gasta mais material para ser montada?
- b) O preço do produto na embalagem  $A$  é  $R\$ 780,00$  e na embalagem  $B$  é  $R\$ 400,00$ . Qual das opções é mais econômica para o consumidor, supondo-se as duas latas completamente cheias?

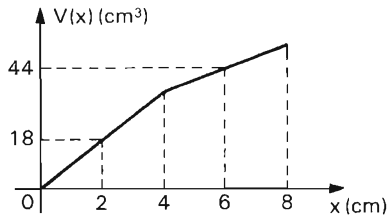
- 586.** Três canos de forma cilíndrica e de mesmo raio  $r$ , dispostos como indica a figura, devem ser colocados dentro de outro cano cilíndrico de raio  $R$ , de modo a ficarem presos sem folga. Expresse o valor de  $R$  em termos de  $r$  para que isso seja possível.



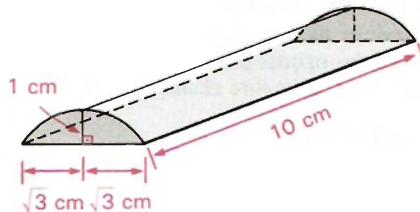
- 587.** Começando com um cilindro de raio  $l$  e altura também  $l$ , define-se o procedimento de colocar sobre um cilindro anterior um outro cilindro de igual altura e raio  $2/3$  do raio do anterior. Embora a altura do sólido fictício resultante seja infinito, seu volume pode ser calculado. Faça esse cálculo.
- 588.** Uma garrafa de vidro tem a forma de dois cilindros sobrepostos. Os cilindros têm a mesma altura  $4\text{ cm}$  e raios das bases  $R$  e  $r$ , respectivamente.



Se o volume  $V(x)$  de um líquido que atinge uma altura  $x$  da garrafa se expressa segundo o gráfico a seguir, quais os valores de  $R$  e de  $r$ ?



- 589.** O sólido da figura foi obtido seccionando um cilindro circular reto de  $10\text{ cm}$  de altura por um plano perpendicular às bases. Calcule o volume desse sólido.

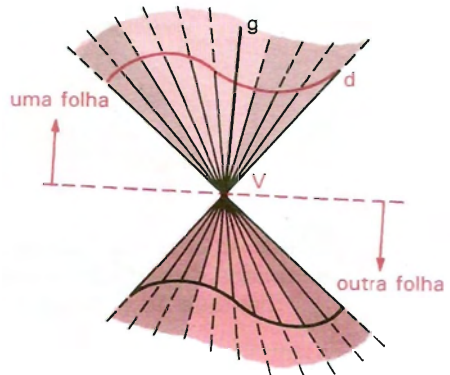


- 590.** Um sólido  $S$  está localizado entre dois planos horizontais  $\alpha$  e  $\beta$  cuja distância é  $l$  metro. Cortando o sólido por qualquer plano horizontal compreendido entre  $\alpha$  e  $\beta$  obtém-se como secção um disco de raio  $l$  metro.
- Pode-se garantir que o sólido  $S$  é um cilindro? Por quê?
  - Calcule o volume de  $S$ .

## Cone

### I. Preliminar: noções intuitivas de geração de superfícies cônicas

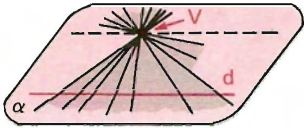
**202.** *Superfícies regradas desenvolvíveis cônicas* são superfícies geradas por uma reta  $g$  (geratriz) que passa por um ponto dado  $V$  (vértice) e percorre os pontos de uma linha dada  $d$  (diretriz), com  $V$  fora de  $d$ .



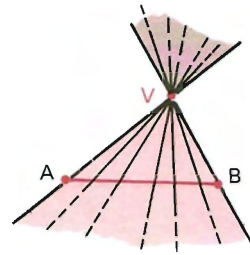
**203.** Como exemplos, temos:

- se a diretriz é uma *reta*, a superfície cônica gerada é um *plano*, menos a reta paralela à diretriz.
- se a diretriz é um *segmento de reta*, a superfície cônica gerada é a reunião de *dois ângulos* (setores angulares) opostos pelo vértice.
- se a diretriz é uma *linha poligonal fechada* (polígono) cujo plano não contém o vértice ( $V$ ), a superfície cônica gerada é a reunião de *duas superfícies* de ângulos poliédricos (superfícies poliédricas ilimitadas ou superfícies de pirâmides ilimitadas) opostas pelo vértice.

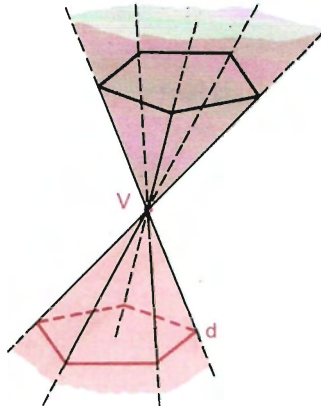
- se a diretriz é uma *circunferência* cujo plano não contém o vértice, a superfície cônica gerada é uma superfície cônica *circular* (de duas folhas).
- se a diretriz é uma *circunferência* de centro  $O$  e a reta  $VO$  é *perpendicular* a seu plano, a superfície cônica é uma superfície cônica *circular reta* (de duas folhas).



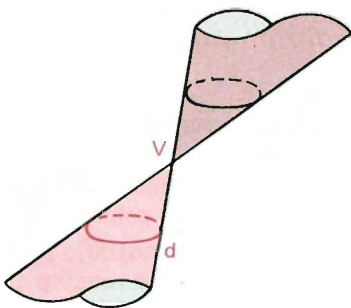
Plano, menos a paralela a  $d$  por  $V$



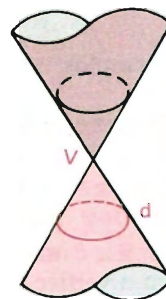
Reunião de dois ângulos opostos pelo vértice



Reunião de duas superfícies piramidais indefinidas (superfície de uma pirâmide ilimitada de segunda espécie)



Superfície cônica circular



Superfície cônica circular reta

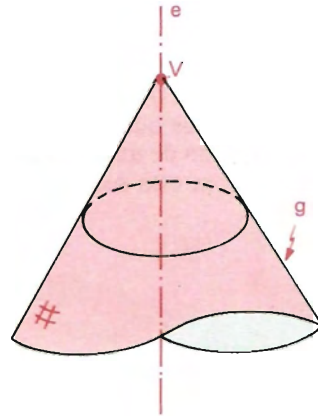
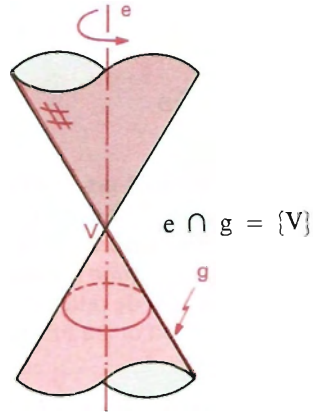


**204.** *Superfície cônica de rotação ou revolução* é uma superfície gerada pela rotação (ou revolução) de uma reta  $g$  (geratriz) em torno de uma reta  $e$  (eixo), fixa, sendo a reta  $g$  oblíqua ao eixo  $e$ . O vértice ( $V$ ) é a interseção das retas  $g$  e  $e$ .

Considera-se que cada ponto da geratriz (com exceção de  $V$ ) descreve uma circunferência com centro no eixo  $e$  e cujo plano é perpendicular ao eixo.

A superfície cônica de revolução acima citada é dita de segunda espécie. Ela possui duas folhas.

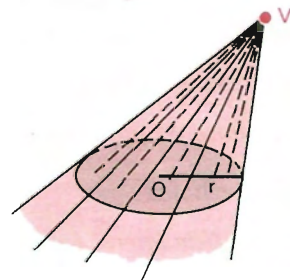
Se a geratriz é uma semi-reta ( $Vg$ ), oblíqua ao eixo ( $e$ ) e de origem ( $V$ ) nele, temos uma superfície cônica de primeira espécie. É a mais comum; possui uma folha.



**205.** *Cone circular ilimitado*

Consideremos um círculo (região circular) de centro  $O$  e raio  $r$  e um ponto  $V$  fora de seu plano.

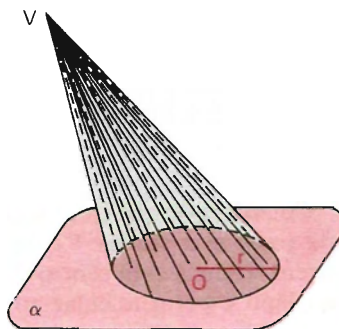
Chama-se *cone circular ilimitado* ou *cone circular indefinido* à reunião das semi-retas de origem em  $V$  e que passam pelos pontos do círculo



## II. Cone

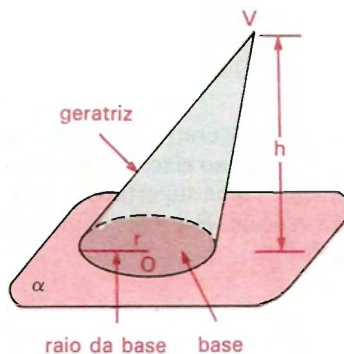
### 206. Definição

Consideremos um círculo (região circular) de centro  $O$  e raio  $r$  situado num plano  $\alpha$  e um ponto  $V$  fora de  $\alpha$ . Chama-se *cone circular* ou *cone* à reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em  $V$  e a outra nos pontos do círculo.



Podemos também definir o cone como segue.

**207.** *Cone* é a parte do cone ilimitado que contém o vértice quando se divide este cone pelo plano de uma secção circular, reunida com esta secção.



### 208. Elementos

O cone possui:

*uma base:* o círculo de centro  $O$  e raio  $r$  ou a secção citados acima.

*geratrizes:* são os segmentos com uma extremidade em  $V$  e a outra nos pontos da circunferência da base.

*vértice:* o ponto  $V$  citado acima.

$r$  é o raio da base.

**209.** A *altura* de um cone é a distância entre o vértice e o plano da base.

### 210. Superfícies

*Superfície lateral* é a reunião das geratrizes. A área dessa superfície é chamada área lateral e indicada por  $A_l$ .

*Superfície total* é a reunião da superfície lateral com o círculo da base. A área dessa superfície é chamada área total e indicada por  $A_t$ .

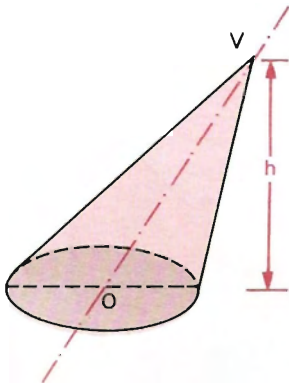
## 211. Classificação

Os cones podem ser classificados pela posição da reta  $VO$  em relação ao plano da base:

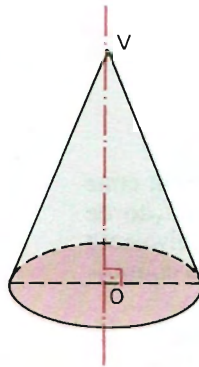
Se a reta  $VO$  é oblíqua ao plano da base, temos um *cone circular oblíquo*.

Se a reta  $VO$  é perpendicular ao plano da base, temos um *cone circular reto*.

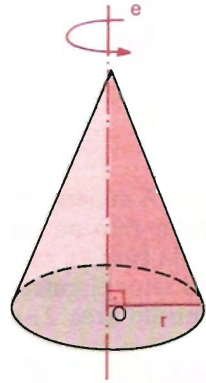
O *cone circular reto* é também chamado *cone de revolução*, pois é gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um de seus catetos.



Cone oblíquo



Cone reto



Cone de revolução

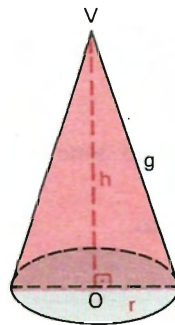
O *eixo* de um cone é a reta determinada pelo vértice e pelo centro da base.

A geratriz de um cone circular reto é também dita *apótema* do cone.

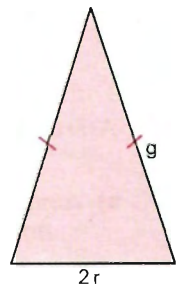
## 212. Secção meridiana

É a interseção do cone com um plano que contém a reta  $VO$ .

A secção meridiana de um cone circular reto ou cone de revolução é um triângulo isósceles.



Cone reto



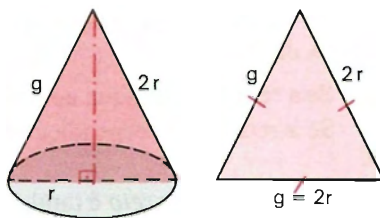
Secção meridiana

### 213. Cone equilátero

É um cone cuja secção meridiana é um triângulo equilátero.

$$g = 2r$$

$$h = r\sqrt{3}$$

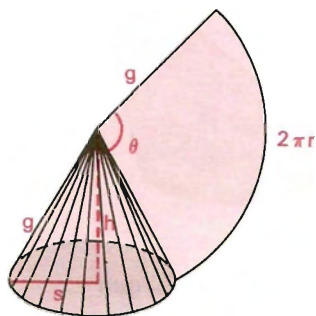


## III. Áreas lateral e total

### 214.

A superfície lateral de um cone circular reto ou cone de revolução de raio da base  $r$  e geratriz  $g$  é equivalente a um setor circular de raio  $g$  e comprimento do arco  $2\pi r$ .

Isso significa que a superfície lateral de um cone de revolução desenvolvida num plano (planificada) é um setor circular cujo raio é  $g$  (geratriz) e comprimento do arco  $2\pi r$ .



Sendo  $\theta$  o ângulo do setor, este ângulo é dado por:

$$\theta = \frac{2\pi r}{g} \text{ rad} \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{360r}{g} \text{ graus.}$$

**215.** A área lateral do cone pode então ser calculada como segue:

a) comprimento	área do		
do arco	setor		
$2\pi g$	_____	$\pi g^2$	
$2\pi r$	_____	$A_l$	

$$\Rightarrow A_l = \frac{2\pi r \cdot \pi g^2}{2\pi g} \Rightarrow A_l = \pi r g$$

- b) A área de um setor circular é dada pela fórmula da área de um triângulo:

$$A_{\text{setor}} = \frac{1}{2} (\text{comprimento do arco}) \cdot (\text{raio})$$

Assim,

$$A_l = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot g \Rightarrow \boxed{A_l = \pi r g}$$

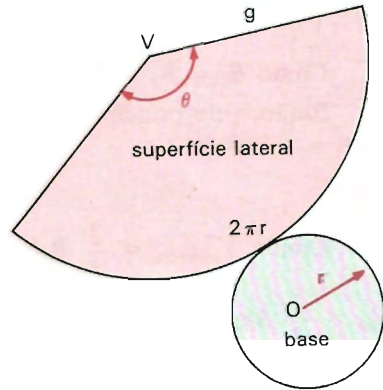
**Nota:** A dedução mais rigorosa desta fórmula encontra-se no final do capítulo XII, no item 232.

## 216. Área total

A área total de um cone é a soma da área lateral ( $A_l$ ) com a área da base ( $B = \pi r^2$ ); logo:

$$A_t = A_l + B \Rightarrow A_t = \pi r g + \pi r^2 \Rightarrow$$

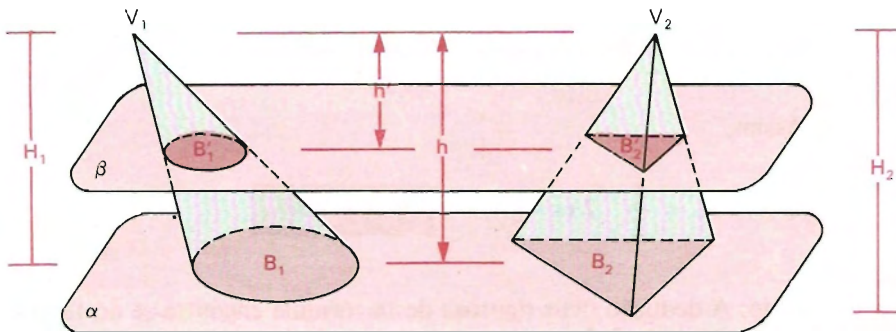
$$\Rightarrow \boxed{A_t = \pi r (g + r)}$$



## IV. Volume do cone

- 217.** Consideremos um cone de altura  $H_1 = h$  e área da base  $B_1 = B$  e um tetraedro de altura  $H_2 = h$  e área da base  $B_2 = B$  (o cone e a pirâmide têm alturas congruentes e bases equivalentes).

Suponhamos que os dois sólidos têm as bases num mesmo plano  $\alpha$  e que os vértices estão num mesmo semi-espaco dos determinados por  $\alpha$ .



Qualquer plano secante  $\beta$  paralelo a  $\alpha$ , distando  $h'$  dos vértices que seccionam o cone, também secciona o tetraedro, e sendo as áreas das secções  $B_1'$  e  $B_2'$ , respectivamente, temos:

$$\left( \frac{B_1'}{B_1} = \left( \frac{h'}{h} \right)^2, \frac{B_2'}{B_2} = \left( \frac{h'}{h} \right)^2 \right) \implies \frac{B_1'}{B_1} = \frac{B_2'}{B_2}.$$

Como  $B_1 = B_2 = B$ , vem que  $B_1' = B_2'$ .

Então, pelo princípio de Cavalieri, o cone e o tetraedro têm volumes iguais.

$$V_{\text{cone}} = V_{\text{tetraedro}}$$

Como  $V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{3} B_2 h$ , ou seja,  $V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{3} B \cdot h$ , vem que

$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} B h$ ; ou resumidamente:

$$V = \frac{1}{3} B h.$$

**Conclusão:**

O volume de um cone é *um terço* do produto da área da base pela medida da *altura*.

Se  $B = \pi r^2$ , temos:  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

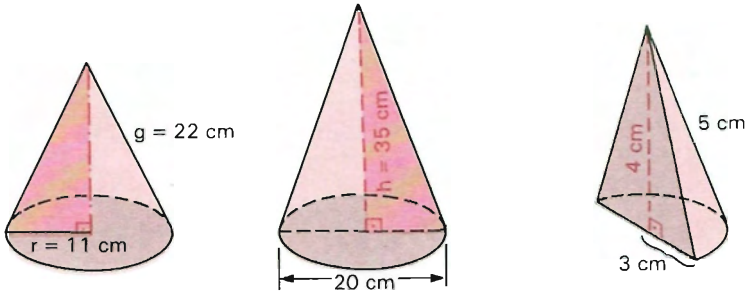
## EXERCÍCIOS

**591.** Calcule a área lateral, a área total e o volume dos cones cujas medidas estão indicadas nas figuras abaixo.

a) cone equilátero

b) cone reto

c) semicone

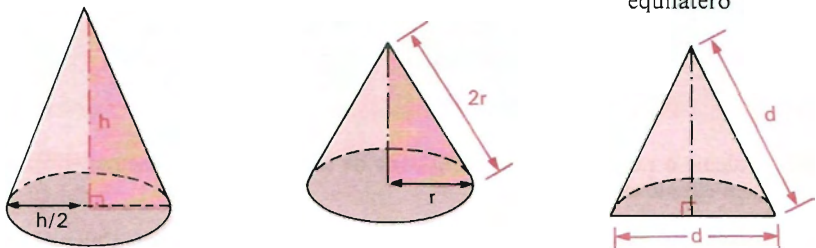


**592.** Represente através de expressões algébricas a área lateral, a área total e o volume dos sólidos cujas medidas estão indicadas nas figuras abaixo.

a) cone reto

b) cone equilátero

c) semicone equilátero



**593.** Determine a medida da altura de um cone cuja geratriz mede  $10\text{ cm}$ , sendo  $12\text{ cm}$  o diâmetro de sua base.

**594.** Determine a medida do diâmetro da base de um cone de revolução cuja geratriz mede  $65\text{ cm}$ , sendo  $56\text{ cm}$  a altura do cone.

**595.** Calcule a medida da altura de um cone de raio  $r$ , sabendo que sua base é equivalente à seção meridiana.

**596.** Determine a medida do raio da base de um cone de revolução cuja altura mede  $3\text{ cm}$  e cujo volume é  $9\pi\text{ cm}^3$ .

**597.** Determine a medida do raio da base de um cone de revolução de altura  $3\text{ cm}$ , sendo  $16\pi\text{ cm}^3$  o seu volume.

**598.** Um cone equilátero tem raio da base  $r$ . Calcule:

- a) a área lateral;
- b) a medida em radianos do ângulo do setor circular equivalente à superfície lateral;
- c) a área total;
- d) o volume.

**Solução**

Notemos que  $g = 2r$  e

$$h = 2r \frac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}.$$

1º) Área lateral

$$A_l = \pi r g \Rightarrow A_l = 2\pi r^2$$

2º) Ângulo do setor circular

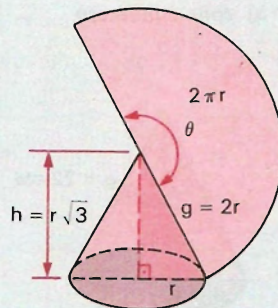
$$\theta = \frac{2\pi r}{g} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi r}{2r} \Rightarrow \theta = \pi \text{ rad}$$

3º) Área total

$$A_t = A_l + B \Rightarrow A_t = 2\pi r^2 + \pi r^2 \Rightarrow A_t = 3\pi r^2$$

4º) Volume

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi r^3$$



**599.** Calcule o raio e a altura de um cone de revolução cujo desenvolvimento é um semicírculo de raio  $a$ .

**600.** A geratriz de um cone mede  $14 \text{ cm}$  e a área da base  $80 \pi \text{ cm}^2$ . Calcule a medida da altura do cone.

**601.** Determine a medida da área lateral de um cone equilátero, sendo  $20 \text{ cm}$  a medida da sua geratriz.

**602.** Determine a área total de um cone, cuja secção meridiana é um triângulo equilátero de  $8 \text{ dm}$  de lado.

**603.** Determine a medida da área lateral e da área total de um cone de revolução, sabendo que sua altura mede  $12 \text{ cm}$  e sua geratriz  $13 \text{ cm}$ .

**604.** Determine a medida da altura de um cone equilátero cuja área total mede  $54 \pi \text{ cm}^2$ .



- 605.** Calcule a área total e o volume de um cone equilátero, sabendo que a área lateral é igual a  $24 \pi \text{ cm}^2$ .
- 606.** Determine a área lateral de um cone cujo raio da base mede  $5 \text{ cm}$ , sendo  $60^\circ$  o ângulo que a geratriz forma com a base do cone.
- 607.** Determine a área total de um cone cuja altura mede  $12 \text{ cm}$  e forma um ângulo de  $45^\circ$  com a geratriz.
- 608.** O raio da base de um cone mede  $12 \text{ cm}$ . Sabendo que a altura forma um ângulo de  $60^\circ$  com a geratriz do cone, determine sua área lateral.
- 609.** A geratriz de um cone de revolução forma com o eixo do cone um ângulo de  $45^\circ$ . Sendo  $A$  a área da secção meridiana do cone, calcule sua área total.
- 610.** A planificação da superfície lateral de um cone de revolução é um setor circular de  $90^\circ$ . Calcule a razão entre o raio da base do cone e a geratriz do cone.

**Solução**

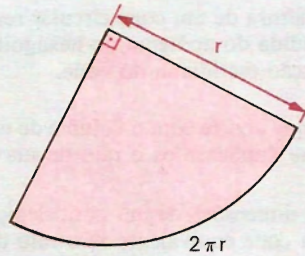
Ângulo do setor circular:

$$\theta = \frac{360r}{g} \text{ graus} = \frac{r}{g} 360^\circ.$$

Razão entre o raio da base do cone e a geratriz:

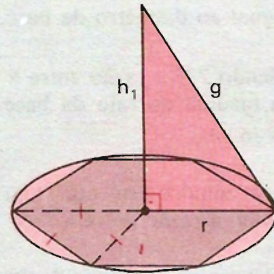
$$\frac{r}{g} = \frac{\theta}{360} = \frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}$$

Resposta: A razão entre o raio da base e a geratriz do cone é  $\frac{1}{4}$ .



- 611.** Determine a razão entre o raio da base e a geratriz de um cone de revolução, sabendo que o desenvolvimento da superfície lateral do cone é um setor circular cujo ângulo mede  $60^\circ$ .
- 612.** Determine a altura de um cone, sabendo que o desenvolvimento de sua superfície lateral é um setor circular de  $135^\circ$  e raio igual a  $10 \text{ cm}$ .
- 613.** Determine o ângulo central de um setor circular obtido pelo desenvolvimento da superfície lateral de um cone cuja geratriz mede  $18 \text{ cm}$  e o raio da base  $3 \text{ cm}$ .
- 614.** Determine a medida do ângulo do setor circular resultante do desenvolvimento sobre um plano da superfície lateral de um cone cuja altura e cujo raio estão na razão  $3/4$ .

- 615.** A área da base de um cone de revolução é  $1/3$  da área total. Calcule o ângulo do setor circular que é o desenvolvimento da superfície lateral do cone.
- 616.** O diâmetro da base de um cone circular reto mede  $3\text{ m}$  e a área da base é  $2/5$  da área total. Calcule o ângulo do setor circular que é o desenvolvimento da superfície lateral do cone.
- 617.** Determine a área total de um cone, sendo  $40\text{ cm}$  o diâmetro de sua base e  $420\text{ cm}^2$  a área de sua secção meridiana.
- 618.** Determine a superfície lateral de um cone cuja área da base mede  $6,25\pi\text{ cm}^2$ , sendo  $4\text{ cm}$  a medida da sua altura.
- 619.** Um cone tem  $8\text{ cm}$  de altura e  $15\text{ cm}$  de raio. Outro cone tem  $15\text{ cm}$  de altura e  $8\text{ cm}$  de raio. Quanto a área lateral do primeiro excede a área lateral do segundo?
- 620.** Determine a medida da altura de um cone, sendo  $42\text{ cm}$  o diâmetro da base e  $1050\pi\text{ cm}^2$  sua área total.
- 621.** A altura de um cone circular reto cujo raio da base mede  $r$  é  $\pi r$ . Sendo  $3\text{ cm}$  a medida do apótema do hexágono regular inscrito na base, determine a área da secção meridiana do cone.
- 622.** O que ocorre com o volume de um cone de revolução se duplicarmos sua altura? E se duplicarmos o raio de sua base?
- 623.** As dimensões de um paralelepípedo retângulo são  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Qual é a altura de um cone equivalente se o raio da base do cone mede  $a$ ?
- 624.** O volume de um cilindro reto é  $1225\pi\text{ cm}^3$  e sua altura é  $35\text{ cm}$ . Determine o volume de um cone de revolução, sendo sua base a mesma do cilindro e sua geratriz a geratriz do cilindro.
- 625.** Determine o volume de um cone de revolução cuja secção meridiana é um triângulo isósceles de área  $4,8\text{ dm}^2$ , sendo  $3\text{ dm}$  a altura do cone.
- 626.** Determine a área lateral de um cone, sendo  $3\text{ cm}$  sua altura e  $5\text{ cm}$  a soma da medida da geratriz com o raio da base.
- 627.** Determine a geratriz do cone de revolução, sabendo que a área da base é equivalente à secção meridiana do cone e que a altura desse cone mede  $9\pi\text{ cm}$ .
- 628.** O volume de um cone de revolução é  $128\pi\text{ cm}^3$ , sendo  $8\text{ cm}$  o lado do hexágono inscrito em sua base. Determine a relação entre a área total do cone e a área total de um cilindro que tenha o mesmo volume e a mesma base do cone. Calcule ainda a medida do ângulo do setor circular obtido do desenvolvimento da superfície lateral do cone.

**Solução** $r =$  raio da base comum $h_1 =$  altura do cone $h_2 =$  altura do cilindroDados:  $r = 8$     $V_{\text{cone}} = V_{\text{cil}} = 128 \pi$ .

1º) Relação entre as áreas totais

$$V_{\text{cone}} = 128 \pi \Rightarrow \frac{1}{3} \pi \cdot 8^2 \cdot h_1 = 128 \pi \Rightarrow h_1 = 6$$

$$(r = 8, h_1 = 6, g^2 = r^2 + h_1^2) \Rightarrow g^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow g = 10$$

$$A_{t_{\text{cone}}} = \pi r g + \pi r^2 \Rightarrow A_{t_{\text{cone}}} = \pi \cdot 8^2 + \pi \cdot 8 \cdot 10 \Rightarrow A_{t_{\text{cone}}} = 144 \pi$$

$$V_{t_{\text{cil}}} = 128 \pi \Rightarrow \pi r^2 h_2 = 128 \pi \Rightarrow \pi \cdot 8^2 \cdot h_2 = 128 \pi \Rightarrow h_2 = 2$$

$$A_{t_{\text{cil}}} = 2 \pi r h_2 + 2 \pi r^2 \Rightarrow A_{t_{\text{cil}}} = 2 \pi \cdot 8 \cdot 2 + 2 \cdot \pi \cdot 8^2 \Rightarrow A_{t_{\text{cil}}} = 160 \pi$$

$$\frac{A_{t_{\text{cone}}}}{A_{t_{\text{cil}}}} = \frac{144 \pi}{160 \pi} \Rightarrow \frac{A_{t_{\text{cone}}}}{A_{t_{\text{cil}}}} = \frac{9}{10}$$

2º) Ângulo do setor

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi \cdot g \text{ --- } 360^\circ \\ 2\pi \cdot r \text{ --- } \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2\pi \cdot 10 \text{ --- } 360^\circ \\ 2\pi \cdot 8 \text{ --- } \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = 288^\circ$$

- 629.** Com um setor circular de  $120^\circ$  e raio  $R$ , construímos um cone. Calcule a área total e o volume do cone.
- 630.** Determine o ângulo central de um setor obtido pelo desenvolvimento da superfície lateral de um cone cujo raio da base mede  $1 \text{ cm}$  e cuja altura é  $3 \text{ cm}$ .
- 631.** Um cone circular reto tem  $24 \text{ cm}$  de altura e  $7 \text{ cm}$  de raio. Calcule em radianos a medida do ângulo do setor circular que se obtém pelo desenvolvimento da superfície lateral do cone.
- 632.** Um cone circular reto de altura  $h = 3 \text{ m}$  tem área lateral igual a  $6 \pi \text{ m}^2$ . Determine o ângulo que a geratriz  $g$  faz com a reta suporte da altura  $h$ .
- 633.** Um cilindro e um cone têm mesmo volume e igual altura  $h$ . Determine o raio do cilindro em função do raio  $r$  da base do cone.
- 634.** Calcule a altura, a área lateral e o volume de um cone de revolução de raio  $R$  e base equivalente à seção meridiana.

- 635.** Determine a razão entre a base e a superfície lateral de um cone que tem altura igual ao diâmetro da base.
- 636.** Sendo  $7/5$  a razão entre a área lateral e a área da base de um cone, determine a medida do raio da base e da geratriz, sabendo que a altura do cone mede  $4\sqrt{6}$  cm.
- 637.** Um cilindro e um cone têm altura  $h$  e raio da base  $r$ . Sendo  $r$  o dobro de  $h$ , determine a razão entre a área lateral do cilindro e a área lateral do cone.
- 638.** Determine o volume de um cone cujo raio da base mede  $r$ , sendo  $3r$  a soma das medidas da geratriz com a altura do cone.
- 639.** Calcule o raio da base de um cone de revolução, conhecendo sua área total  $\pi a^2$  e sua geratriz  $g$ .
- 640.** Determine o volume de um cone de revolução cuja área lateral é igual a  $A$ , sabendo que a geratriz do cone é igual a  $4/5$  do diâmetro da base do cone.
- 641.** Determine o volume de um cone de revolução, sendo  $126 \pi \text{ cm}^2$  sua área lateral e  $200 \pi \text{ cm}^2$  sua área total.
- 642.** Calcule o volume de um cone equilátero em função de sua área total  $S$ .
- 643.** O raio da base, a altura e a geratriz de um cone reto formam, nessa ordem, uma progressão aritmética. Determine esses elementos, sabendo que o volume do cone é  $144 \pi \text{ cm}^3$ .
- 644.** Desenvolvendo a superfície lateral de um cone reto, obtém-se um setor circular de raio  $10$  cm e ângulo central  $135^\circ$ . Calcule o volume desse cone.
- 645.** Um semicone reto tem altura igual ao raio e o volume é  $576 \pi \text{ cm}^3$ . Calcule a área lateral do semicone.
- 646.** A geratriz de um cone de revolução mede  $25$  cm e a diagonal menor do hexágono regular inscrito na base do cone mede  $7\sqrt{3}$  cm. Determine a área total e o volume do cone.
- 647.** Determine o volume de um cone de revolução cuja área lateral é  $60 \pi \text{ cm}^2$ , sendo  $4,8$  cm a distância do centro da base à geratriz do cone.
- 648.** O diâmetro da base de um cone mede os  $3/5$  da sua altura e a área lateral é  $100 \text{ dm}^2$ . Calcule a medida da geratriz do cone.
- 649.** Demonstre que o volume de um cone é igual ao produto da sua área lateral pela terça parte da distância do centro de sua base à geratriz do cone.

- 650.** Um sólido é formado pela superposição de cone sobre um cilindro de raio da base  $r$ . Sendo a altura do sólido o triplo do raio  $r$  e a área lateral do sólido o quintuplo da área da base do cilindro, calcule o volume do sólido em função de  $r$ .
- 651.** Um semicone tem área lateral igual a  $(\sqrt{2}\pi + 2) \text{ cm}^2$ . Determine a medida da sua geratriz, sabendo que o raio da base tem medida igual à altura do semicone.
- 652.** Determine a medida do raio da base e da geratriz de um cone, sendo  $h$  a medida de sua altura e  $\pi \text{ m}^2$  sua área total.
- 653.** Calcule o volume de um cone de revolução, conhecendo a área lateral  $A$  e o apótema  $g$ .
- 654.** Calcule o volume de um cone de revolução, conhecendo a área total  $S$  e a altura  $h$ .
- 655.** Calcule o volume  $V$  de um cone de revolução em função de sua área lateral  $A$  e de sua área total  $S$ .
- 656.** Determine o volume de um cone de revolução, conhecendo o raio da base  $r$  e sua área total  $S$ .
- 657.** Entre o volume  $V$ , a área lateral  $A$  e a área total  $S$  de um cone de revolução, tem-se:  

$$9\pi V^2 = S(S - A)(2A - S).$$
- 658.** São dados um cone e um cilindro de revolução. Esses sólidos têm a mesma altura e são equivalentes. A área lateral do cilindro é igual à área total do cone. Exprima o volume do cone em função do seu raio  $R$ .

### Solução

Elementos:

do cilindro:  $r, h$

do cone:  $R$  (dado),  $h, g$

$$V_{\text{cil}} = V_{\text{cone}} \Rightarrow \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi R^2 h \Rightarrow r = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

$$A_{\text{cil}} = A_{\text{cone}} \Rightarrow 2\pi r h = \pi R g + \pi R^2 \Rightarrow 2r h = R g + R^2$$

Substituindo  $r$  e considerando  $g = \sqrt{h^2 + R^2}$ , temos:

$$\frac{2R\sqrt{3}}{3} h = R\sqrt{h^2 + R^2} + R^2 \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3} h - R = \sqrt{h^2 + R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{12}{9} h^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3} h R + R^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow \frac{h}{3} (h - 4\sqrt{3} R) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 4\sqrt{3} R \text{ ou } h = 0 \text{ (não convém).}$$

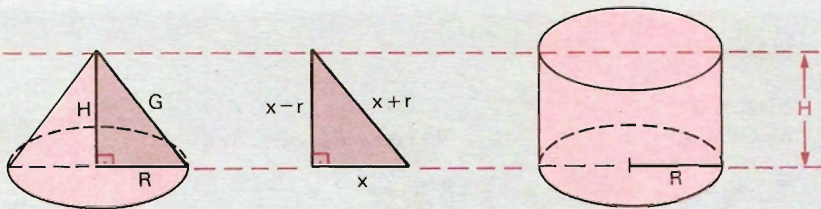
Calculando o volume do cone, vem:

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h \Rightarrow V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot 4\sqrt{3} R \Rightarrow V_{\text{cone}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \pi R^3.$$

Resposta:  $V_{\text{cone}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \pi R^3.$

- 659.** O raio da base, a altura e o apótema (geratriz) de um cone reto formam, nessa ordem, uma progressão aritmética. Determine esses elementos, sendo  $37,68 \text{ cm}^3$  o volume do cone. Adote  $\pi = 3,14$ .
- 660.** Quanto se deve aumentar a altura e diminuir o raio da base de um cone de revolução para que seu volume permaneça constante?
- 661.** Dado um cone circular reto e um cilindro circular reto de mesma altura e mesma base, mostre que a área lateral do cilindro é menor que 2 vezes a área lateral do cone.
- 662.** Pediu-se para calcular o volume de um cone circular reto, sabendo-se que as dimensões da geratriz, do raio da base e da altura estão, nessa ordem, em progressão aritmética. Por engano, ao se calcular o volume do cone, usou-se a fórmula do volume do cilindro circular reto de mesmo raio e de mesma altura do cone. O erro obtido foi de  $4 \pi \text{ m}^3$ . Dê a altura e o raio do cone.

**Solução**



$G, R$  e  $H$  em P.A.  $\Rightarrow (G = x + r, R = x, H = x - r)$   
em que  $r$  é a razão (positiva) e  $x$  é o termo médio da P.A.

Do triângulo retângulo, temos:

$$x^2 + (x - r)^2 = (x + r)^2 \Rightarrow x^2 - 4xr = 0 \Rightarrow x(x - 4r) = 0 \Rightarrow x = 4r \text{ ou } x = 0 \text{ (não convém)}$$

As dimensões são  $G = 5r, R = 4r$  e  $H = 3r$ .

$$\text{erro} = BH - \frac{1}{3} BH = \frac{2}{3} BH \Rightarrow \frac{2}{3} BH = 4\pi$$

Substituindo  $B = \pi R^2 = \pi(4r)^2$  e  $H = 3r$ , vem:

$$\frac{2}{3} \pi \cdot 16r^2 \cdot 3r = 4\pi \Rightarrow r^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{2}.$$

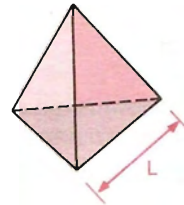
Calculando a altura  $H$  e o raio:

$$H = 3r \Rightarrow H = \frac{3}{2} \qquad R = 4r \Rightarrow R = 2$$

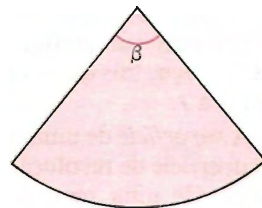
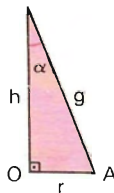
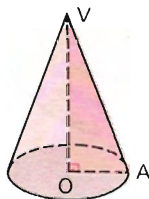
Respostas:  $H = \frac{3}{2} m$  e  $R = 2 m$ .

- 663.** No cálculo do volume de um cone reto, o calculista se enganou, trocando as medidas do raio e da altura. O volume do cone aumentou ou diminuiu? Discuta.
- 664.** A base de um cone reto é equivalente à secção meridiana. Se o raio da base mede  $1 m$ , calcule a altura do cone.
- 665.** Um cone circular tem raio  $2 m$  e altura  $4 m$ . Qual é a área da secção transversal, feita por um plano, distante  $1 m$  do seu vértice?

**666.** Dado um tetraedro regular de aresta  $L$ :



- a) Determine, em função de  $L$ , o volume  $V$  do cone circular circunscrito, isto é, do cone que tem vértice num vértice do tetraedro e base circunscrita à face oposta do tetraedro.
- b) Determine, em função de  $L$ , a área lateral  $A$  do cilindro circular reto circunscrito, isto é, do cilindro que tem uma base circunscrevendo uma face do tetraedro e altura igual à altura do tetraedro.
- 667.** A geratriz de um cone reto forma um ângulo  $\alpha$  com o plano da base. Sendo  $V$  o volume do cone, determine o raio da base e a altura do cone.
- 668.** As figuras abaixo representam um cone de revolução, seus elementos e a planificação de sua superfície lateral.



Expresse  $\beta$  em função de  $\alpha$ .

## CAPÍTULO XII

# Esfera

### I. Definições

#### 218. Esfera

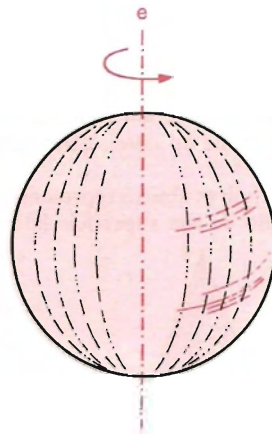
Consideremos um ponto  $O$  e um segmento de medida  $r$ . Chama-se *esfera* de centro  $O$  e raio  $r$  ao conjunto dos pontos  $P$  do espaço, tais que a distância  $\overline{OP}$  seja menor ou igual a  $r$ .

A esfera é também o sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.

#### 219. Superfície

Chama-se *superfície* da esfera de centro  $O$  e raio  $r$  ao conjunto dos pontos  $P$  do espaço, tais que a distância  $OP$  seja igual a  $r$ .

A *superfície* de uma esfera é também a superfície de revolução gerada pela rotação de uma semicircunferência com extremidades no eixo.





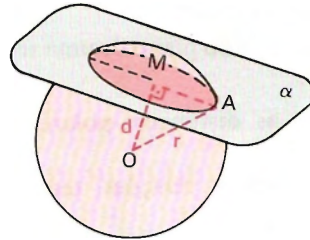
## 220. Secção

Toda secção plana de uma esfera é um círculo.

Se o plano secante passa pelo centro da esfera, temos como secção um *círculo máximo* da esfera.

Sendo  $r$  o raio da esfera,  $d$  a distância do plano secante ao centro e  $s$  o raio da secção, vale a relação:

$$s^2 = r^2 - d^2.$$



Teorema de Pitágoras no  $\triangle OMA$ :

$$r^2 = d^2 + s^2.$$

## 221. Elementos: pólos — equador — paralelo — meridiano

Pólos relativos a uma secção da esfera são as extremidades do diâmetro perpendicular ao plano dessa secção.

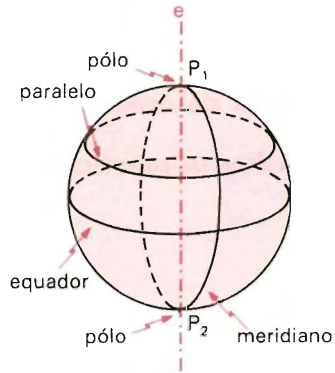
Considerando a superfície de uma esfera de eixo  $e$ , temos:

*pólos*: são as interseções da superfície com o eixo.

*equador*: é a secção (circunferência) perpendicular ao eixo, pelo centro da superfície.

*paralelo*: é uma secção (circunferência) perpendicular ao eixo. É “paralela” ao equador.

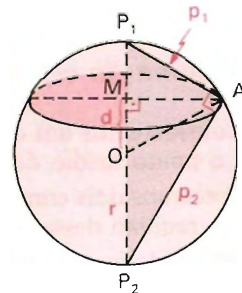
*meridiano*: é uma secção (circunferência) cujo plano passa pelo eixo.



## 222. Distância polar

*Distância polar* é a distância de um ponto qualquer de um paralelo ao pólo.

Um ponto  $A$  da superfície de uma esfera tem duas distâncias polares:  $P_1 A$  e  $P_2 A$ .



Sendo:

$r$  o raio da esfera,

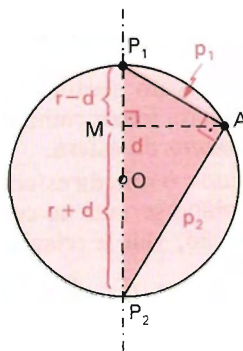
$d$  a distância do plano de uma secção ao centro,

$p_1$  e  $p_2$  as distâncias polares de um ponto  $A$ .

Usando relações métricas no  $\triangle P_1 A P_2$ , temos:

$$(AP_1)^2 = (P_1 P_2) \cdot (P_1 M) \Rightarrow p_1^2 = 2r(r - d)$$

$$(AP_2)^2 = (P_1 P_2) \cdot (P_2 M) \Rightarrow p_2^2 = 2r(r + d)$$



## II. Área e volume

### 223. Área da esfera

A área da superfície de uma esfera de raio  $r$  é igual a  $4\pi r^2$ .

$$A = 4\pi r^2$$

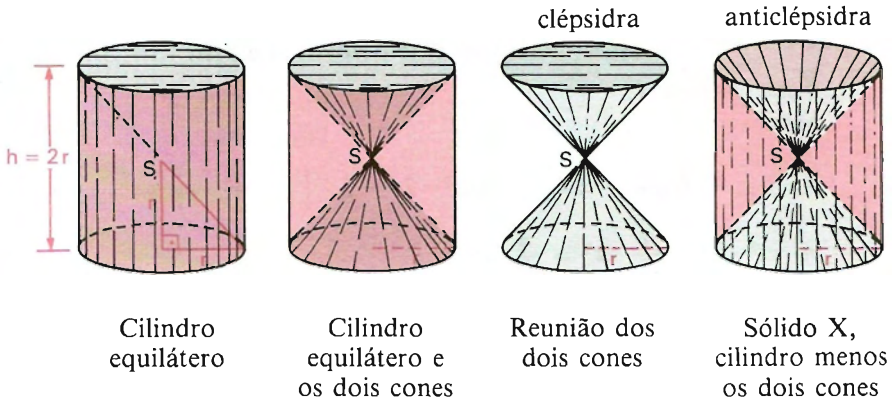
A dedução desta fórmula encontra-se no final deste capítulo, no item 231.

### 224. Volume da esfera

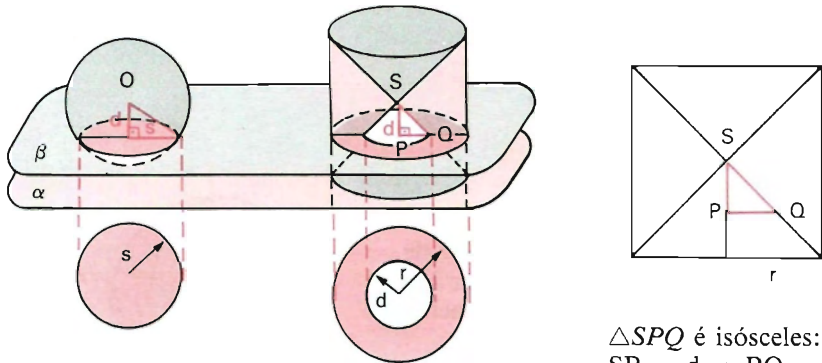
Consideremos um cilindro equilátero de raio da base  $r$  (a altura é  $2r$ ) e seja  $S$  o ponto médio do eixo do cilindro.

Tomemos dois cones tendo como bases as do cilindro e  $S$  como vértice comum (a reunião desses dois cones é um sólido chamado *clépsidra*).

Ao sólido que está dentro do cilindro e fora dos dois cones vamos chamar de sólido  $X$  (este sólido  $X$  é chamado *anticlépsidra*).



Consideremos agora uma esfera de raio  $r$  e o sólido  $X$  descrito acima.



$\triangle SPQ$  é isósceles:  
 $SP = d \Rightarrow PQ = d$ .

Suponhamos que a esfera seja tangente a um plano  $\alpha$ , que o cilindro (que originou o sólido  $X$ ) tenha base em  $\alpha$  e que os dois sólidos, esfera e sólido  $X$ , estejam num mesmo semi-espaço dos determinados por  $\alpha$ .

Qualquer plano secante  $\beta$ , paralelo a  $\alpha$ , distando  $d$  do centro da esfera (e do vértice do sólido  $X$ ), também secciona o sólido  $X$ . Temos:

Área da secção na esfera =  $\pi s^2 = \pi(r^2 - d^2)$   
 (círculo)

Área da secção no sólido  $X$  =  $\pi r^2 - \pi d^2 = \pi(r^2 - d^2)$   
 (coroa circular)

As áreas das secções na esfera e no sólido  $X$  são iguais; então, pelo princípio de Cavalieri, a esfera e o sólido  $X$  têm volumes iguais.

$$V_{\text{esfera}} = V_{\text{sólido } X}$$

Mas:

$$\begin{aligned} V_{\text{sólido } X} &= V_{\text{cilindro}} - 2V_{\text{cone}} = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \left( \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r \right) = \\ &= \pi r^2 \cdot 2r - \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

Ou seja:  $V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3$ .

*Conclusão:* O volume de uma esfera de raio  $r$  é  $\frac{4}{3} \pi r^3$

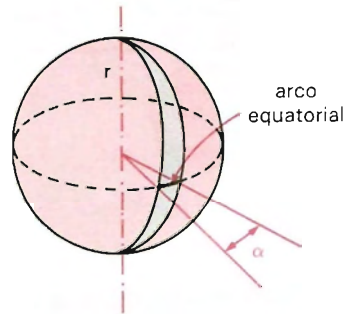
$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

### III. Fuso e cunha

#### 225. Fuso esférico

É a intersecção da *superfície* de uma esfera com um diedro (ou setor diedral) cuja aresta contém um diâmetro dessa superfície esférica.

O ângulo  $\alpha$ , medida do diedro, medido na secção equatorial, é o que caracteriza o fuso.



#### 226. Área do fuso

Sendo  $\alpha$  a medida do diedro, temos:

a) com  $\alpha$  em graus

$$\left. \begin{array}{l} 360^\circ \text{ — } 4\pi r^2 \\ \alpha^\circ \text{ — } A_{\text{fuso}} \end{array} \right\} \Rightarrow A_{\text{fuso}} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90}$$

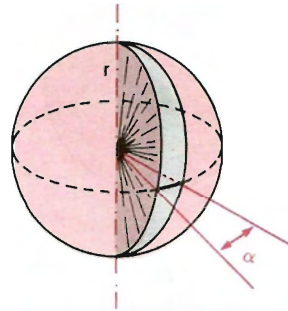
b) com  $\alpha$  em radianos

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi \text{ — } 4\pi r^2 \\ \alpha \text{ — } A_{\text{fuso}} \end{array} \right\} \Rightarrow A_{\text{fuso}} = 2r^2\alpha$$

### 227. Cunha esférica

É a interseção de uma esfera com um *diedro* (ou setor diedral) cuja aresta contém o diâmetro da esfera.

A cunha é caracterizada pelo raio da esfera e pela medida do diedro.



### 228. Volume da cunha

Sendo  $\alpha$  a medida do diedro, temos:

a) com  $\alpha$  em graus:

$$\left. \begin{array}{l} 360^\circ \text{ — } \frac{4}{3} \pi r^3 \\ \alpha^\circ \text{ — } V_{\text{cunha}} \end{array} \right\} \Rightarrow V_{\text{cunha}} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270}$$

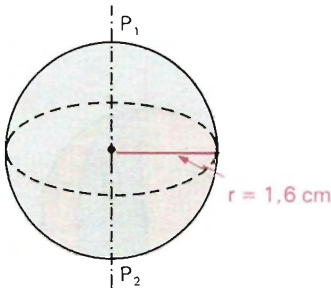
b) com  $\alpha$  em radianos:

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi \text{ — } \frac{4}{3} \pi r^3 \\ \alpha \text{ — } V_{\text{cunha}} \end{array} \right\} \Rightarrow V_{\text{cunha}} = \frac{2r^3 \alpha}{3}$$

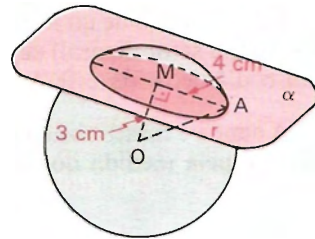
# EXERCÍCIOS

**669.** Calcule a área e o volume das esferas, cujas medidas estão indicadas abaixo.

a)



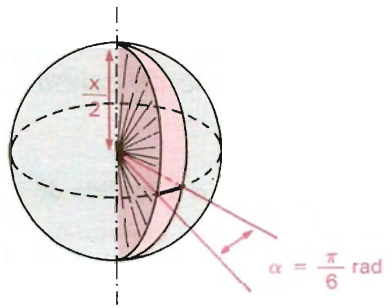
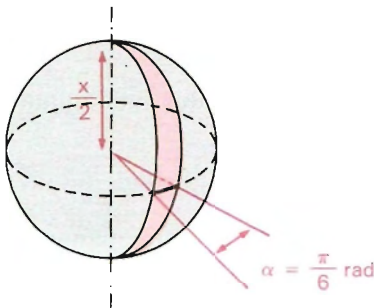
b)



**670.** Represente, nas esferas abaixo, através de expressões algébricas:

a) a área do fuso

b) a área total e o volume da cunha



**671.** Obtenha o raio de uma esfera, sabendo que um plano determina na esfera um círculo de raio  $20\text{ cm}$ , sendo  $21\text{ cm}$  a distância do plano ao centro da esfera.

**672.** O raio de uma esfera mede  $53\text{ cm}$ . Um plano que secciona essa esfera determina nela um círculo de raio  $45\text{ cm}$ . Obtenha a distância do plano ao centro da esfera.

**673.** Um plano secciona uma esfera de  $34\text{ cm}$  de diâmetro. Determine o raio da secção obtida, sendo  $8\text{ cm}$  a distância do plano ao centro da esfera.

**674.** Determine o diâmetro de um círculo cuja área é igual à superfície de uma esfera de raio  $r$ .

- 675.** Determine o raio de uma esfera de superfície  $36 \pi \text{ cm}^2$ .
- 676.** Determine a área do círculo da esfera cujas distâncias polares são de  $5 \text{ cm}$  e  $3 \text{ cm}$ .

### Solução

Seja  $r$  o raio da secção e  $d$  o diâmetro da esfera, vem:

$$d^2 = 5^2 + 3^2 \Rightarrow d = \sqrt{34}.$$

Relações métricas ( $ah = bc$ ) no  $\triangle P_1AP_2$  retângulo em  $A$ :

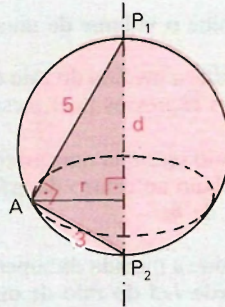
$$d \cdot r = 5 \cdot 3 \Rightarrow \sqrt{34} \cdot r = 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{15}{\sqrt{34}}$$

Área da secção:  $S$ .

$$S = \pi r^2 \Rightarrow S = \pi \left( \frac{15}{\sqrt{34}} \right)^2 \Rightarrow S = \frac{225\pi}{34}$$

Resposta: A área do círculo é  $\frac{225\pi}{34} \text{ cm}^2$ .

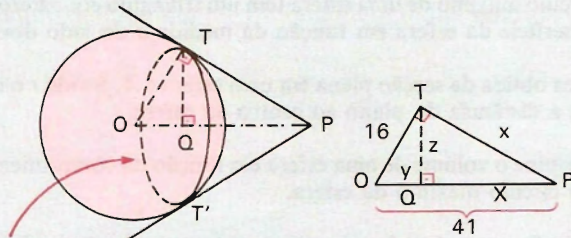


- 677.** Calcule a área de uma secção plana feita a uma distância de  $12 \text{ cm}$  do centro de uma esfera de  $37 \text{ cm}$  de raio.
- 678.** A secção plana de uma esfera feita a  $35 \text{ cm}$  do centro tem  $144 \pi \text{ cm}^2$  de área. Calcule a área do círculo máximo dessa esfera.
- 679.** Calcule a distância de uma secção plana de uma esfera ao centro da esfera, sabendo que o círculo máximo tem área igual ao quádruplo da área determinada pela secção plana e que o raio da esfera mede  $17 \text{ cm}$ .
- 680.** O raio de uma esfera mede  $41 \text{ cm}$ . Determine a razão entre as áreas das secções obtidas por dois planos, sendo de  $40 \text{ cm}$  e  $16 \text{ cm}$  as respectivas distâncias desses planos ao centro da esfera.
- 681.** Determine a área e o volume de uma esfera de  $58 \text{ cm}$  de diâmetro.
- 682.** Determine a área de uma esfera, sendo  $2304 \pi \text{ cm}^3$  o seu volume.
- 683.** Calcule a distância polar de um círculo máximo de uma esfera de  $34 \text{ cm}$  de diâmetro.

- 684.** Determine a superfície de uma esfera, sendo  $26\pi$  cm o comprimento da circunferência do círculo máximo.
- 685.** Determine o raio de uma esfera, sendo  $288\pi$  cm<sup>3</sup> o seu volume.
- 686.** Uma esfera oca tem 1 dm de raio exterior e 1 cm de espessura. Determine o volume da parte oca da esfera.
- 687.** Determine o volume de uma esfera de  $100\pi$  cm<sup>2</sup> de superfície.
- 688.** Determine a medida do raio de uma esfera, sabendo que seu volume e sua superfície são expressos pelo mesmo número.
- 689.** Um plano secciona uma esfera determinando um círculo de raio igual à distância  $m$  do plano ao centro da esfera. Obtenha a superfície e o volume da esfera em função de  $m$ .
- 690.** Determine a medida da superfície e do volume de uma esfera, sabendo que o seu raio mede  $1/5$  do raio de outra esfera cujo volume é  $4\,500\pi$  cm<sup>3</sup>.
- 691.** A cúpula de uma igreja é uma semi-esfera apoiada sobre um quadrado de 12 m de lado (isto é, o círculo base da semi-esfera está inscrito nesse quadrado). Determine a superfície da cúpula.
- 692.** Determine a medida do raio de uma esfera, sabendo que o raio de um círculo menor mede 5 cm e que sua distância polar mede 13 cm.
- 693.** Determine a distância polar de um círculo menor de uma esfera, sendo 10 cm o raio da esfera e 6 cm a distância do círculo ao centro da esfera.
- 694.** Os pólos de um círculo menor de uma esfera distam, respectivamente, 5 cm e 10 cm do plano do círculo. Determine o raio desse círculo.
- 695.** Uma bola de ouro de raio  $r$  se funde, transformando-se em um cilindro de raio  $r$ . Determine a altura do cilindro.
- 696.** Um cone é equivalente a um hemisfério de 25 cm de diâmetro. Determine a área lateral do cone, sabendo que as bases do cone e do hemisfério são coincidentes.
- 697.** Duas esferas de metal de raios  $2r$  e  $3r$  se fundem para formar uma esfera maior. Determine o raio dessa nova esfera.
- 698.** Um sólido é formado por dois cones retos de volumes iguais, tendo como base comum um círculo de 6 cm de raio. A área do sólido é igual à superfície de uma esfera de raio 6 cm. Determine a relação entre os volumes do sólido e da esfera.
- 699.** Os raios de duas esferas concêntricas medem, respectivamente, 15 cm e 8 cm. Calcule a área da secção feita na esfera de raio maior por um plano tangente à outra esfera.



- 700.** Determine o diâmetro de uma esfera obtida da fusão de duas esferas de  $10\text{ cm}$  de diâmetro.
- 701.** Sabendo que o diâmetro de uma esfera é os  $\frac{3}{5}$  do diâmetro de uma outra esfera, calcule a razão entre as áreas dessas duas esferas.
- 702.** O que ocorre com o volume de uma esfera quando duplicamos a medida de seu raio? E quando triplicamos a medida do seu raio?
- 703.** O que ocorre com o volume de uma esfera quando o raio aumenta  $100\%$ ? E quando aumenta  $300\%$ ? E quando diminui  $50\%$ ?
- 704.** O que ocorre com a superfície de uma esfera quando o raio aumenta  $200\%$ ? E quando aumenta  $150\%$ ? E quando diminui  $25\%$ ?
- 705.** O raio de uma esfera mede  $16\text{ cm}$ . De um ponto  $P$  situado a  $41\text{ cm}$  do centro da esfera traçam-se tangentes à esfera. Determine o comprimento dos segmentos com extremidades em  $P$  e nos pontos de tangência com a esfera, bem como a distância do centro da esfera ao plano do círculo de contato e o raio desse círculo.

**Solução**

circunferência de contato

Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, o comprimento do segmento  $PT$ , a distância  $OQ$  do centro da esfera ao plano do círculo e o raio do círculo de tangência.

Aplicando relações métricas (Pitágoras,  $b^2 = a \cdot m$ ,  $ah = bc$ ) no triângulo  $PTO$  retângulo em  $T$ , vem:

$$x^2 = 41^2 - 16^2 \Rightarrow x^2 = 1425 \Rightarrow x = 5\sqrt{57}$$

$$41 \cdot y = 16^2 \Rightarrow y = \frac{256}{41}$$

$$41 \cdot z = 16 \cdot x \Rightarrow 41 \cdot z = 16 \cdot 5\sqrt{57} \Rightarrow z = \frac{80\sqrt{57}}{41}$$

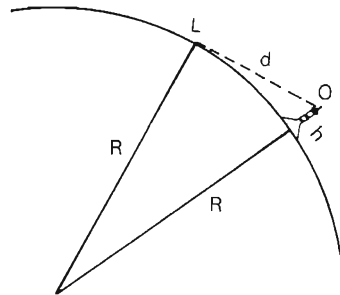
Resposta: Na ordem pedida:  $5\sqrt{57}\text{ cm}$ ,  $\frac{256}{41}\text{ cm}$  e  $\frac{80\sqrt{57}}{41}\text{ cm}$ .

- 706.** Supondo a Terra esférica e o metro a décima milionésima parte do quarto do meridiano, determine a superfície da Terra em  $km^2$ .
- 707.** Determine a superfície de uma esfera de  $5\text{ cm}$  de raio. Em quanto aumenta a superfície, ao aumentar o raio em  $1\text{ cm}$ ?
- 708.** A área de uma secção plana de uma esfera é  $144\pi\text{ cm}^2$ . Calcule a superfície da esfera, sabendo que a distância ao centro da esfera é  $5\text{ cm}$ .
- 709.** Uma esfera tem  $25\pi\text{ cm}^2$  de superfície. Em quanto devemos aumentar o raio, para que a área passe a ser  $64\pi\text{ cm}^2$ ?
- 710.** Determine a área de um círculo obtido da secção plana de uma esfera, sendo o raio da esfera  $r$ , e  $15\text{ cm}$  a distância desse plano ao centro da esfera.
- 711.** Determine a superfície de uma esfera em função do comprimento da circunferência  $c$  do círculo máximo da esfera.
- 712.** Determine a superfície de uma esfera em função da área  $A$  do círculo máximo da esfera.
- 713.** O círculo máximo de uma esfera tem um triângulo equilátero inscrito. Determine a superfície da esfera em função da medida  $a$  do lado desse triângulo.
- 714.** A área obtida da secção plana em uma esfera é  $A$ . Sendo  $r$  o raio da esfera, determine a distância do plano ao centro da esfera.
- 715.** Determine o volume de uma esfera em função do comprimento da circunferência  $C$  do círculo máximo da esfera.
- 716.** Uma esfera tem  $1\text{ m}$  de raio. Qual será o raio de uma esfera cujo volume é  $1/5$  do volume da primeira esfera?
- 717.** Determine a razão entre as áreas de um cubo e uma esfera, sabendo que seus volumes são iguais.
- 718.** Um cubo de chumbo de aresta  $a$  foi transformado numa esfera. Determine a superfície da esfera em função de  $a$ .
- 719.** Calcule em  $cm^3$  o volume de uma esfera, sabendo que o diâmetro perpendicular a um círculo menor de  $10\text{ cm}$  de raio é dividido por esse círculo em dois segmentos de razão  $2/5$ .
- 720.** Uma esfera, um cilindro e um cone têm o mesmo volume e o mesmo raio. Calcule a razão entre a altura do cilindro e a do cone.
- 721.** Determine a diferença entre a área da maior e da menor das secções obtidas por um ponto  $P$ , a uma distância  $d$  do centro da esfera.

- 722.** A superfície de uma esfera mede  $144 \pi \text{ cm}^2$  e é igual à área total de um cilindro que tem o mesmo raio da esfera. Determine a relação entre os volumes de ambos os sólidos.
- 723.** Uma esfera é equivalente a um cilindro reto cuja área total é igual a  $42 \pi \text{ cm}^2$ . Sendo  $3 \text{ cm}$  o raio do cilindro, determine:
- o raio da esfera;
  - a relação entre a área da esfera e a área total de um cone reto que tenha a mesma base e a mesma altura do cilindro dado.
- 724.** Fabricou-se uma caldeira de tal maneira que as bases de dois hemisférios coincidiram com as bases de um cilindro. Sendo o diâmetro do cilindro os  $\frac{3}{5}$  de sua altura e a superfície da caldeira equivalente a uma esfera de raio  $R$ , determine a relação entre o volume da caldeira e o volume da esfera de raio  $R$ .
- 725.** Duas esferas tangentes entre si tangenciam internamente uma outra esfera. Sendo  $10 \text{ cm}$  o diâmetro da esfera maior, determine a relação entre os volumes das esferas tangentes internamente, sabendo que sua soma é  $\frac{2}{3}$  do volume da esfera maior.
- 726.** Um cubo e uma esfera têm igual superfície. Qual dos sólidos tem maior volume?
- 727.** A área total de um cubo e a área de uma superfície esférica são iguais. Qual a razão entre o raio da superfície esférica e a medida de uma aresta do cubo?
- 728.** A área da superfície de uma esfera e a área total de um cone reto são iguais. Determine o raio da esfera, sabendo que o volume do cone é  $12 \pi \text{ dm}^3$  e o raio da base é  $3 \text{ dm}$ .
- 729.** Determine o ângulo do fuso de uma esfera, sendo  $324 \pi \text{ cm}^2$  a área da esfera e  $54 \pi \text{ cm}^2$  a área do fuso.
- 730.** Qual é a área de um fuso de  $28^\circ$  pertencente a uma esfera de  $4 \pi \text{ m}^2$  de superfície?
- 731.** Determine a área de um fuso de  $45^\circ$  em uma esfera de  $10 \text{ cm}$  de raio.
- 732.** Um fuso de  $10^\circ$  de uma esfera de  $1 \text{ cm}$  de raio é equivalente a uma secção plana da esfera. Determine a distância da secção ao centro da esfera.
- 733.** Determine a área de um fuso, cujo ângulo mede  $30^\circ$ , em uma esfera de  $18 \text{ cm}$  de raio.
- 734.** Determine a distância de uma secção plana de uma esfera ao centro dessa esfera, sabendo que o raio da esfera mede  $12 \text{ cm}$  e que a área do fuso de  $60^\circ$  é equivalente à área dessa secção.

- 735.** Calcule a área total e o volume de uma cunha esférica de  $30^\circ$ , sendo  $r$  o raio da esfera.
- 736.** Determine o volume de uma cunha, cujo ângulo mede  $60^\circ$ , em uma esfera cujo volume mede  $288 \pi m^3$ .
- 737.** Qual é o volume de uma cunha de  $30^\circ$ , pertencente a uma esfera de  $972 \pi m^3$  de volume?
- 738.** Determine as medidas dos raios de duas esferas, sabendo que sua soma vale  $20 \text{ cm}$  e que o fuso de  $60^\circ$  na primeira é equivalente ao fuso de  $30^\circ$  na segunda.
- 739.** Um fuso de  $60^\circ$  de uma esfera é equivalente a um fuso de  $30^\circ$  de uma outra esfera. Determine os raios dessas esferas, sendo  $24 \text{ cm}$  sua soma.
- 740.** Determine o raio de uma cunha esférica de  $45^\circ$ , sabendo que é equivalente a um hemisfério de  $10 \text{ cm}$  de diâmetro.
- 741.** Quantos brigadeiros (bolinhas de chocolate) de raio  $0,5 \text{ cm}$  podemos fazer a partir de um brigadeiro de raio  $1,0 \text{ cm}$ ?
- 742.** Um observador ( $O$ ), do ponto mais alto de um farol, vê a linha do horizonte ( $L$ ) a uma distância  $d$ . Sejam  $h$  e  $R$  a altura do farol e o raio da Terra, respectivamente.

- a) Como  $R$  é muito maior que  $h$ , pode-se admitir que  $2R + h = 2R$ . Assim, prove, usando a aproximação indicada, que  $d = \sqrt{2Rh}$ .
- b) O raio da Terra tem, aproximadamente,  $6300 \text{ km}$ . Usando a fórmula do item *a*, calcule a distância ( $d$ ) do horizonte, quando o observador está a uma altura  $h = 35 \text{ m}$ .



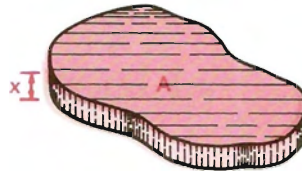
- 743.** Uma esfera de raio  $5 \text{ cm}$ , ao ser seccionada por um plano distante  $3 \text{ cm}$  do seu centro, determina uma área  $S$ . Então, calcule o valor de  $\frac{S}{4\pi}$ .
- 744.** Um plano intercepta uma esfera perpendicularmente a um de seus diâmetros num ponto  $P$  distinto do centro e interior a esse diâmetro.
- a) Prove que a interseção é um círculo.
- b) Determine (em função do raio  $r$  da esfera) a distância do ponto  $P$  ao centro, a fim de que o círculo interseção tenha área igual à metade da de um círculo máximo da esfera.

## IV. Dedução das fórmulas das áreas do cilindro, do cone e da esfera

Colocamos no final deste capítulo a dedução das expressões das áreas laterais do cilindro e do cone e da área da superfície esférica. É a melhor maneira que encontramos para justificar as expressões já incluídas nos itens 199, 214 e 223.

### 229. Noção intuitiva

Se considerarmos uma superfície limitada de área  $A$  e sobre ela formarmos um sólido de altura  $x$  de bases “paralelas”, teremos, indicando com  $V$ , o volume do sólido (“prismas” reunidos com “cilindros”) de base  $A$  e altura  $x$ .



$$V = Ax \implies A = \frac{V}{x}$$

Esta última igualdade é verificada para qualquer  $x$ .

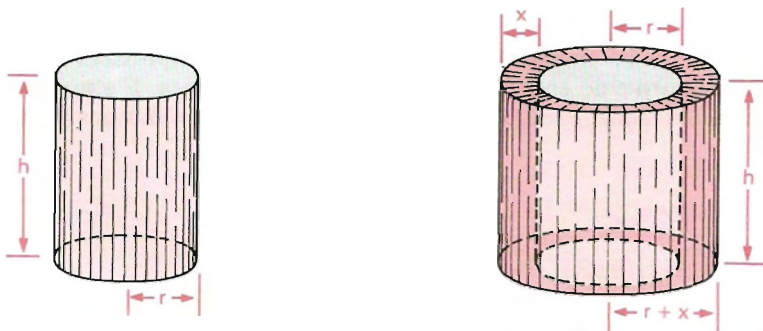
Intuitivamente, uma superfície é imaginada como uma “placa sólida” de “espessura infinitamente pequena”.

Por isso, se uma “placa sólida” de volume  $V_p$  e espessura  $x$  for tal que a expressão (função)

$$\frac{V_p}{x} \text{ tem sentido (é definida) para } x = 0, \text{ então}$$

$$\frac{V_p}{x} \text{ (para } x = 0) \text{ será definida como a área da placa.}$$

Assim agindo, poderemos deduzir as expressões das áreas: lateral do cilindro, superfície esférica, lateral do cone. Nestes casos, o artifício que acima procuramos generalizar é mais real e simples, como veremos a seguir.

**230.** Área lateral do cilindro de revolução

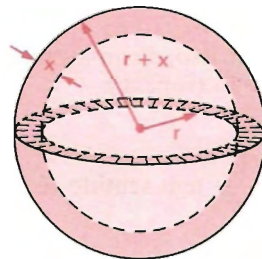
$$V_p = \pi(r+x)^2 h - \pi r^2 h \Rightarrow \frac{V_p}{x} = \pi h(2r+x)$$

Então, para  $x = 0$ , vem:

$$A_L = \pi h(2r+0) \Rightarrow \boxed{A_L = 2\pi r h}$$

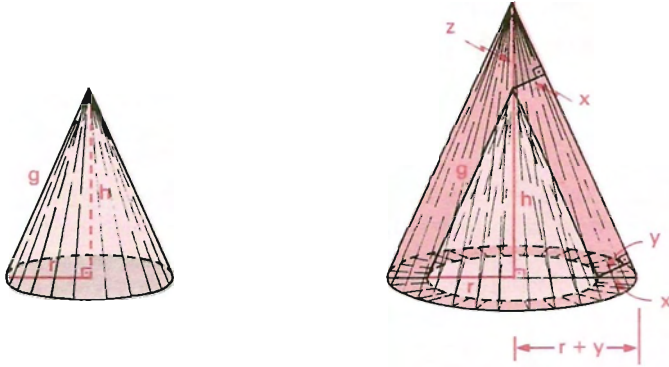
**231.** Área da superfície esférica

$$\begin{aligned} V_p &= \frac{4}{3} \pi(r+x)^3 - \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow \\ \Rightarrow V_p &= \frac{4}{3} \pi[(r+x)^3 - r^3] \Rightarrow \\ \Rightarrow V_p &= \frac{4}{3} \pi[3r^2x + 3rx^2 + x^3] \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{V_p}{x} &= \frac{4}{3} \pi(3r^2 + 3rx + x^2) \end{aligned}$$



Então, para  $x = 0$ , vem:

$$A = \frac{4}{3} \pi[3r^2 + 3r \cdot 0 + 0^2] \Rightarrow \boxed{A = 4\pi r^2}$$

**232.** Área lateral do cone de revolução

Por semelhança entre triângulos, calculamos  $y$  e  $z$  em função de  $x$ .

$$\frac{z}{x} = \frac{g}{r} \Rightarrow z = \frac{g}{r} x \quad \frac{y}{x} = \frac{g}{h} \Rightarrow y = \frac{g}{h} x$$

Segue-se:

$$V_p = \frac{1}{3} \pi (r + y)^2 \cdot (h + z) - \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Substituindo  $y$  e  $z$ , temos:

$$\begin{aligned} V_p &= \frac{1}{3} \pi \left[ \left( r + \frac{g}{h} x \right)^2 \cdot \left( h + \frac{g}{r} x \right) - r^2 h \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow V_p &= \frac{1}{3} \pi \left[ r g x + 2 r g x + \frac{2 g^2}{h} x^2 + \frac{g^2}{h} x^2 + \frac{g^3}{h^2 r} x^3 \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{V_p}{x} &= \frac{1}{3} \pi \left[ 3 r g + \frac{3 g^2}{h} x + \frac{g^3}{h^2 r} x^2 \right] \end{aligned}$$

Então, para  $x = 0$ , vem:

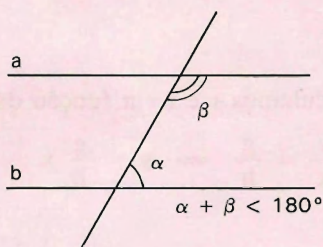
$$A_L = \frac{1}{3} \pi \left[ 3 r g - \frac{3 g^2}{h} 0 + \frac{g^3}{h^2 r} 0^2 \right] \Rightarrow \boxed{A_L = \pi r g}$$

## LEITURA

## Lobachevski e as Geometrias não Euclidianas

Hygino H. Domingues

Tudo começou com Euclides (c. 300 a.C.)... Em sua obra-prima *Os elementos* a geometria foi construída sobre cinco postulados. Um deles, em especial, certamente não traduzia nenhuma experiência concreta. Além disso Euclides só o enunciou depois de provar o máximo possível de teoremas sem usá-lo. Ei-lo:



(Fig. 1)

Postulado V: “Se num plano duas retas  $a$  e  $b$  são interceptadas por uma transversal  $c$  de modo a formar um par de ângulos colaterais internos de soma menor que  $180^\circ$ , então essas retas, prolongadas indefinidamente, se cortam (fig. 1) do lado em que estão os ângulos considerados”.

Na verdade Euclides trabalhava, em sua geometria, como em particular no postulado V, com segmentos de reta que prolongava num ou noutro sentido, conforme necessitasse, ao invés de retas infinitas acabadas, como se faz hoje. E o que esse postulado afirma equivale, na versão moderna da geometria euclidiana, a admitir que por um ponto fora de uma reta não há mais que uma paralela à reta. Entre as implicações importantes do postulado V está o teorema que assegura ser a soma dos ângulos internos de um triângulo igual a um ângulo raso.

Desde os tempos de Euclides dezenas de matemáticos tentaram provar esse postulado, a partir dos outros quatro, achando que se tratasse na verdade de mais um teorema. Um deles foi Nicolai I. Lobachevski (1792-1856), um russo natural da atual cidade de Gorki cuja vida acadêmica sempre esteve vinculada à Universidade de Kazan, desde seu ingresso como aluno em 1807 até seu afastamento do cargo de reitor, que ocupou de 1827 a 1846. Diga-se de passagem que o fato de Lobachevski ter alcançado a reitoria da Universidade de Kazan não foi um prêmio a seus méritos científicos. Estes jamais foram reconhe-

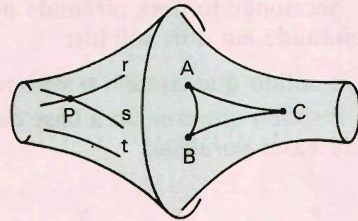


cidos devidamente durante sua vida. Pelo contrário, uma versão de suas idéias geométricas, datando de 1829-30, chegou a ser recusada para publicação pela Academia de Ciências de S. Petersburgo.

Numa certa altura de suas tentativas de provar o postulado V, Lobachevski passou a admitir que isso poderia ser impossível. Admitir essa impossibilidade acarreta que se pode tomar como postulado a existência de mais de uma paralela a uma reta por um ponto fora dela. E foi o que ele acabou fazendo, resultando daí uma nova geometria de resultados surpreendentes. Por exemplo, nessa geometria (hoje conhecida por *geometria hiperbólica*) a soma dos ângulos internos de um triângulo vale menos que  $180^\circ$ .

Cabe então a pergunta: tamanha liberdade é válida em matemática? Não é difícil nos convenceremos de que sim. Primeiro notemos que a geometria considerada por Euclides ao chegar ao postulado V referia-se a um plano. Ademais, o conceito de reta é primitivo: não se define, é tão-somente caracterizado por alguns postulados ou axiomas. Assim, pode-se pensar: e se em vez do plano considerássemos outra superfície, não poderia haver nesta algum ente que fizesse o papel análogo ao da reta no plano, perante o mesmo conjunto de postulados?

Tanto isso é possível que em 1868 o matemático italiano Eugênio Beltrami (1835-1900) descobriu um modelo para a geometria hiperbólica, a *pseudo-esfera*, superfície que lembra dois chifres infinitamente longos ligados por seus extremos (fig. 2). Nessa superfície, por um ponto fora de uma “reta” há mais do que uma paralela a essa reta. Claro que “reta” nesse caso indica o ente da pseudo-esfera cuja idéia



(Fig. 2)

corresponde à de reta de um plano. Na figura 2 pode-se visualizar como isso ocorre, bem como que a soma dos ângulos internos de um “triângulo” vale menos que um ângulo raso. A partir desse modelo, a geometria que o próprio Lobachevski chamava de *imaginária* passou a ser matematicamente *real*.

As geometrias não euclidianas, objeto das pesquisas de Lobachevski, eram um verdadeiro tabu em sua época, daí a marginalização científica de que foi vítima o geômetra russo (agravada pelo fato de trabalhar num local muito distante dos grandes centros da Europa ocidental). Mas isso não impediu que se tornasse público que foi ele o primeiro a publicar um trabalho sobre geometrias não euclidianas (1826). E ganhou, assim, a primazia de ter acabado com o mito da verdade absoluta na matemática.

## CAPÍTULO XIII

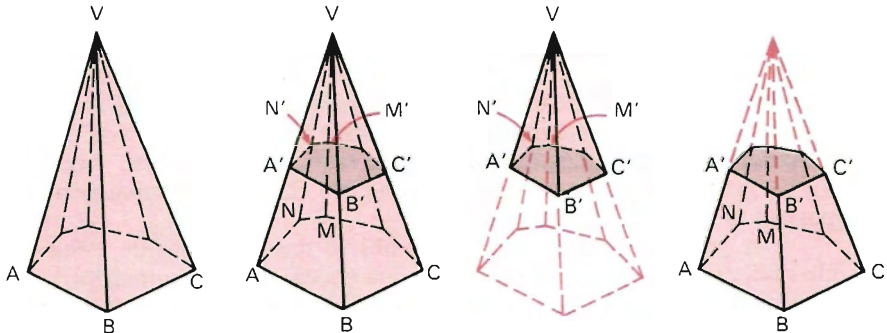
# Sólidos Semelhantes Troncos

### I. Secção de uma pirâmide por um plano paralelo à base

**233.** Seccionando uma pirâmide por um plano paralelo à base, separamos essa pirâmide em dois sólidos:

o sólido que contém o vértice que é uma *nova pirâmide* e

o sólido que contém a base da pirâmide dada que é um *tronco de pirâmide* de bases paralelas.

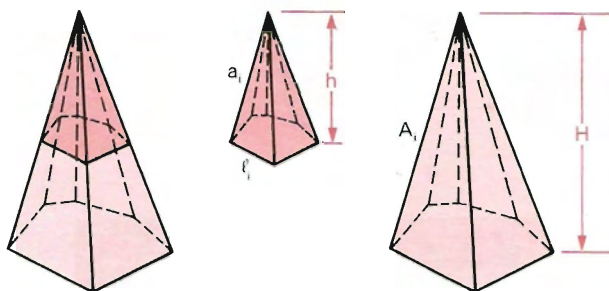


A nova pirâmide e a pirâmide primitiva têm a mesma natureza, os ângulos ordenadamente congruentes e os elementos lineares homólogos (arestas das bases, arestas laterais, alturas, ...) são proporcionais. Dizemos que elas são *semelhantes*.

### 234. Razão de semelhança

É a razão entre dois elementos lineares homólogos. Representaremos por  $k$ .

Assim:



$$\frac{a_i}{A_i} = \frac{l_i}{L_i} = \frac{h}{H} = k$$

(razão de semelhança)

### 235. Propriedades

Considerando duas pirâmides semelhantes, temos:

1º)

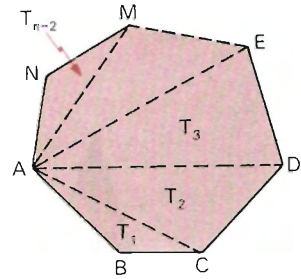
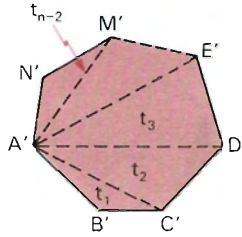
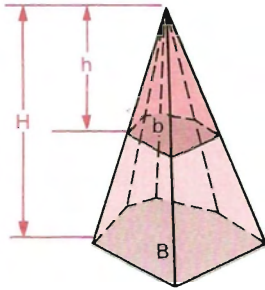
A razão entre as *áreas das bases* é igual ao *quadrado* da razão de semelhança.

De fato, as bases são polígonos semelhantes e a razão entre suas áreas é o quadrado da razão de semelhanças.

$$\frac{b}{B} = k^2$$

Base b

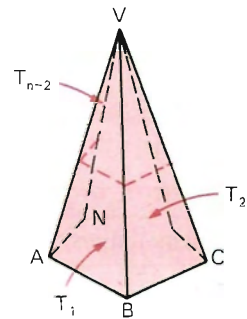
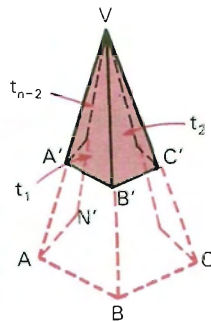
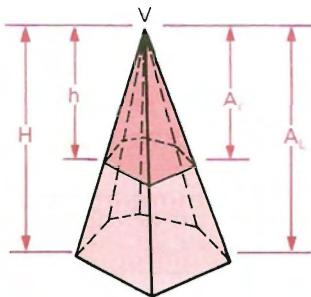
Base B



$$\frac{h}{H} = k, \quad \frac{b}{B} = k^2, \quad \frac{b}{B} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$$

A propriedade acima é da Geometria Plana, porém sua demonstração acompanha os itens da propriedade que segue. Basta fazer a analogia.  
2º)

A razão entre as *áreas laterais* é igual ao *quadrado* da razão de semelhança.



$$\frac{h}{H} = k, \quad \frac{A_l}{A_L} = k^2, \quad \frac{A_l}{A_L} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$$

Sendo

$$\text{Área lateral de } V(ABC \dots MN) = A_L$$

$$\text{Área lateral de } V(A'B'C' \dots M'N') = A_f$$

temos:

$$\begin{aligned} &\text{Pirâmide } V(ABC \dots MN) \sim \text{Pirâmide } V(A'B'C' \dots M'N') \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\triangle VAB \sim \triangle VA'B', \triangle VBC \sim \triangle VB'C', \dots \triangle VMN \sim \triangle VM'N', \\ &\triangle VNA \sim \triangle VN'A') \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \dots = \frac{VN'}{VN} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \dots = \frac{N'A'}{NA} = \frac{h}{H} = k$$

(razão de semelhança)

Considerando

$$\text{Área do } \triangle VA'B' = t_1$$

$$\text{Área do } \triangle VAB = T_1$$

$$\text{Área do } \triangle VB'C' = t_2$$

$$\text{Área do } \triangle VBC = T_2$$

⋮

⋮

$$\text{Área do } \triangle VN'A' = t_{n-2}$$

$$\text{Área do } \triangle VNA = T_{n-2}$$

temos:

$$\frac{t_1}{T_1} = \frac{t_2}{T_2} = \dots = \frac{t_{n-2}}{T_{n-2}} = k^2.$$

Fazendo a razão entre as áreas laterais, vem:

$$\frac{A_f}{A_L} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_{n-2}}{T_1 + T_2 + \dots + T_{n-2}} \Rightarrow \frac{A_f}{A_L} = \frac{k^2 T_1 + k^2 T_2 + \dots + k^2 T_{n-2}}{T_1 + T_2 + \dots + T_{n-2}} = k^2$$

$$\frac{A_f}{A_L} = k^2$$

3º)

A razão entre as *áreas totais* é igual ao *quadrado* da razão de semelhança.

$$\text{Temos: } \frac{b}{B} = k^2 \Rightarrow b = k^2 B \qquad \frac{A_f}{A_L} = k^2 \Rightarrow A_f = k^2 A_L.$$

Fazendo a razão entre as áreas totais, vem:

$$\frac{A_t}{A_T} = \frac{A_t + b}{A_L + B} \Rightarrow \frac{A_t}{A_T} = \frac{k^2 \cdot A_L + k^2 B}{A_L + B} \Rightarrow \frac{A_t}{A_T} = k^2$$

$$\frac{A_t}{A_T} = k^2$$

4º)

A razão entre os *volumes* é igual ao *cubo* da razão de semelhança.

Temos:  $\frac{h}{H} = k$  e  $\frac{b}{B} = k^2$ .

Fazendo a razão entre os volumes, vem:

$$\frac{v}{V} = \frac{\frac{1}{3} b h}{\frac{1}{3} B H} \Rightarrow \frac{v}{V} = \left(\frac{b}{B}\right) \cdot \left(\frac{h}{H}\right) \Rightarrow \frac{v}{V} = k^2 \cdot k = k^3$$

$$\frac{v}{V} = k^3$$

Devemos notar ainda que:

$$\frac{v}{V} = k^3 \Rightarrow \frac{v}{V} = k^2 \cdot k \Rightarrow \frac{v}{V} = \frac{b \sqrt{b}}{B \sqrt{B}}$$

### 236. Observações

1ª) As propriedades acima são facilmente adaptadas para *cones* semelhantes.

2ª) Elas podem ser generalizadas para duas superfícies ou dois sólidos semelhantes quaisquer:

- A razão entre as *áreas* de duas superfícies semelhantes é igual ao *quadrado* da razão de semelhança.

- A razão entre os *volumes* de dois sólidos semelhantes é igual ao *cubo* da razão de semelhança.

### 237. Exemplo de aplicação

A que distância do vértice se deve passar um plano paralelo à base de uma pirâmide (ou cone) para que:

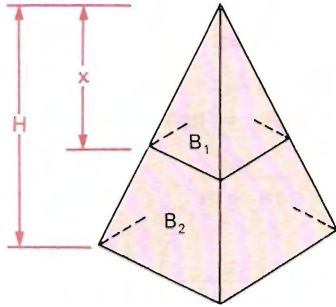
a) a razão entre as áreas das bases da nova pirâmide (cone) e da pirâmide (cone) dada seja  $a/b$ ?

**Solução**

$$\left. \begin{aligned} \frac{B_1}{B_2} &= \left(\frac{x}{H}\right)^2 \\ \frac{B_1}{B_2} &= \frac{a}{b} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{H} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{H\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (\text{resposta})$$



b) a razão entre os volumes do tronco obtido e da pirâmide (cone) primitiva seja  $p/q$ ?

**Solução**

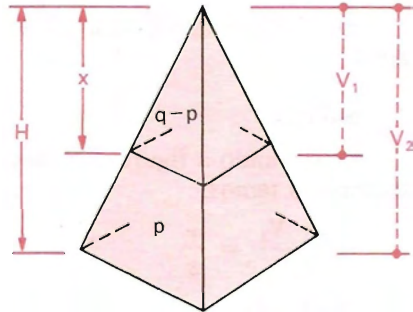
Observando a figura, vemos que  $V_2 - V_1$  é o volume do tronco, e pelo enunciado temos:

$$\frac{V_2 - V_1}{V_2} = \frac{p}{q}$$

Daí vem que:

$$qV_2 - qV_1 = pV_2 \Rightarrow qV_1 = (q - p)V_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{q - p}{q}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} &= \frac{q - p}{q} \\ \frac{V_1}{V_2} &= \left(\frac{x}{H}\right)^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x}{H} = \sqrt[3]{\frac{q - p}{q}} \Rightarrow x = H \sqrt[3]{\frac{q - p}{q}} \quad (\text{resposta})$$



c) a razão entre as áreas laterais da nova pirâmide (cone) e do tronco obtido seja  $m/n$ ?

**Solução**

Observando a figura, vemos que  $A_{l_2} - A_{l_1}$  é a área lateral do tronco, e pelo enunciado temos:

$$\frac{A_{l_1}}{A_{l_2} - A_{l_1}} = \frac{m}{n}.$$

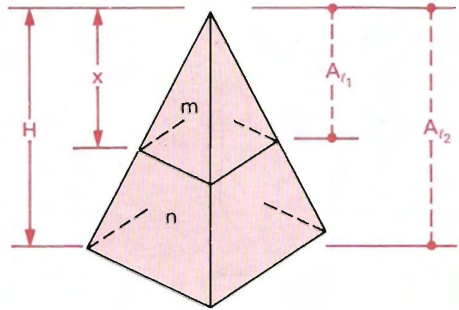
Daí vem que:

$$nA_{l_1} = mA_{l_2} - mA_{l_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m + n)A_{l_1} = mA_{l_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A_{l_1}}{A_{l_2}} = \frac{m}{m + n}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_{l_1}}{A_{l_2}} &= \frac{n}{m + n} \\ \frac{A_{l_1}}{A_{l_2}} &= \left(\frac{x}{H}\right)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x}{H} = \sqrt{\frac{m}{m + n}} \Rightarrow x = H \sqrt{\frac{m}{m + n}} \quad (\text{resposta})$$



d) a razão entre os volumes do tronco obtido e da nova pirâmide (cone) seja  $r/s$ ?

**Solução**

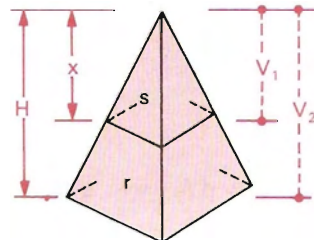
Observando a figura, vemos que  $V_2 - V_1$  é o volume do tronco, e pelo enunciado temos:

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{r}{s}.$$

Daí vem que:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{s}{r + s}$$

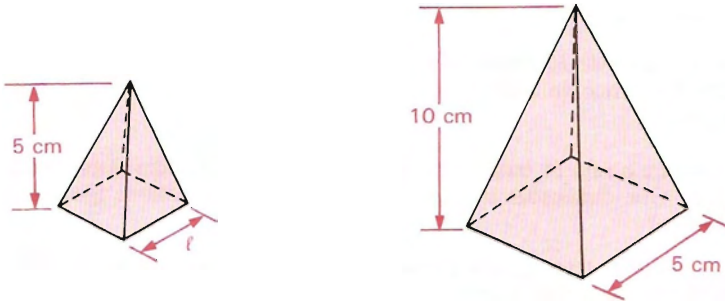
$$\left. \begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} &= \frac{s}{r + s} \\ \frac{V_1}{V_2} &= \left(\frac{x}{H}\right)^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x}{H} = \sqrt[3]{\frac{s}{r + s}} \Rightarrow x = H \cdot \sqrt[3]{\frac{s}{r + s}} \quad (\text{resposta})$$





## EXERCÍCIOS

- 745.** Considere as pirâmides quadrangulares regulares semelhantes, cujas medidas estão indicadas abaixo.



- a) Calcule a razão de semelhança.
  - b) Calcule a medida do lado da base da pirâmide menor.
  - c) Calcule as áreas das bases das pirâmides. Qual a razão entre as áreas obtidas?
  - d) Calcule os volumes das pirâmides. Qual a razão entre os volumes obtidos?
  - e) Considere as razões obtidas nos itens *c* e *d*. Existe alguma relação entre cada uma dessas razões e a razão de semelhança? Justifique.
- 746.** Determine a aresta de um cubo, sabendo que seu volume é o dobro do volume de um outro cubo de aresta  $A$ .
- 747.** Sabendo que a altura de uma pirâmide é  $20\text{ cm}$  e sua base é um quadrado de lado  $12\text{ cm}$ , calcule a medida da altura e do lado da base de uma pirâmide semelhante de  $120\text{ cm}^3$  de volume.
- 748.** Determine o volume de uma pirâmide de  $8\text{ cm}$  de altura, sabendo que o plano formado pelos pontos médios de suas arestas laterais determina na pirâmide uma seção de  $3\text{ cm}^2$  de superfície.
- 749.** Seccionando uma pirâmide por um plano paralelo à base e que divide sua altura em dois segmentos de medidas iguais, obtemos uma pirâmide menor. Determine a razão entre o volume da primeira pirâmide e o volume da pirâmide menor obtida.
- 750.** A que distância do vértice devemos cortar um cone de revolução, por um plano paralelo à base, de modo que o volume do cone destacado seja  $1/8$  do volume do primeiro cone?
- 751.** Uma das arestas de um tetraedro de volume  $80\sqrt{3}\text{ cm}^3$  mede  $10\text{ cm}$ . Determine o volume de um tetraedro semelhante, sabendo que a aresta homóloga mede  $5\text{ cm}$ .
- 752.** Uma pirâmide de  $8\text{ m}$  de altura tem a aresta lateral medindo  $9\text{ m}$ . Determine o comprimento da aresta lateral homóloga de uma outra pirâmide, sabendo que é semelhante à primeira e que sua altura mede  $10\text{ m}$ .

- 753.** Um cilindro tem  $2\text{ m}$  de altura e  $1\text{ m}$  de raio. Determine as dimensões de um cilindro semelhante, cuja superfície lateral seja  $1/4$  da superfície lateral do primeiro.
- 754.** A base de uma pirâmide tem  $225\text{ m}^2$  de área. A  $2/3$  do vértice corta-se a pirâmide por um plano paralelo à base. Ache a área da secção.
- 755.** Um plano paralelo à base de um cone secciona-o, determinando dois cones  $C_1$  e  $C_2$  cujos volumes estão na razão  $2/3$ . Sendo  $9\text{ cm}$  a medida da geratriz do cone maior, determine a geratriz do cone menor.
- 756.** Em um cone de  $10\text{ cm}$  de altura traça-se uma secção paralela à base que dista  $4\text{ cm}$  do vértice do cone. Qual a razão entre a área da secção e a área da base do cone?
- 757.** A altura e o raio da base de um cone de revolução medem respectivamente  $4\text{ m}$  e  $3\text{ m}$ . Que dimensões tem um cone semelhante de volume igual ao triplo do primeiro?
- 758.** Uma pirâmide tem altura  $h$  e área da base  $B$ . A que distância do vértice deve ser conduzido um plano paralelo à base para que a área da secção seja  $b$ ?
- 759.** Uma caixa em forma de paralelepípedo retângulo tem  $40\text{ cm}$ ,  $30\text{ cm}$  e  $20\text{ cm}$  de dimensões. Determine as dimensões de uma caixa semelhante à primeira, de modo que sua capacidade seja o quádruplo da primeira.
- 760.** O plano que dista  $3\text{ m}$  da base de uma pirâmide secciona-a segundo um polígono de  $8\text{ m}^2$  de área. Calcule o volume da pirâmide, sabendo que sua base tem área igual a  $18\text{ m}^2$ .
- 761.** Uma pirâmide de  $10\text{ m}$  de altura tem por base um hexágono regular. A  $4\text{ m}$  do vértice, traça-se um plano que secciona a pirâmide paralelamente à base. Sendo  $8\text{ m}^2$  a área da secção, determine o volume da pirâmide.
- 762.** Duas pirâmides de alturas iguais têm suas bases sobre um mesmo plano. Um plano secciona as duas pirâmides paralelamente às bases, determinando na primeira pirâmide uma secção de área  $144\text{ cm}^2$ . Obtenha a área determinada pelo plano na segunda pirâmide, sabendo que as áreas das bases das pirâmides são respectivamente  $225\text{ cm}^2$  e  $900\text{ cm}^2$ .
- 763.** Determine a medida da altura e do lado da base de uma pirâmide regular hexagonal, sabendo que seu volume é  $8/27$  do volume de uma pirâmide semelhante cuja altura mede  $10\text{ cm}$  e cujo lado da base mede  $4\text{ cm}$ .
- 764.** Dois poliedros semelhantes  $P_1$  e  $P_2$  têm áreas iguais a  $8\text{ cm}^2$  e  $12\text{ cm}^2$ , respectivamente. Determine o volume de  $P_1$ , sendo  $36\text{ cm}^3$  o volume de  $P_2$ .
- 765.** A aresta lateral  $PA$  de uma pirâmide mede  $4\text{ m}$ . Que comprimento devemos tomar sobre essa aresta, a partir do vértice, para que um plano paralelo à base divida a pirâmide em dois sólidos equivalentes?

## II. Tronco de pirâmide de bases paralelas

### 238. Volume

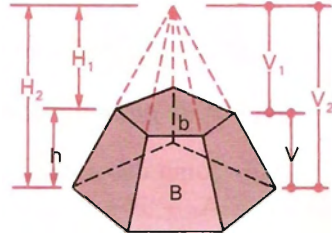
Dedução da fórmula que dá o volume do tronco de pirâmide de bases paralelas.

Dados:

área  $B$  da base maior,

área  $b$  da base menor e

$h$  a medida da altura do tronco.



### Solução

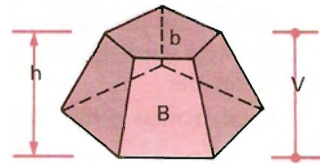
Sejam  $V$  o volume procurado,

$H_2$  a altura da pirâmide original,

$H_1$  a altura da pirâmide nova,

$V_2$  o volume da pirâmide original e

$V_1$  o volume da pirâmide nova.



Assim:

$$\begin{aligned}
 V = V_2 - V_1 &= \frac{1}{3} B H_2 - \frac{1}{3} b H_1 \\
 \left. \begin{aligned} & \\ & H_2 = H_1 + h \end{aligned} \right\} &\Rightarrow V = \frac{1}{3} B(H_1 + h) - \frac{1}{3} b H_1 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow V = \frac{1}{3} [Bh + (B - b) \cdot H_1] \quad (1)
 \end{aligned}$$

Cálculo de  $H_1$  em função dos dados:

$$\frac{B}{b} = \left( \frac{H_2}{H_1} \right)^2 \Rightarrow \frac{H_2}{H_1} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}} \Rightarrow \frac{H_1 + h}{H_1} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}} \Rightarrow H_1 = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \quad (2)$$

Substituindo  $H_1$  (2) em (1):

$$V = \frac{1}{3} \left[ Bh + (B - b) \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \right] \Rightarrow V = \frac{h}{3} \left[ B + (B - b) \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \right]$$

Considerando que:

$B - b = (\sqrt{B})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{B} + \sqrt{b})(\sqrt{B} - \sqrt{b})$  e substituindo  $B - b$  na expressão acima, temos:

$$V = \frac{h}{3} [B + (\sqrt{B} + \sqrt{b}) \cdot \sqrt{b}] = \frac{h}{3} [B + \sqrt{B \cdot b} + b]$$

$$V = \frac{h}{3} [B + \sqrt{B \cdot b} + b]$$

### 239. Área lateral e área total

*Tronco de pirâmide qualquer*

$A_l$  = soma das áreas das faces laterais (trapézios)

$$A_t = A_l + B + b$$

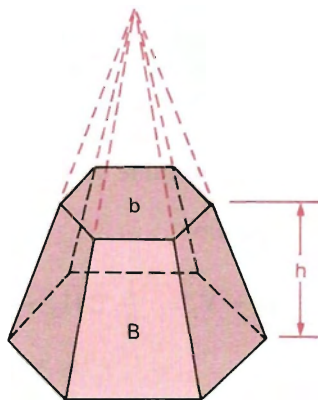
*Tronco de pirâmide regular*

*Tronco de pirâmide regular* é o tronco de bases paralelas obtido de uma pirâmide regular.

Num tronco piramidal regular:

- as arestas laterais são congruentes entre si;
- as bases são polígonos regulares semelhantes;
- as faces laterais são trapézios isósceles, congruentes entre si.

A altura de um desses trapézios chama-se *apótema* do tronco.



*Área lateral e área total de um tronco de pirâmide regular*

Dedução das fórmulas que dão a *área lateral* e a *área total* de um tronco de pirâmide regular de bases paralelas.

Dados:

perímetro da base maior =  $2P$

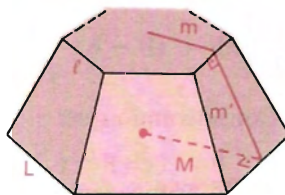
perímetro da base menor =  $2p$

apótema da base maior =  $M$

apótema da base menor =  $m$

apótema do tronco =  $m'$

Pede-se:  $A_l$  e  $A_t$  do tronco.



### Solução

Sejam  $\ell$  e  $L$  as respectivas medidas dos lados das bases (que supomos terem  $n$  lados).

Área lateral

$$A_l = n \cdot A_{\text{trapézio}} \Rightarrow A_l = n \cdot \left( \frac{L + \ell}{2} \right) m' = \frac{nLm'}{2} + \frac{n\ell m'}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_l = Pm' + pm' \Rightarrow A_l = (P + p)m'$$

$$A_l = (P + p)m'$$

Área total

$$A_t = A_l + B + b \text{ em que } B = P \cdot M, b = p \cdot m$$

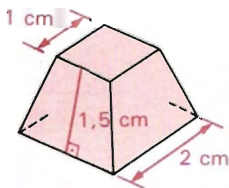
Logo:

$$A_t = (P + p)m' + PM + pm$$

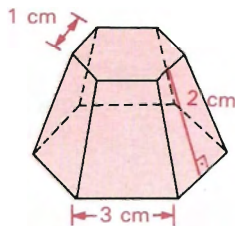
## EXERCÍCIOS

**766.** Calcule a área total dos troncos de pirâmides cujas medidas estão indicadas nas figuras abaixo.

a) quadrangular regular



b) hexagonal regular

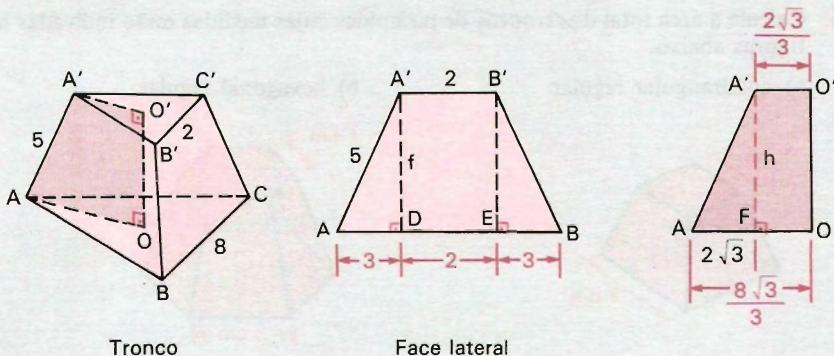


**767.** As bases de um tronco de pirâmide são dois pentágonos regulares cujos lados medem  $5 \text{ dm}$  e  $3 \text{ dm}$ , respectivamente. Sendo essas bases paralelas e a medida do apótema do tronco de pirâmide  $10 \text{ dm}$ , determine a área lateral desse tronco.

**768.** Determine a medida do apótema de um tronco de pirâmide regular cujas bases são triângulos equiláteros de lados  $8 \text{ cm}$  e  $12 \text{ cm}$ , respectivamente, e a área lateral do tronco  $180 \text{ cm}^2$ .

- 769.** Determine a superfície total de um tronco de pirâmide de bases paralelas, sendo as bases quadrados de lados  $20\text{ cm}$  e  $8\text{ cm}$  respectivamente, e a altura do tronco igual ao lado da base menor.
- 770.** Um tronco de pirâmide regular tem para bases paralelas dois quadrados cujos lados medem  $16\text{ cm}$  e  $6\text{ cm}$ , respectivamente; o apótema do tronco mede  $13\text{ cm}$ . Determine a área total desse tronco.
- 771.** Determine o volume de um tronco de pirâmide de  $279\sqrt{3}\text{ cm}^2$  de superfície total, sendo as bases hexágonos regulares de  $9\text{ cm}$  e  $3\text{ cm}$  de lado, respectivamente.
- 772.** Um tronco de pirâmide tem por volume  $98\sqrt{3}\text{ cm}^3$  e por bases dois triângulos equiláteros de  $10\text{ cm}$  e  $6\text{ cm}$  de lado, respectivamente. Determine a altura do tronco.
- 773.** Um tronco de pirâmide de  $6\text{ m}$  de altura tem por base inferior um pentágono de área  $20\text{ m}^2$ . Um lado desse pentágono mede  $4\text{ m}$ , sendo  $3\text{ m}$  a medida do seu homólogo na base superior. Determine o volume do tronco de pirâmide.
- 774.** Calcule o volume de um tronco de pirâmide de  $4\text{ dm}$  de altura e cujas bases têm área  $36\text{ dm}^2$  e  $144\text{ dm}^2$ .
- 775.** Um tronco de pirâmide regular tem como bases triângulos equiláteros cujos lados medem, respectivamente,  $2\text{ cm}$  e  $8\text{ cm}$ . A aresta lateral mede  $5\text{ cm}$ . Calcule a área lateral, a área total e o volume desse tronco.

**Solução**



a) Área lateral

Cálculo da altura da face

no  $\triangle ADA'$ :  $f^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow f = 4\text{ cm}$ .

A área lateral é igual a três vezes a área de uma face lateral, ou seja:

$$A_l = 3 \cdot A_{\text{trapézio}} \Rightarrow A = 3 \cdot \left( \frac{2 + 8}{2} \cdot 4 \right) \Rightarrow A = 60 \text{ cm}^2.$$

b) Área total

$$A_t = A_l + B + b \Rightarrow A_t = 60 + \frac{8^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_t = (60 + 17 \sqrt{3}) \text{ cm}^2$$

c) Volume

Cálculo da altura do tronco

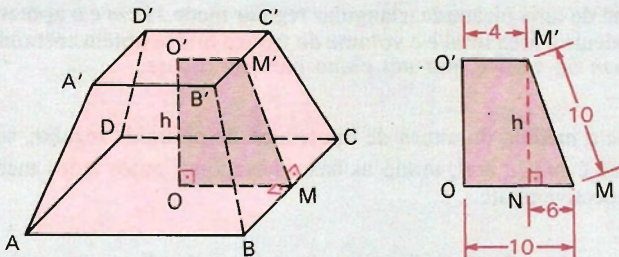
$$\text{no } \triangle AFA': h^2 = 5^2 - (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow h^2 = 13 \Rightarrow h = \sqrt{13}.$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{h}{3} [B + \sqrt{B \cdot b} + b] = \frac{\sqrt{13}}{3} \left[ \frac{64\sqrt{3}}{4} + \frac{8 \cdot 2\sqrt{3}}{4} + \frac{4\sqrt{3}}{4} \right] = \\ &= \frac{\sqrt{13}}{3} \cdot 21\sqrt{3} = 7\sqrt{39} \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

- 776.** Determine o volume de um tronco de pirâmide cujas bases são triângulos equiláteros, sabendo que a área da base maior é  $24 \text{ cm}^2$  e que a razão de semelhança entre os lados das bases é  $2/3$ , sendo  $6 \text{ cm}$  a altura do tronco de pirâmide.
- 777.** Qual o volume de um tronco de pirâmide regular hexagonal, de aresta lateral  $5 \text{ m}$ , cujas áreas das bases medem, respectivamente,  $54\sqrt{3} \text{ m}^2$  e  $6\sqrt{3} \text{ m}^2$ ?
- 778.** O apótema de uma pirâmide triangular regular mede  $39 \text{ cm}$  e o apótema da base,  $15 \text{ cm}$ . Calcule a área total e o volume do tronco que se obtém cortando a pirâmide, a  $24 \text{ cm}$  do vértice, por um plano paralelo à base.
- 779.** Determine a medida da altura de um tronco de pirâmide regular, sabendo que seu volume é  $342\sqrt{3} \text{ cm}^3$ , sendo as bases hexágonos cujos lados medem  $4 \text{ cm}$  e  $6 \text{ cm}$ , respectivamente.
- 780.** Dadas as medidas  $B$ ,  $B'$ ,  $h$  das áreas das bases e da altura, respectivamente, de um tronco de pirâmide, determine a altura da pirâmide da qual se obteve o tronco.
- 781.** Dados os lados  $a$  e  $b$  das bases quadradas de um tronco de pirâmide, determine a altura do tronco, considerado regular, de modo que a área lateral seja igual à soma das áreas das bases.

- 782.** Calcule o erro que se comete tomando para volume de um tronco de pirâmide o produto da semi-soma das áreas das bases pela altura.
- 783.** Determine o volume de um tronco de pirâmide regular, sabendo que as bases são quadrados de diagonais  $4\sqrt{2} \text{ cm}$  e  $8\sqrt{2} \text{ cm}$ , respectivamente, e que a aresta lateral forma com a diagonal da base maior um ângulo de  $45^\circ$ .
- 784.** O volume de um tronco de pirâmide hexagonal regular de bases paralelas é igual a  $40 \text{ m}^3$ . Sua altura mede  $3 \text{ m}$  e a área da base maior  $20 \text{ m}^2$ . Calcule a relação que existe entre os lados dos hexágonos das bases.
- 785.** Determine a área lateral de um tronco de pirâmide triangular regular, sendo  $4 \text{ dm}$  o lado da base menor e sabendo que uma aresta lateral forma um ângulo de  $60^\circ$  com um lado da base maior, dado o apótema do tronco igual a  $1 \text{ dm}$ .
- 786.** Determine a área total de um tronco de pirâmide regular, sendo as bases paralelas hexagonais, em que o lado da maior base mede  $10 \text{ cm}$  e a altura do tronco é igual ao apótema da maior base, sabendo ainda que as faces laterais do tronco formam com a base maior um ângulo diedro de  $60^\circ$ .
- 787.** O volume de um tronco de pirâmide regular é  $109 \text{ dm}^3$ ; as bases são triângulos equiláteros de  $5 \text{ dm}$  e de  $7 \text{ dm}$  de lado. Calcule a altura.
- 788.** O apótema de um tronco de pirâmide regular mede  $10 \text{ dm}$ , as bases são quadrados de lados, respectivamente,  $8 \text{ dm}$  e  $20 \text{ dm}$ . Calcule o volume.

**Solução**



a) Cálculo da altura

$$\text{no } \triangle MNM': h^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow h = 8 \text{ dm.}$$



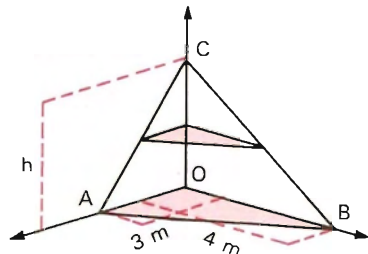
b) Cálculo do volume

$$V = \frac{h}{3} [B + \sqrt{Bb} + b]$$

Substituindo  $h = 8$ ,  $B = 400$  e  $b = 64$  na fórmula, vem:

$$V = \frac{8}{3} [400 + \sqrt{400 \cdot 64} + 64] = \frac{8}{3} [400 + 20 \cdot 8 + 64] = 1\,664 \text{ dm}^3.$$

- 789.** As bases de um tronco de pirâmide regular são quadrados cujas diagonais medem  $4\sqrt{2} \text{ cm}$  e  $10\sqrt{2} \text{ cm}$ , respectivamente. Determine o volume do tronco, sendo  $5 \text{ cm}$  a medida da aresta lateral.
- 790.** O apótema de um tronco de pirâmide regular tem  $5 \text{ cm}$ ; as bases são quadrados de  $4 \text{ cm}$  e  $10 \text{ cm}$ . Calcule o volume.
- 791.** Determine a área total de um tronco de pirâmide quadrangular regular, sendo  $8 \text{ cm}$  e  $6 \text{ cm}$  as medidas dos lados das bases inferior e superior, sabendo que as faces laterais formam um ângulo de  $60^\circ$  com a base maior do tronco de pirâmide.
- 792.** A aresta lateral de um tronco de pirâmide triangular regular mede  $4 \text{ m}$  e forma um ângulo de  $60^\circ$  com a base maior. O raio do círculo circunscrito à maior base mede  $4 \text{ m}$ . Encontre o volume do tronco de pirâmide.
- 793.** Um tronco de pirâmide tem por bases dois octôgonos regulares cujos lados medem  $4 \text{ cm}$  e  $2 \text{ cm}$ , respectivamente. A altura do tronco é de  $12 \text{ cm}$ . Determine o volume do tronco de pirâmide, bem como o volume da pirâmide total na qual está contido o tronco.
- 794.** Considere o triedro tri-retângulo, cujas arestas são os semi-eixos  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ . Sobre  $Ox$  marque um ponto  $A$  tal que  $OA = 3 \text{ m}$ ; sobre  $Oy$  marque  $B$  tal que  $OB = 4 \text{ m}$  e sobre  $Oz$  marque  $C$  tal que  $OC = h$ .



- a) Seccionando a pirâmide  $OABC$  por um plano paralelo à base  $OAB$  que passe pelo ponto médio de  $OC$ , calcule as áreas das bases do tronco de pirâmide resultante.
- b) Determine o volume do tronco de pirâmide, se a área do triângulo  $ABC$  for igual a  $12 \text{ m}^2$ .

### III. Tronco de cone de bases paralelas

#### 240. Volume

Dedução da fórmula que dá o volume do tronco do cone de bases paralelas.

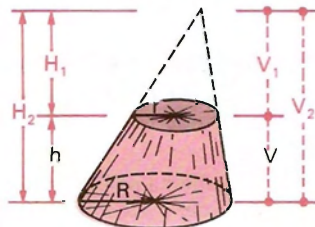
Dados:

$R$  = raio da base maior

$r$  = raio da base menor

$h$  = altura

Pede-se:  $V$  = volume do tronco.



**Solução**

$$\left. \begin{aligned} V &= V_2 - V_1 = \frac{1}{3} \pi R^2 H_2 - \frac{1}{3} \pi r^2 H_1 \\ H_2 &= H_1 + h \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{3} [R^2 (H_1 + h) - r^2 H_1] \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} [R^2 h + (R^2 - r^2) H_1] \quad (1)$$

Cálculo de  $H_1$  em função dos dados:

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{R}{r} \Rightarrow \frac{H_1 + h}{H_1} = \frac{R}{r} \Rightarrow H_1 = \frac{hr}{R - r}.$$

Substituindo  $H_1$  de (2) em (1):

$$V = \frac{\pi}{3} \left[ R^2 h + (R^2 - r^2) \frac{hr}{R - r} \right] = \frac{\pi h}{3} \left[ R^2 + (R + r)(R - r) \frac{r}{R - r} \right]$$

$$V = \frac{\pi h}{3} [R^2 + Rr + r^2]$$

### 241. Área lateral e área total

Dedução das fórmulas que dão a área lateral e a área total de um tronco de cone reto de bases paralelas.

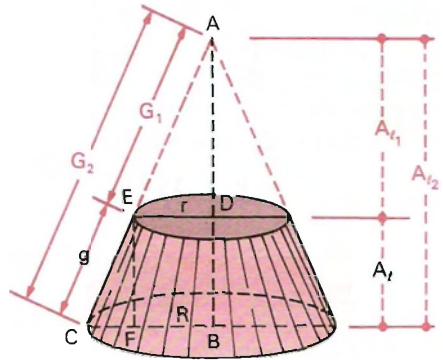
Dados:

$R$  = raio da base maior

$r$  = raio da base menor

$g$  = geratriz do tronco

Pedem-se:  $A_t$  e  $A_l$  do tronco.



#### Solução

Área lateral

Sejam  $A_t$ ,  $A_1$  e  $A_2$  as áreas laterais, respectivamente, do tronco, do cone destacado e do cone primitivo. Então:

$$\begin{aligned} A_t, A_2 - A_1 &= \pi R G_2 - \pi r G_1 = \\ &= \pi R(G_1 + g) - \pi r G_1 = \pi [Rg + (R - r)G_1] \end{aligned}$$

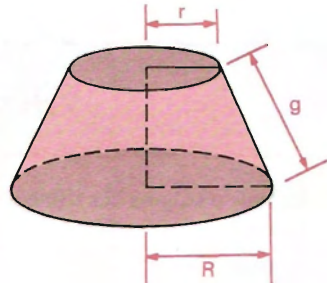
Cálculo de  $G_1$  em função dos dados:

$$\triangle ADE \sim \triangle EFC \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{DE}{FC} \Rightarrow \frac{G_1}{g} = \frac{r}{R - r} \Rightarrow G_1 = \frac{rg}{R - r} \quad (2)$$

Substituindo  $G_1$  de (2) em (1), temos:

$$A_t = \pi \left[ R \cdot g + (R - r) \cdot \frac{rg}{R - r} \right] = \pi [Rg + rg]$$

$$A_t = \pi(R + r)g$$



**Observação:**

A dedução acima justifica a propriedade:

A superfície lateral de um tronco de cone reto de raios  $R$  e  $r$  e geratriz  $g$  é equivalente a um trapézio de bases  $2\pi R$  e  $2\pi r$  e altura  $g$ .

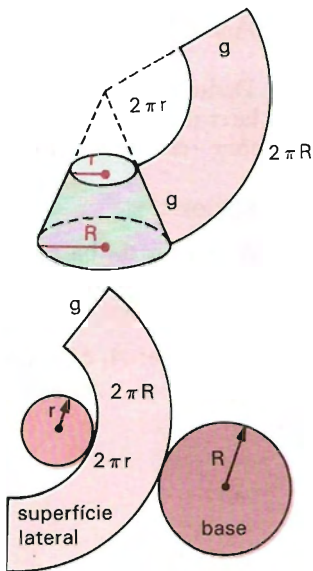
$$A_l = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} g$$

$$A_l = \pi(R + r)g$$

Área total

$$A_t = A_l + B + b = \pi(R + r)g + \pi R^2 + \pi r^2$$

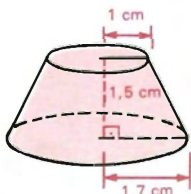
$$A_t = \pi[R(g + R) + r(g + r)]$$



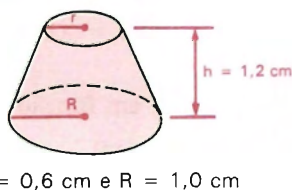
# EXERCÍCIOS

**795.** Calcule o volume dos troncos de cones, cujas medidas estão indicadas nas figuras abaixo.

a) cone reto



b) cone reto

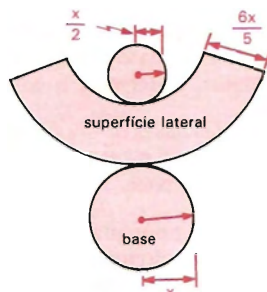


**796.** A geratriz de um tronco de cone reto mede  $4\text{ dm}$  e os raios das bases, respectivamente,  $3\text{ dm}$  e  $2\text{ dm}$ . Calcule a área total e o volume.

**797.** Determine a medida da altura, o volume e as áreas das bases de um tronco de cone, sabendo que sua geratriz mede  $12,5\text{ cm}$  e os raios das bases menor e maior estão na razão  $2/3$ , sendo  $50\text{ cm}$  a sua soma.

**798.** Determine o volume de um tronco de cone, sabendo que sua área total é  $120\pi\text{ cm}^2$ , sendo  $4\text{ cm}$  e  $7\text{ cm}$  as medidas dos raios das bases, respectivamente.

- 799.** Represente, por meio de uma expressão algébrica, a área total do tronco de cone reto obtido a partir da planificação ao lado.



- 800.** Determine os raios, a altura e o apótema de um tronco de cone, sendo o raio maior o dobro do menor, a altura, o dobro do raio maior e o volume  $224\pi/3 \text{ dm}^3$ .
- 801.** Determine o volume de um tronco de cone, sendo  $10 \text{ cm}$  e  $30 \text{ cm}$  as medidas respectivas dos raios das bases e  $29 \text{ cm}$  a medida de sua geratriz.
- 802.** Determine a altura de um tronco de cone, sabendo que os raios das bases medem, respectivamente,  $3 \text{ m}$  e  $2 \text{ m}$ , sendo  $20\pi \text{ m}^3$  o seu volume.
- 803.** Determine a área lateral e a área total de um tronco de cone, sabendo que os raios de suas bases medem  $11 \text{ cm}$  e  $5 \text{ cm}$  e que a altura do tronco mede  $8 \text{ cm}$ .
- 804.** Determine a área lateral de um tronco de cone cuja altura mede  $8 \text{ cm}$ , sendo os raios das bases  $4 \text{ cm}$  e  $10 \text{ cm}$ , respectivamente.
- 805.** Os raios das bases de um tronco de cone de revolução medem  $6 \text{ m}$  e  $4 \text{ m}$ . Calcule a altura para que a área total seja o dobro da área lateral.
- 806.** A área lateral de um tronco de cone vale  $560\pi \text{ cm}^2$ . O raio da base maior e a geratriz têm medidas iguais. O raio da base menor vale  $8 \text{ cm}$  e a altura do tronco mede  $16 \text{ cm}$ . Determine a geratriz.
- 807.** Os diâmetros das bases de um tronco de cone de revolução são, respectivamente,  $22 \text{ m}$  e  $4 \text{ m}$ . Qual o diâmetro de um cilindro de mesma altura do tronco e de mesmo volume?
- 808.** Os raios das bases de um tronco de cone medem, respectivamente,  $4 \text{ cm}$  e  $6 \text{ cm}$ . Calcule a altura desse tronco, sabendo que a área lateral é igual à soma das áreas das bases.
- 809.** A medida do raio da base menor de um tronco de cone é  $10 \text{ cm}$  e a geratriz forma com a altura um ângulo de  $45^\circ$ . Determine a medida do raio da base maior, sabendo que o volume do tronco de cone é  $399\pi \text{ cm}^3$ .
- 810.** O plano que contém uma das bases de um cilindro equilátero contém uma das bases de um tronco de cone. Sabendo que as outras duas bases, do cilindro e do tronco, são comuns, calcule a relação entre os volumes do cilindro e do tronco de cone, sabendo que as bases comuns têm raios  $10 \text{ cm}$ , sendo  $30 \text{ cm}$  a medida da geratriz do tronco do cone.
- 811.** Um tronco de cone reto tem bases circulares de raios  $R$  e  $r$ . Qual a altura para que a superfície lateral seja igual à soma das superfícies das bases?

- 812.** A altura de um tronco de cone mede  $1\text{ m}$ . O diâmetro da base maior é duas vezes o diâmetro da base menor. A geratriz forma um ângulo de  $45^\circ$  com o plano da base maior. Determine o volume do tronco de cone.
- 813.** Os raios das bases de um tronco de cone medem  $20\text{ cm}$  e  $10\text{ cm}$ , sendo que a geratriz forma com o plano da base maior um ângulo de  $45^\circ$ . Determine o volume do tronco de cone.
- 814.** Determine o apótema de um tronco de cone de bases paralelas, sabendo que a soma de suas circunferências equivale à circunferência de um círculo de raio  $R$  e que a superfície lateral equivale à superfície desse círculo.
- 815.** Um cilindro e um tronco de cone (circulares retos) têm uma base comum e mesma altura. O volume do tronco é a metade do volume do cilindro. Determine a razão entre o raio da base maior e o raio da base menor do tronco.
- 816.** Se a altura de um tronco de cone é igual a quatro vezes a diferença dos raios das bases, o volume desse tronco é igual à diferença dos volumes de duas esferas cujos raios são os raios das bases do tronco de cone.
- 817.** Numa secção plana feita a uma distância de  $2\text{ m}$  do centro de uma esfera, está inscrito um triângulo equilátero de área  $3\sqrt{3}\text{ m}^2$ . Determine o volume do tronco de cone circular cujas bases são a secção referida e a secção diametral que lhe é paralela.
- 818.** Em um tronco de cone de revolução, os raios das bases e a altura medem, respectivamente,  $r$ ,  $2r$ ,  $4r$ .
- Ache a área lateral do tronco.
  - A que distância  $x$  da base maior se deve fixar um ponto  $V$ , sobre o eixo do cone, de modo que sejam iguais as áreas laterais dos dois cones, tendo  $V$  por vértice e por bases as do tronco.
- 819.** Sobre base comum foram construídos dois cones retos (um dentro do outro). O raio da base é  $R$ . Um plano paralelo à base, que passa pelo vértice do cone menor, intercepta o cone maior segundo um círculo de raio  $r$ . A altura do cone menor é  $h$ . Ache o volume do sólido compreendido entre as superfícies laterais desses dois cones.
- 820.** Dois troncos de cone  $T_1$  e  $T_2$  têm uma base comum de raio igual a  $8\text{ cm}$ , sendo as outras bases círculos concêntricos. Sabendo que o raio da base maior de  $T_1$  é igual a  $14\text{ cm}$  e o volume de  $T_1$  é o triplo do volume de  $T_2$ , determine a razão entre as áreas das bases não comuns dos troncos  $T_2$  e  $T_1$ , nessa ordem.
- 821.** Sendo a geratriz de um tronco de cone a soma dos raios das bases do tronco, então a metade da altura do tronco é média geométrica entre os raios das bases e o volume do tronco é igual ao produto de sua área total pela sexta parte da altura.
- 822.** Determine as medidas dos raios das bases de um tronco de cone de revolução, sendo  $h$  a medida de sua altura,  $g$  a medida de sua geratriz e  $a^2 h \pi / 3$  o seu volume. Discuta.

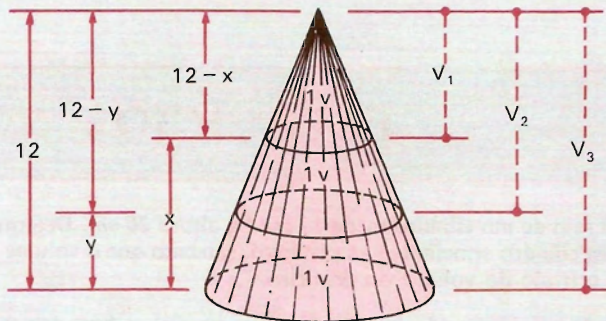
## IV. Problemas gerais sobre sólidos semelhantes e troncos

### EXERCÍCIOS

- 823.** O raio de um cilindro mede  $10\text{ cm}$  e a altura  $20\text{ cm}$ . Determine as dimensões de um cilindro semelhante ao primeiro, sabendo que o volume do segundo cilindro é o triplo do volume do primeiro.
- 824.** A área determinada pela secção plana paralela à base de uma pirâmide de  $15\text{ cm}$  de altura é os  $3/5$  da área da base. Calcule a distância da base da pirâmide à secção plana.
- 825.** Secciona-se uma pirâmide  $PABCDE$  por um plano paralelo à base, determinando o pentágono  $MNORS$ . Sendo  $PA$  e  $PM$ , respectivamente,  $15\text{ m}$  e  $10\text{ m}$  e a superfície  $ABCDE$ ,  $375\text{ cm}^2$ , calcule a área do pentágono  $MNORS$ .
- 826.** Determine o volume de um cone cuja superfície lateral é os  $3/4$  da superfície de um cone semelhante de altura  $21\text{ cm}$  e raio da base  $20\text{ cm}$ .
- 827.** Um plano paralelo à base de um cone secciona-o a uma distância  $d$  do vértice do cone. Sendo  $g$  a geratriz do cone e  $r$  o raio da base do cone, determine a área da secção, sendo  $A$  a área da base do cone.
- 828.** Duas pirâmides têm alturas iguais a  $14\text{ m}$  cada uma. A primeira tem por base um quadrado de lado  $9\text{ m}$  e a segunda um hexágono de  $7\text{ m}$  de lado. Um plano secciona as duas pirâmides a  $6\text{ m}$  do vértice. Obtenha a relação entre as áreas das secções determinadas na primeira e na segunda pirâmide.
- 829.** Determine a distância do vértice de um cone a um ponto de sua geratriz, sabendo que um plano contendo esse ponto e paralelo à base do cone secciona-o, dividindo a superfície lateral do cone em duas superfícies equivalentes, e que a geratriz do cone mede  $36\text{ cm}$ .
- 830.** Dado um cone circular reto, a que distância do vértice se deve traçar um plano paralelo à base de modo que o volume do tronco, assim determinado, seja metade do volume do cone dado.
- 831.** A que distância do vértice devemos traçar um plano paralelo à base de um cone cujo raio da base mede  $7\text{ cm}$  e altura  $24\text{ cm}$ , de modo que o cone fique dividido em dois sólidos equivalentes?

- 832.** A que distâncias das bases de um cone de  $12\text{ m}$  de altura devemos passar dois planos paralelos à base para que o sólido fique dividido em três partes equivalentes?

**Solução**



$$\left. \begin{aligned} \frac{V_1}{V_3} &= \frac{1}{3} \\ \frac{V_1}{V_3} &= \left(\frac{12-x}{12}\right)^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{12-x}{12} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow 12-x = 4\sqrt[3]{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 4(3 - \sqrt[3]{9})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_2}{V_3} &= \frac{2}{3} \\ \frac{V_2}{V_3} &= \left(\frac{12-y}{12}\right)^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{12-y}{12} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow 12-y = 4\sqrt[3]{18} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 4(3 - \sqrt[3]{18})$$

Resposta:  $4(3 - \sqrt[3]{9})\text{ m}$  e  $(3 - \sqrt[3]{18})\text{ m}$ .

- 833.** Corte uma pirâmide de altura  $h$  por um plano paralelo à base, de modo que o volume da pirâmide menor seja  $1/8$  do volume do tronco.
- 834.** Num cone de revolução, a geratriz tem  $g\text{ cm}$  e a área da base  $B\text{ cm}^2$ . Calcule a área de uma secção feita a  $l\text{ cm}$  do vértice.
- 835.** Um ângulo poliédrico  $PABCD$  é seccionado por um plano perpendicular à aresta  $PA$ , obtendo-se por secção um losango  $ABCD$  de  $10\text{ cm}$  de lado. Sabendo que o diedro da aresta  $PA$  do ângulo poliédrico dado mede  $60^\circ$  e que o segmento  $PA$  mede  $10\text{ cm}$ , calcule a distância do vértice  $P$  do ângulo poliédrico ao vértice  $C$  do losango secção.
- 836.** Um plano paralelo à base de um cone secciona-o, determinando dois cones  $C_1$  e  $C_2$ . Sendo  $g$  e  $R$ , respectivamente, a geratriz e o raio da base de  $C_1$ , determine a distância do vértice do cone  $C_1$  à base do cone menor  $C_2$ , sabendo que a área lateral de  $C_1$  é igual à área total do cone menor  $C_2$ .



- 837.** Sabendo que o semiperímetro da secção meridiana de um cone de revolução mede  $(6 + 3\sqrt{2})$  cm e que essa secção é um triângulo retângulo isósceles, determine a que distância do vértice devemos traçar um plano paralelo à base do cone para que a área lateral do novo cone seja a quinta parte da área lateral do cone maior.
- 838.** Um plano paralelo à base de um cone, de geratriz  $g$  e raio de base  $r$ , secciona-o. Sabendo que a área da base do cone obtido é média geométrica entre as duas partes em que fica dividida a superfície lateral do cone, determine a distância do vértice do cone a esse plano.
- 839.** Determine a distância do vértice de um cone a um plano que o secciona paralelamente à base, sabendo que o raio do cone mede  $r$ , sua geratriz  $g$  e que a secção obtida é equivalente à área lateral do tronco de cone formado.
- 840.** Consideremos um cone de revolução de geratriz  $g$  e raio da base  $r$ . Determine a distância do vértice do cone a um plano que o secciona paralelamente à sua base de modo que os dois sólidos obtidos tenham superfícies totais equivalentes.
- 841.** A altura de um cone de revolução e o raio da base medem  $1$  cm e  $5$  cm, respectivamente. A que distância do vértice devemos traçar um plano paralelo à base do cone de modo que o volume do tronco de cone seja média geométrica entre o cone dado e o cone menor formado?
- 842.** Um cone tem  $320\pi$  m<sup>2</sup> de área total e  $12$  m de altura. Calcule o volume e a área lateral do tronco obtido pela secção desse cone por um plano paralelo à base e distante  $9$  m dessa base.
- 843.** O volume de uma pirâmide é  $V$  e a aresta lateral é  $\ell$ . Ache um ponto da aresta, tal que o plano paralelo à base, passando por ele, determine uma pirâmide de volume  $V'$ .
- 844.** Uma pirâmide tem o volume  $V = 15$  dm<sup>3</sup> e uma de suas arestas (laterais) mede  $32$  cm. Pelo ponto  $A$  (dessa aresta lateral), à distância de  $4$  cm do vértice da pirâmide, conduz-se o plano paralelo à base (da pirâmide). Calcule o volume de cada um dos sólidos obtidos por esse plano.
- 845.** A geratriz de um cone mede  $4$  m. A que distâncias do vértice se devem traçar, sobre a geratriz, planos paralelos à base do cone de modo que o cone fique dividido em 3 sólidos de volumes  $2$  m<sup>3</sup>,  $3$  m<sup>3</sup> e  $5$  m<sup>3</sup>?
- 846.** Uma pirâmide triangular regular tem de aresta lateral  $10$  dm e para apótema da base  $3$  dm. Corta-se essa pirâmide por um plano paralelo à base e cuja distância ao vértice é  $4$  dm. Calcule o volume do tronco de pirâmide obtido.
- 847.** Dada uma pirâmide de  $12$  metros de altura, a que distância do vértice devemos passar dois planos paralelos à base para obter três volumes iguais?

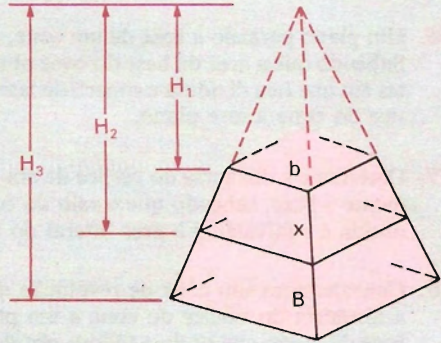
- 848.** Corta-se um tronco de pirâmide de bases paralelas por um plano paralelo às bases e cuja relação das distâncias a essas bases é  $m : n$ . Ache a área da secção, conhecendo as áreas  $B$  e  $b$  do tronco.

**Solução**

$$\frac{H_2 - H_1}{H_3 - H_2} = \frac{m}{n} \quad (1)$$

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}} \Rightarrow H_1 = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}} H_2$$

$$\frac{H_3}{H_2} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{x}} \Rightarrow H_3 = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{x}} H_2$$



Substituindo  $H_1$  e  $H_3$  em (1):

$$\frac{H_2 - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}} H_2}{\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{x}} H_2 - H_2} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{\sqrt{x} - \sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{x}} = \frac{m}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n\sqrt{x} - n\sqrt{b} = m\sqrt{B} - m\sqrt{x} \Rightarrow (m+n)\sqrt{x} = m\sqrt{B} + n\sqrt{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{m\sqrt{B} + n\sqrt{b}}{m+n} \Rightarrow x = \left( \frac{m\sqrt{B} + n\sqrt{b}}{m+n} \right)^2$$

Resposta:  $\left( \frac{m\sqrt{B} + n\sqrt{b}}{m+n} \right)^2$ .

- 849.** A que distância do vértice de uma pirâmide estão situadas duas secções feitas por planos paralelos à base da pirâmide, cujas áreas são  $49 \text{ m}^2$  e  $64 \text{ m}^2$ , respectivamente, e sendo  $30 \text{ m}$  a distância entre elas?
- 850.** A altura de uma pirâmide é dividida em seis partes iguais e pelos pontos de divisão são traçados planos paralelos à base. Sabendo que a área da base é  $360$ , determine a soma das áreas das cinco secções da pirâmide pelos referidos planos.
- 851.** Como deve ser dividida a altura de uma pirâmide, paralelamente à base, para obter duas partes de volumes iguais? Generalize para  $n$  partes equivalentes.
- 852.** A aresta lateral  $PA$  de uma pirâmide mede  $12 \text{ m}$ . Que comprimento devemos tomar sobre essa aresta, a partir do vértice, para que um plano paralelo à base divida a pirâmide em dois sólidos cujos volumes são proporcionais a  $3$  e  $4$ ?

- 853.** A que distâncias do vértice se devem traçar, sobre a altura de um cone, planos paralelos à base do cone, de modo que o cone fique dividido em 3 sólidos de volumes iguais, sendo  $21\text{ m}$  a altura do cone?
- 854.** A aresta lateral  $PA$  de uma pirâmide mede  $20\text{ m}$ . Que comprimento devemos tomar sobre essa aresta, a partir do vértice, para que dois planos paralelos à base dividam a pirâmide em três sólidos cujos volumes são proporcionais a  $4$ ,  $5$  e  $6$ ?
- 855.** Dois planos paralelos a base de uma pirâmide dividem-na em três sólidos, que, considerados a partir do vértice da pirâmide, têm volumes diretamente proporcionais aos números  $27$ ,  $98$  e  $91$ . Calcule as distâncias dos dois planos secantes ao da base, sabendo que a altura da pirâmide é igual a  $12\text{ cm}$ .
- 856.** É dado o cone circular reto cujo raio da base tem comprimento  $r$  e cuja geratriz faz com o plano da base um ângulo de  $60^\circ$ . Determine a que distância do vértice deve ser traçado um plano paralelo à base para que a área total do tronco de cone, assim determinado, seja igual a  $7/8$  da superfície total do cone.
- 857.** A área lateral de uma pirâmide regular de base quadrada é  $240\text{ m}^2$ . O comprimento do lado da base é  $3/2$  da altura. Conduz-se um plano paralelo ao plano da base; a secção está a  $1/4$  da altura, a partir do vértice. Qual a área da secção?
- 858.** A que distância do vértice de um cone circular reto de raio  $R$  e geratriz  $g$  se deve passar um plano paralelo à base, de modo que a área da secção seja igual à da superfície lateral do cone?
- 859.** Um cone circular tem raio  $2\text{ m}$  e altura  $4\text{ m}$ . Qual é a área da secção transversal, feita por um plano, distante  $1\text{ m}$  do seu vértice?
- 860.** Dado um tronco de cone reto, cuja altura é igual a  $3\text{ m}$  e cujas bases têm raios  $4\text{ m}$  e  $1\text{ m}$ , respectivamente, divida esse tronco de cone por um plano paralelo às bases, de maneira que o volume da parte adjacente à base maior seja equivalente a  $8$  vezes o volume da outra parte.
- 861.** Conhecidos os raios  $r$  e  $R$  das bases de um tronco de cone de bases paralelas, determine o raio de uma secção paralela às bases, tal que divida o tronco em duas partes cujos volumes estão na razão  $a : b$ .
- 862.** Secciona-se um tronco de pirâmide de bases paralelas por um plano paralelo às bases, de modo que a razão entre os volumes dos sólidos obtidos é  $p/q$ . Ache a área da secção, conhecendo as áreas  $B$  e  $b$  das bases do tronco.
- 863.** Consideremos a pirâmide regular  $SABC$  de altura  $H$ , tendo por base o triângulo equilátero  $ABC$  de lado  $a$ . Seja  $r$  o raio do círculo inscrito nesse triângulo. A que distância  $x$  do vértice devemos seccionar a pirâmide por um plano paralelo à base, de modo que a área da secção  $A'B'C'$  seja igual à área do círculo inscrito em  $ABC$ ?

- 864.** A geratriz  $AB$  de um tronco de cone mede  $13\text{ m}$  e os raios das bases  $3\text{ m}$  e  $8\text{ m}$ , respectivamente. A partir do ponto  $B$ , pertencente à base maior, que comprimento devemos tomar sobre  $AB$  para que um plano paralelo às bases seccione esse tronco, determinando, na parte superior do tronco dado, outro tronco de cone de volume  $\frac{1612\pi}{27} m^3$ ?
- 865.** Determine a relação entre os volumes de dois troncos de pirâmides de igual altura obtidos da secção por um plano paralelo às bases de um tronco de pirâmide de bases paralelas, sendo  $a$  e  $b$  as áreas das bases do tronco de pirâmide primitivo.
- 866.** As bases de um tronco de pirâmide são quadrados de lados  $24\text{ cm}$  e  $12\text{ cm}$ , sendo a altura do tronco  $36\text{ cm}$ . Um plano intercepta o tronco de pirâmide no ponto de intersecção de suas diagonais, paralelamente às bases. Calcule o volume dos dois sólidos obtidos.
- 867.** Um plano secciona uma pirâmide onde uma de suas arestas mede  $12\text{ cm}$ . Sendo esse plano paralelo à base da pirâmide e  $3/5$  a razão entre os volumes da pirâmide menor e tronco de pirâmide, determine as medidas dos segmentos em que a aresta fica dividida por esse plano.
- 868.** Dois planos paralelos às bases de um tronco de cone de raios  $r$  e  $R$  seccionam o tronco, dividindo-o em três sólidos de volumes iguais. Determine a relação entre as áreas das secções.

## V. Tronco de prisma triangular

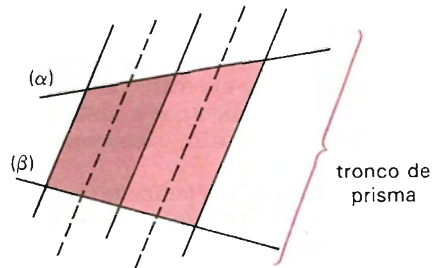
### 242. Conceito

Consideremos:

- um prisma ilimitado;
- dois planos, não paralelos, secantes a esse prisma;
- a intersecção desses dois planos externa ao prisma ilimitado.

Nessas condições, o sólido que é a reunião das duas secções com a parte do prisma ilimitado compreendida entre os dois planos é chamado *tronco de prisma*.

As secções são as *bases* do tronco de prisma.



### 243. Volume de um tronco de prisma triangular

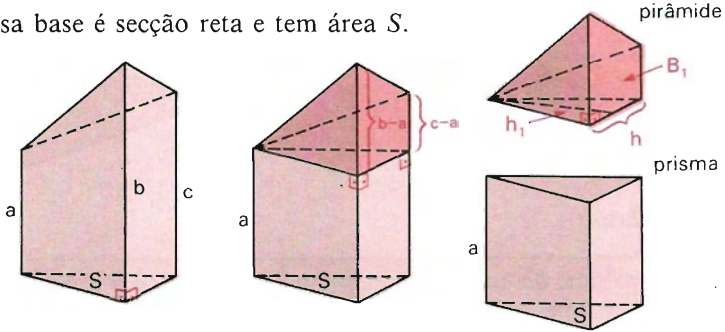
São dados:

a área de uma secção reta =  $S$

as medidas  $a$ ,  $b$  e  $c$  das arestas laterais.

1º) *Tronco de prisma triangular com uma base perpendicular às arestas laterais*

Essa base é secção reta e tem área  $S$ .



Com a decomposição indicada na figura, temos:

Volume do tronco = Volume do prisma + Volume da pirâmide

ou seja:

$$V = S \cdot a + \frac{1}{3} B_1 \cdot h_1$$

sendo

$$B_1 = \text{Área do trapézio} = \frac{(c-a) + (b-a)}{2} h, \text{ temos:}$$

$$V = S \cdot a + \frac{1}{3} \cdot \frac{(c-a) + (b-a)}{2} \cdot h \cdot h_1$$

e considerando que  $S = \frac{h \cdot h_1}{2}$  vem:

$$V = S \cdot a + \frac{1}{3} (b+c-2a) \frac{h \cdot h_1}{2} = S \cdot a + \frac{1}{3} (b+c-2a) \cdot S = S \left( \frac{a+b+c}{3} \right)$$

$$V = S \left( \frac{a+b+c}{3} \right)$$

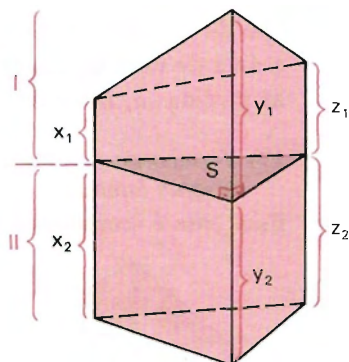
### 2º) Tronco de prisma triangular qualquer

O plano de uma secção reta (de área  $S$ ) divide o tronco de prisma em dois do tipo considerado acima.

$$V = V_I + V_{II}$$

$$V = S \cdot \frac{x_1 + y_1 + z_1}{3} + S \cdot \frac{x_2 + y_2 + z_2}{3} \Rightarrow$$

$$V = S \cdot \left( \frac{a + b + c}{3} \right)$$



#### Conclusão

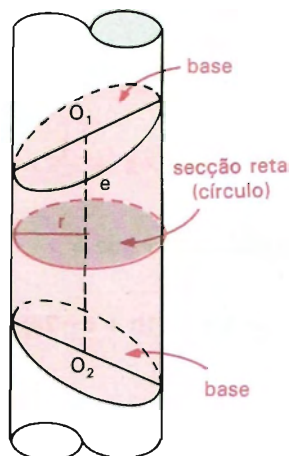
O volume de um tronco de prisma triangular é o produto da área da secção reta pela média aritmética das arestas laterais.

## VI. Tronco de cilindro

### 244. Conceito

Consideremos:

- um cilindro circular ilimitado;
- dois planos não paralelos, secantes a esse cilindro;
- a interseção desses dois planos externa ao cilindro ilimitado.

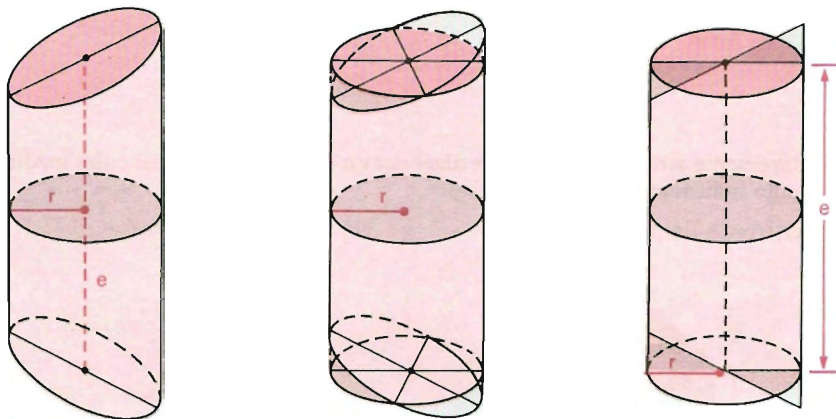


Nessas condições, o sólido que é a reunião das duas secções com a parte do cilindro ilimitado compreendidas entre os dois planos é chamado *tronco de cilindro circular*.

O segmento com extremidades nos centros das secções é o *eixo*.

### 245. Volume e área lateral

Dado um tronco de cilindro circular de raio  $r$  e eixo  $e$ , podemos obter um cilindro circular reto que lhe é equivalente e tem mesma área lateral.



Assim, temos para o tronco do cilindro:

$$V = V_{\text{cilindro}} \Rightarrow V = \pi r^2 \cdot e$$

$$A_f = A_{f_{\text{cilindro}}} \Rightarrow A_f = 2\pi r \cdot e$$

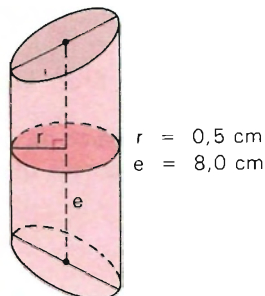
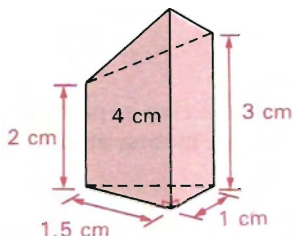
## EXERCÍCIOS

869. Um prisma triangular regular é seccionado por um plano não paralelo à sua base, obtendo-se um tronco de prisma cujas arestas laterais medem  $3\text{ cm}$ ,  $5\text{ cm}$  e  $7\text{ cm}$ , respectivamente. Sendo  $5\text{ cm}$  a medida da aresta da base, determine o volume desse tronco de prisma.

**870.** Calcule o volume dos troncos cujas medidas estão indicadas nas figuras abaixo.

a) tronco de prisma triangular

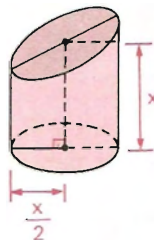
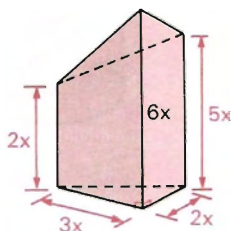
b) tronco de cilindro



**871.** Represente através de expressões algébricas o volume dos troncos cujas medidas estão indicadas nas figuras abaixo.

a) tronco de prisma triangular

b) tronco de cilindro



**872.** Determine o volume de um tronco de prisma, sabendo que sua base é um triângulo equilátero de lado  $10\text{ cm}$  e a soma das arestas laterais é  $24\text{ cm}$ .

**873.** As medidas das geratrizes maior e menor de um tronco de cilindro de revolução são, respectivamente,  $10\text{ cm}$  e  $8\text{ cm}$ . Determine a medida do raio da secção reta, sabendo que a área lateral do tronco de cilindro mede  $54\pi\text{ cm}^2$ .

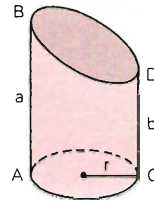
**874.** A secção reta de um tronco do prisma triangular de volume  $V\text{ cm}^3$  tem área de  $B\text{ cm}^2$ . Duas arestas laterais são  $a$  e  $b$ . Determine a outra.

**875.** Calcule a medida da área lateral e do volume de um tronco de cilindro de revolução cuja área da base mede  $36\pi\text{ cm}^2$ , sendo seu eixo igual ao diâmetro da base.

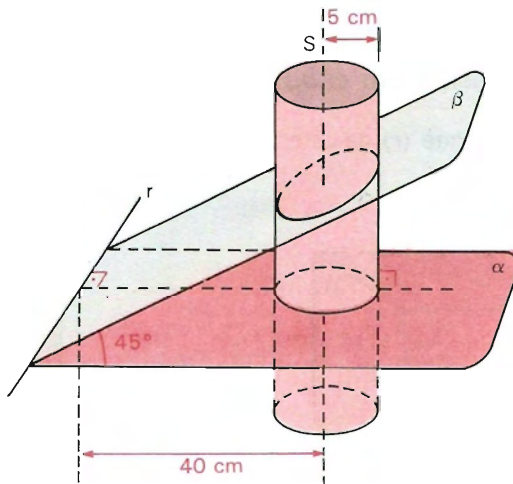
**876.** Demonstre que o volume de um tronco de prisma triangular é igual ao produto da área da secção reta pela distância dos centros de gravidade das duas bases.



- 877.** Um cilindro circular reto é cortado por um plano não paralelo à sua base, resultando no sólido ilustrado na figura. Calcule o volume desse sólido em termos do raio da base  $r$ , da altura máxima  $AB = a$  e da altura mínima  $CD = b$ .



- 878.** Uma secção plana que contém o eixo de um tronco de cilindro é um trapézio cujas bases menor e maior medem, respectivamente,  $h$  cm e  $H$  cm. Duplicando a base menor, o volume sofre um acréscimo de  $\frac{1}{3}$  em relação ao seu volume original. Determine  $H$  em função de  $h$ .
- 879.** Na figura abaixo representamos: dois planos,  $\alpha$  e  $\beta$ , cuja interseção é a reta  $r$  e o ângulo entre eles é  $45^\circ$ ; uma reta  $s$  perpendicular ao plano  $\alpha$ , tal que a distância entre as retas  $r$  e  $s$  é igual a  $40$  cm e um cilindro de raio  $5$  cm, cujo eixo é a reta  $s$ . Determine o volume do tronco de cilindro, limitado pelos planos  $\alpha$  e  $\beta$ .



## CAPÍTULO XIV

# Inscrição e Circunscrição de Sólidos

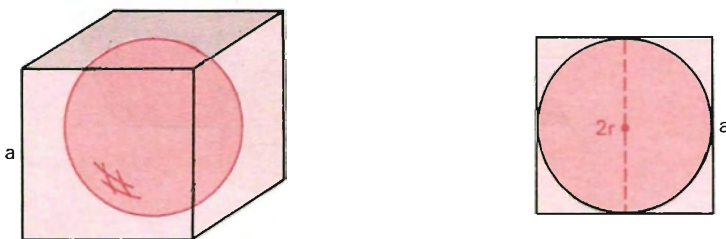
Neste capítulo apresentaremos sob forma de problemas a inscrição e a circunscrição dos sólidos mais comuns: prisma, pirâmide, poliedros em geral, cilindro, cone e esfera.

## I. Esfera e cubo

### 246. Esfera inscrita em cubo

Cálculo do raio ( $r$ ) da esfera inscrita num cubo de aresta  $a$ .

**Solução**



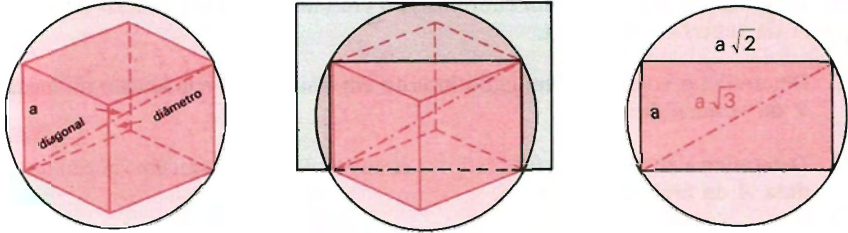
O diâmetro da esfera é igual à aresta do cubo.

$$2r = a \Rightarrow r = \frac{a}{2}$$

### 247. Esfera circunscrita ao cubo

Cálculo do raio ( $R$ ) da esfera circunscrita a um cubo de aresta  $a$ .

**Solução**



O diâmetro da esfera é igual à diagonal do cubo.

$$2R = a\sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

## EXERCÍCIOS

- 880.** Determine o volume de uma esfera inscrita em um cubo de  $1 \text{ dm}$  de aresta.
- 881.** Determine o volume de uma esfera circunscrita a um cubo de  $12 \text{ cm}$  de aresta.
- 882.** Determine o volume de um cubo inscrito em uma esfera de  $8 \text{ cm}$  de raio.
- 883.** Determine a área lateral e o volume de um cubo circunscrito a uma esfera de  $25 \pi \text{ cm}^2$  de superfície.
- 884.** Determine o volume de uma esfera circunscrita a um cubo cuja área total mede  $54 \text{ cm}^2$ .
- 885.** Determine o volume de um cubo inscrito em uma esfera cujo volume mede  $2,304 \pi \text{ cm}^3$ .
- 886.** Determine a razão entre a área da esfera e a do cubo inscrito nessa esfera.
- 887.** Calcule a razão entre os volumes de dois cubos, o primeiro inscrito e o segundo circunscrito a uma mesma esfera.

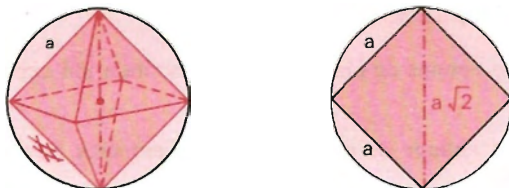
- 888.** Determine a razão entre o volume da esfera inscrita e da esfera circunscrita a um cubo de aresta  $a$ .
- 889.** Calcule o volume de um cubo inscrito em uma esfera cujo raio mede  $r$ .
- 890.** Determine o volume de um cubo inscrito em uma esfera em função da medida  $A$  da superfície da esfera.
- 891.** Determine o volume de um cubo inscrito em uma esfera em função da medida  $V$  do volume da esfera.
- 892.** Determine a área da superfície esférica circunscrita a um cubo, em função da medida  $A$  da área total do cubo.
- 893.** Determine a distância do centro de uma esfera inscrita em um cubo a um dos vértices do cubo, sabendo que a superfície da esfera mede  $54,76 \pi \text{ cm}^2$ .
- 894.** Determine a diagonal de um cubo circunscrito a uma esfera na qual uma cunha de  $60^\circ$  tem área total igual a  $60 \pi \text{ cm}^2$ .
- 895.** Uma esfera está inscrita em um cubo. Calcule o volume do espaço compreendido entre a esfera e o cubo, sabendo que a área lateral do cubo mede  $144 \pi \text{ cm}^2$ .
- 896.** Cada vértice de um cubo é centro de uma esfera de raio igual a  $4 \text{ cm}$ ; sendo  $8 \text{ cm}$  a medida da aresta do cubo, calcule o volume da parte do cubo exterior às esferas.

## II. Esfera e octaedro regular

### 248. Esfera circunscrita ao octaedro regular

Cálculo do raio ( $R$ ) da esfera circunscrita a um octaedro regular de aresta  $a$ .

**Solução**



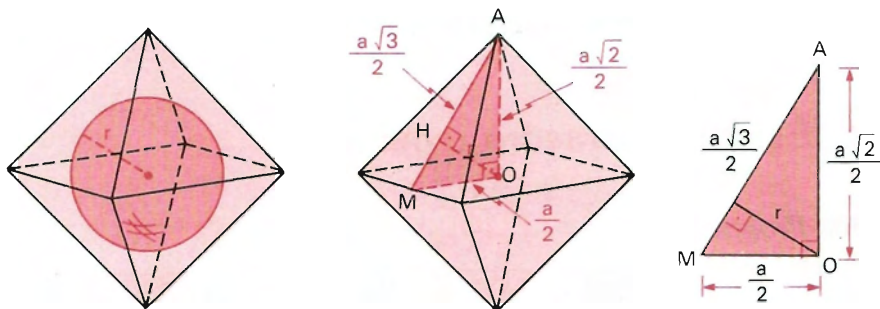
O diâmetro da esfera é igual à diagonal do octaedro (diagonal do quadrado).

$$2R = a\sqrt{2} \implies R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

### 249. Esfera inscrita em um octaedro regular

Cálculo do raio ( $r$ ) da esfera inscrita num octaedro regular de aresta  $a$ .

#### Solução



O raio da inscrita é a altura  $OH$  do triângulo retângulo  $AOM$ .

Aplicando relações métricas no  $\triangle AOM$  (hipotenusa  $\times$  altura = produto dos catetos):

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot r = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} \implies r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

**Nota:** A distância entre duas faces paralelas do octaedro regular é  $2r$ .

## EXERCÍCIOS

- 897.** Calcule o volume de um octaedro regular inscrito em uma esfera de volume igual a  $36\pi \text{ cm}^3$ .
- 898.** Determine o volume compreendido entre uma esfera de raio  $r$  e um octaedro regular inscrito nessa esfera.
- 899.** Determine a área total do octaedro regular inscrito em uma esfera cujo círculo máximo tem  $36\pi \text{ cm}^2$  de área.
- 900.** Duas esferas são circunscrita e inscrita em um mesmo octaedro. Calcule a razão entre seus volumes.

- 901.** Calcule o perímetro  $P$  e a área  $S$  da secção produzida num octaedro regular circunscrito a uma esfera de  $\sqrt{6} \text{ dm}$  de diâmetro pelo plano que contém o centro dessa esfera e que é paralelo a uma das faces do octaedro.
- 902.** Dada uma esfera de  $6\sqrt{2} \text{ m}$  de diâmetro, considere o octaedro regular nela inscrito, bem como o plano paralelo a duas faces opostas do octaedro, tal que suas distâncias a essas duas faces sejam diretamente proporcionais aos números 1 e 2. Calcule a área da secção que o plano considerado produz no octaedro regular.

### III. Esfera e tetraedro regular

#### 250. Propriedade

“Num tetraedro regular, a soma das distâncias de um ponto interior qualquer às quatro faces é igual à altura do tetraedro.”

#### Demonstração

Sendo  $I$  um ponto interior;  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $t$  as respectivas distâncias às faces  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $ACD$  e  $BCD$ , devemos provar que:

$$x + y + z + t = h$$

em que  $h$  é a altura do tetraedro.

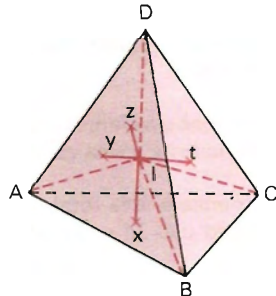
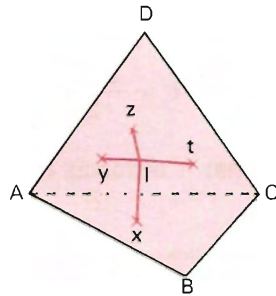
De fato, a soma dos volumes das pirâmides  $IABC$ ,  $IABD$ ,  $IACD$  e  $IBCD$  é igual ao volume de  $ABCD$ .

Sendo  $S$  a área de uma face do tetraedro, vem:

$$\frac{1}{3} Sx + \frac{1}{3} Sy + \frac{1}{3} Sz + \frac{1}{3} St = \frac{1}{3} Sh$$

então:

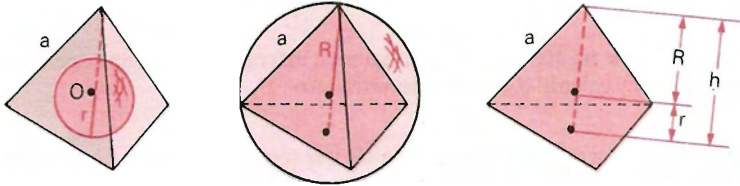
$$x + y + z + t = h.$$



### 251. Esfera inscrita e esfera circunscrita ao tetraedro regular

Cálculo do raio da esfera inscrita ( $r$ ) e da esfera circunscrita ( $R$ ) a um tetraedro regular de aresta  $a$ .

#### Solução



Sendo o centro ( $O$ ) um ponto interior do tetraedro regular, para ele vale a propriedade acima, isto é:

$x + y + z + t = h$  e, como  $x = y = z = t = r$ , vem

$$4r = h \Rightarrow r = \frac{1}{4} h$$

e como  $R + r = h$ , então:

$$R = \frac{3}{4} h.$$

Sendo  $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ , temos:  $r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$  e  $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ .

### 252. Esfera tangente às arestas

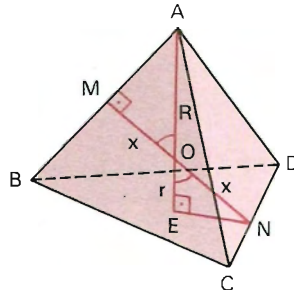
O raio da esfera tangente às arestas de um tetraedro regular é média geométrica (ou média proporcional) entre os raios das esferas inscrita e circunscrita ao mesmo tetraedro.

#### Solução

$R$ ,  $r$  e  $x$  são os respectivos raios das esferas circunscrita, inscrita e tangente.

$$\triangle AMO \sim \triangle NEO \Rightarrow \frac{x}{r} = \frac{R}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = R \cdot r$$



## EXERCÍCIOS

- 903.** Um tetraedro regular é inscrito numa esfera de  $12\text{ cm}$  de diâmetro. Qual o volume do tetraedro?
- 904.** Um tetraedro regular é circunscrito a uma esfera. Se a área da superfície da esfera é  $3\pi\text{ m}^2$ , calcule o volume do tetraedro.
- 905.** Determine a área total e o volume de um tetraedro regular circunscrito a uma esfera de raio  $R$ .
- 906.** Determine o volume da esfera inscrita num tetraedro regular de aresta  $a$ .
- 907.** Calcule a área da superfície da esfera circunscrita a um tetraedro regular de aresta  $a$ .
- 908.** Calcule as áreas e os volumes das esferas inscrita e circunscrita a um tetraedro regular de aresta  $a$ .
- 909.** Determine a medida da aresta de um tetraedro regular em função do volume  $V$  da esfera circunscrita.
- 910.** Em uma esfera inscreve-se um tetraedro regular e neste tetraedro regular inscreve-se uma nova esfera. Determine a relação entre as superfícies das esferas.
- 911.** Em um tetraedro regular inscreve-se uma esfera e nesta esfera inscreve-se um novo tetraedro regular. Determine a relação entre os volumes dos dois tetraedros.

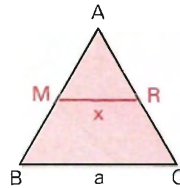
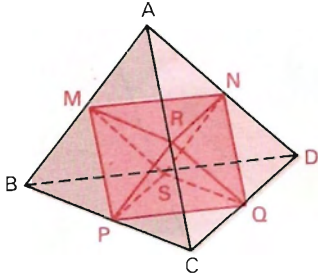


## IV. Inscrição e circunscrição envolvendo poliedros regulares

### 253. Tetraedro regular e octaedro regular

Cálculo da aresta ( $x$ ) do octaedro regular determinado pelos pontos médios das arestas de um tetraedro regular de aresta  $a$ .

**Solução**



$a$  = aresta do tetraedro

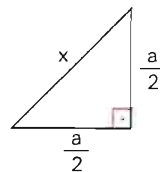
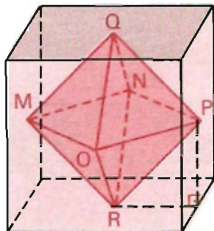
$x$  = aresta do octaedro

$M$  e  $R$  são pontos médios dos lados do  $\triangle ABC$ :  $x = \frac{a}{2}$ .

### 254. Cubo e octaedro regular

Cálculo da aresta ( $x$ ) do octaedro determinado pelos centros das faces de um cubo de aresta  $a$ .

**Solução**



$a$  = aresta do cubo

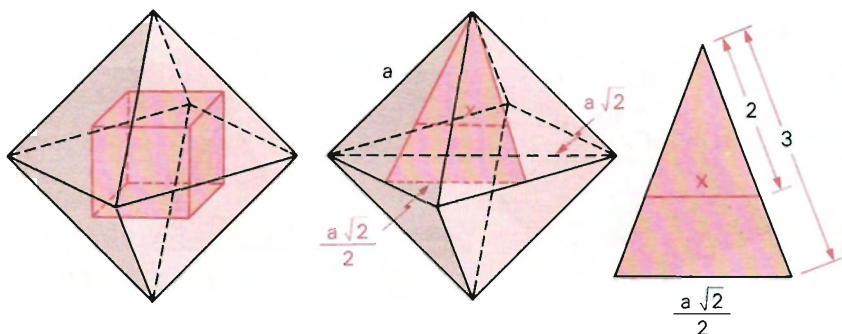
$x$  = aresta do octaedro

$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

### 255. Octaedro regular e cubo

Cálculo da aresta ( $x$ ) do cubo determinado pelos centros das faces de um octaedro regular de aresta  $a$ .

#### Solução



$a$  = aresta do octaedro

$x$  = aresta do cubo

Os centros das faces do octaedro são baricentros dessas faces, então:

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

### 256. Cubo e tetraedro regular

Cálculo da aresta ( $x$ ) do tetraedro regular com vértices nos vértices de um cubo de aresta  $a$ .

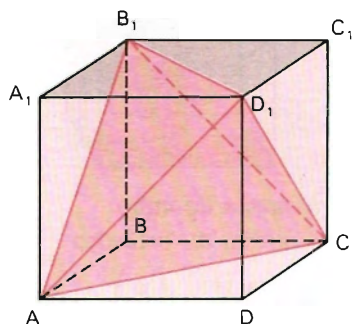
#### Solução

$ACB_1D_1$  é tetraedro regular

$a$  = aresta do cubo

$x$  = aresta do tetraedro

$$x = a\sqrt{2}$$



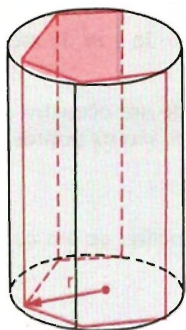
## EXERCÍCIOS

- 912.** Dado um tetraedro regular de aresta  $a$ , determine:
- a aresta do octaedro cujos vértices são pontos médios das arestas do tetraedro;
  - a aresta do cubo cujos vértices são centros das faces do octaedro obtido acima;
  - a aresta de um novo octaedro, cujos vértices são centros das faces do cubo obtido acima.
- 913.** Determine o volume de um tetraedro inscrito num cubo de  $3\text{ m}$  de aresta.
- 914.** O segmento  $AB$  de medida  $8\text{ cm}$  é uma das diagonais de um octaedro regular. Calcule a área total do hexaedro convexo, cujos vértices são os pontos médios das arestas do octaedro dado.
- 915.** Calcule a razão entre as áreas totais  $A$  e  $B$ , respectivamente, de um cubo e do octaedro regular nele inscrito.
- 916.** Escolha 4 dos vértices de um cubo, de modo a formar um tetraedro regular. Sendo  $V$  o volume do cubo, qual o volume desse tetraedro?
- 917.** Dado um tetraedro regular, estude o poliedro  $P$  que tem como vértice os pontos médios das arestas do tetraedro. Se  $\ell$  é o lado do tetraedro, calcule a área total e o volume de  $P$ .
- 918.** Dado um cubo de aresta igual a  $\ell$ , considera-se o octaedro que tem por vértices os centros das faces do cubo. Calcule a área da superfície esférica inscrita no octaedro.
- 919.** Dados um cubo e um tetraedro regular nele inscrito, considere o plano que contém o centro do cubo e que é paralelo a uma das faces do tetraedro. Calcule a razão entre as áreas das secções que esse plano produz nos dois sólidos dados.

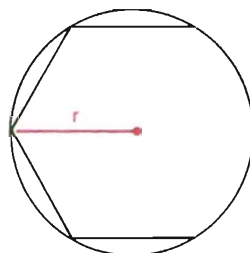
## V. Prisma e cilindro

### 257. Prisma inscrito em cilindro

Eles têm a mesma altura. Basta trabalhar nas bases.

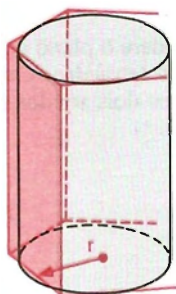


O raio da base do cilindro é o raio da circunferência circunscrita à base do prisma.

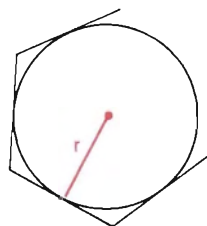


Base

### 258. Cilindro inscrito em prisma



O raio da base do cilindro é o raio da circunferência inscrita na base do prisma.



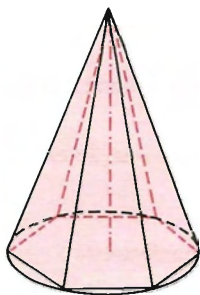
Base

## EXERCÍCIOS

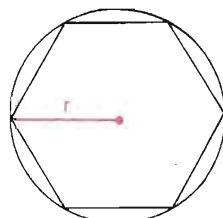
- 920.** Um prisma regular hexagonal está inscrito num cilindro equilátero. Qual é a razão entre as áreas laterais do prisma e do cilindro?
- 921.** Determine o volume de um cilindro circunscrito ao cubo cujo volume é  $343 \text{ cm}^3$ .
- 922.** Em um prisma triangular regular se inscreve um cilindro. Que relação existe entre as áreas laterais desses dois sólidos?
- 923.** Calcule o volume do sólido que se obtém quando de um cubo de aresta  $5 \text{ cm}$  retiramos um cilindro de diâmetro  $3 \text{ cm}$ .
- 924.** Calcule o volume do cilindro inscrito num prisma reto, de altura  $12,5 \text{ cm}$ , cuja base é um losango de diagonais  $8 \text{ cm}$  e  $6 \text{ cm}$ .
- 925.** Determine o volume de um cilindro de revolução circunscrito a um prisma triangular de  $12 \text{ cm}$  de altura, sendo a base do prisma um triângulo isósceles cujo ângulo do vértice mede  $30^\circ$ , sendo  $5 \text{ cm}$  a medida da base do triângulo.
- 926.** Um cilindro de  $30 \text{ cm}$  de diâmetro está inscrito em um prisma quadrangular regular de  $20 \text{ cm}$  de altura. Determine a diferença entre a área lateral do prisma e a área lateral do cilindro.
- 927.** Em um cilindro circular reto de raio  $R$  e altura  $h$ , inscreva um paralelogramo retângulo de base quadrada e calcule a área total desse paralelepípedo.
- 928.** Consideremos um prisma hexagonal regular de altura  $h$ , cujo lado da base mede  $a$ , e um cilindro inscrito e circunscrito a esse prisma.
- Calcule a área lateral e o volume do prisma.
  - Calcule a área lateral e o volume de cada um dos cilindros.
  - Determine a razão entre as áreas laterais e os volumes dos dois cilindros.

## VI. Pirâmide e cone

### 259. Pirâmide inscrita em cone

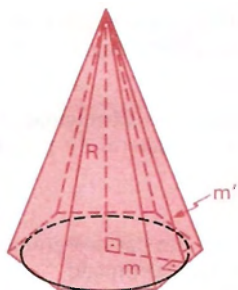


O raio da base do cone é o raio da circunferência circunscrita à base da pirâmide.

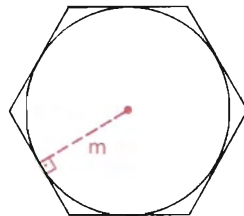


Base

### 260. Cone inscrito em pirâmide regular



O raio da base do cone é o apótema da base da pirâmide. A geratriz do cone é o apótema da pirâmide.



Base

## EXERCÍCIOS

- 929.** A área total de um cone reto é  $96 \pi \text{ cm}^2$  e o raio da base mede  $6 \text{ cm}$ . Determine o volume do cone e da pirâmide de base quadrada inscrita no cone.
- 930.** Uma pirâmide quadrangular regular está inscrita em um cone de revolução. O perímetro da base da pirâmide mede  $20\sqrt{2} \text{ cm}$ . Calcule a altura do cone, sabendo que a sua geratriz tem o mesmo comprimento da diagonal da base.

Para mais, acesse: <http://fvestibular.com.br/>

- 931.** Determine a área lateral e o volume de um cone circunscrito a uma pirâmide, sabendo que a altura da pirâmide de base quadrada é o triplo do lado da base e que o lado da base mede  $a$ .
- 932.** Um cone reto tem por base um círculo circunscrito a um hexágono regular. O apótema do cone é os  $5/3$  do lado do hexágono regular e a soma da geratriz com esse lado é  $16\text{ m}$ . Determine o apótema do cone e o lado do hexágono, bem como o volume da pirâmide que tem por base o hexágono regular e por vértice, o vértice do cone.
- 933.** O raio de um cone é igual ao raio de uma esfera de  $144\pi\text{ cm}^2$  de superfície, a geratriz é os  $5/3$  do raio. Determine a razão entre os volumes de ambos os sólidos e o volume da pirâmide regular de base hexagonal inscrita no cone.

## VII. Prisma e pirâmide

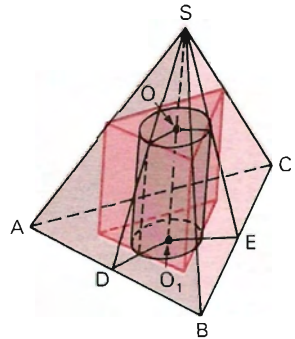
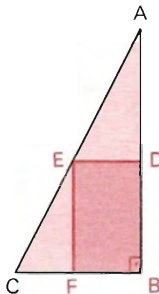
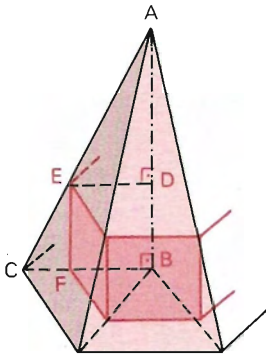
### 261. Prisma inscrito em pirâmide

Caso o prisma seja inscrito na pirâmide, destacar as semelhanças:

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC;$$

$$\triangle EFC \sim \triangle ABC;$$

$$\triangle ADE \sim \triangle EFC.$$

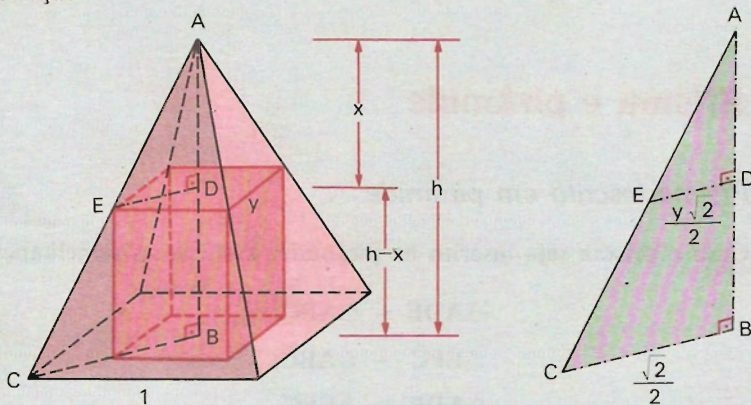


**Nota:** Se tivermos *cilindro* inscrito em *pirâmide*, basta circunscrever ao cilindro um prisma.

## EXERCÍCIOS

- 934.** Uma pirâmide regular de base quadrada tem o lado da base igual a  $l$  e a altura igual a  $h$ . Seccione-a com um plano paralelo à base de modo que o prisma, que tem por bases a secção da pirâmide com o plano considerado e a projeção ortogonal dessa secção sobre a base da pirâmide, tenha superfície lateral  $4S^2$ . Obtenha a distância da secção ao vértice da pirâmide.

**Solução**



Sendo  $x$  a distância pedida e  $y$  a aresta da base do prisma, vem:

$$\text{Área lateral} = 4S^2 \Rightarrow 4 \cdot y(h - x) = 4S^2 \Rightarrow y(h - x) = S^2 \quad (1)$$

$$\text{Da semelhança: } \frac{x}{h} = \frac{y \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow y = \frac{x}{h}.$$

$$\text{Em (1): } \frac{x}{h} (h - x) = S^2 \Rightarrow x^2 - hx + S^2 h = 0 \Rightarrow x = \frac{h \pm \sqrt{h(h - 4S^2)}}{2}$$

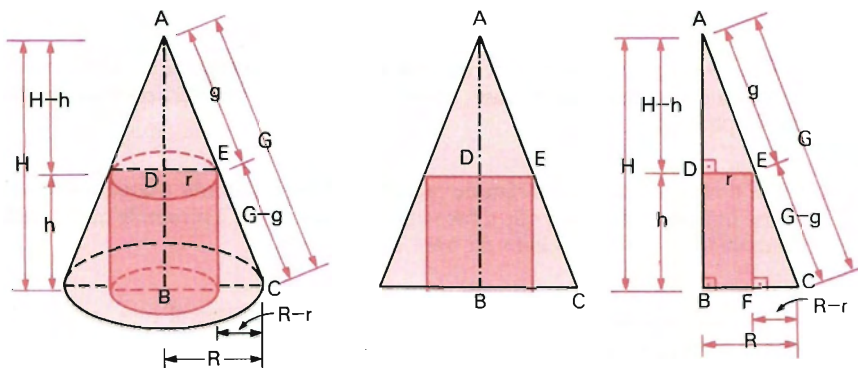
$$\text{Condição: } h - 4S^2 \geq 0 \Rightarrow h \geq 4S^2.$$



- 935.** Determine o volume do octaedro cujos vértices são os pontos médios das faces do paralelepípedo reto-retângulo de dimensões  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .
- 936.** Dada a medida  $\ell$  da aresta de um cubo, determine a área lateral e o volume de uma pirâmide que tem para base uma face do cubo e para vértice o centro da face oposta.
- 937.** Calcule o volume do cubo inscrito numa pirâmide quadrangular regular a  $6\text{ m}$  de altura e  $3\text{ m}$  de aresta da base, sabendo que o cubo tem vértices sobre as arestas da pirâmide.
- 938.** Dá-se a altura  $h$  de uma pirâmide regular de base quadrada e constrói-se sobre a base um cubo, de modo que a face oposta à base corte a pirâmide num quadrado de lado  $a$ . Calcule o lado da base da pirâmide.
- 939.** Um prisma quadrangular regular de  $12\sqrt{2}\text{ m}^2$  de área lateral está inscrito num octaedro regular de  $32\sqrt{3}\text{ m}^2$  de área total. Calcule o volume do prisma, sabendo que seus vértices pertencem a arestas do octaedro.
- 940.** Num paralelepípedo retângulo  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , assinalemos os pontos médios de todas as arestas e unamos dois a dois aqueles pontos médios que pertencem a arestas concorrentes num mesmo vértice. Suprimindo os oito tetraedros que ficam assim determinados nos triedros do paralelepípedo, obtém-se um poliedro. Determine o volume desse poliedro em função de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .
- 941.** Prove que o volume do tetraedro regular é a terça parte do paralelepípedo circunscrito.
- 942.** Determine a razão entre o volume de um octaedro regular e o volume de um cilindro equilátero circunscrito a esse octaedro.
- 943.** Um vaso cilíndrico cujo raio da base é  $r$  e cuja altura é  $2r$  está cheio de água. Mergulha-se nesse vaso um tetraedro regular até que sua base fique inscrita na base do cilindro. Há transbordamento da água. Retirando-se o tetraedro do vaso, qual é a altura da coluna de água?

## VIII. Cilindro e cone

### 262. Cilindro circular reto inscrito em cone reto



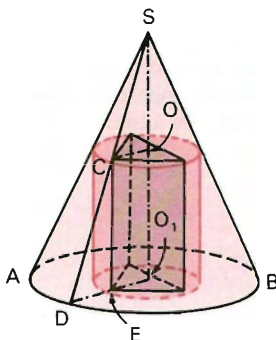
Usando os elementos indicados nas figuras, temos:

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{g}{G} = \frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}$$

$$\triangle EFC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{G-g}{G} = \frac{R-r}{R} = \frac{h}{H}$$

$$\triangle ADE \sim \triangle EFC \Rightarrow \frac{g}{G-g} = \frac{r}{R-r} = \frac{H-h}{h}$$

**Nota:** Caso se tenha *prisma* inscrito em *cone*, basta circunscrever um cilindro ao prisma.



## EXERCÍCIOS

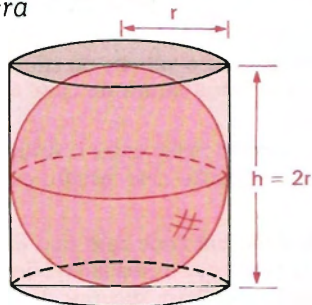
- 944.** Determine o volume do cilindro equilátero inscrito num cone de revolução, sendo  $24\text{ cm}$  a altura do cone e  $12\text{ cm}$  o raio da base do cone.
- 945.** Calcule a razão entre o volume de um cone equilátero de raio  $R$  e o do cilindro de revolução nele inscrito cuja geratriz seja igual ao raio da base.
- 946.** É dado um cone cujo raio da base é  $R$  e cuja altura é  $h$ . Inscreva um cilindro de modo que a área lateral deste seja igual à área lateral do cone parcial, determinado pela base superior do cilindro.
- 947.** Em um cone de geratriz  $g$  e altura  $h$ , inscrevemos um cilindro determinando um cone menor cuja base coincide com uma base do cilindro. Obtenha a altura do cilindro, sabendo que a área lateral do cone menor é igual à área lateral do cilindro.
- 948.** Inscreva um cilindro num cone dado de raio  $R$  e apótema  $G$ , de modo que a área lateral do cone que está acima do cilindro seja igual à área da coroa cujas circunferências são a base do cilindro e a do cone.
- 949.** Um cilindro de revolução tem raio  $R$  e altura  $2R$ . No seu interior constroem-se dois cones, cada um tendo por vértice o centro de uma das bases do cilindro e por base a base oposta do cilindro. Calcule a porção do volume do cilindro exterior aos dois cones.
- 950.** Em um cone de revolução inscrevemos um cilindro cuja altura é igual ao raio da base do cone. Determine o ângulo que o eixo do cone e sua geratriz formam, sabendo que a superfície total do cilindro e a área da base do cone estão entre si como  $3/2$ .
- 951.** Um cone e um cilindro têm uma base comum, e o vértice do cone se encontra no centro da outra base do cilindro. Determine a medida do ângulo formado pelo eixo do cone e sua geratriz, sabendo que as superfícies totais do cilindro e do cone estão entre si como  $7/4$ .
- 952.** Em um cone cuja geratriz  $g$  forma com o plano da base um ângulo  $\alpha$ , inscrevemos um prisma regular quadrangular; sendo as arestas laterais do prisma congruentes, determine a superfície total do prisma.
- 953.** Um cone de revolução tem o vértice no centro de uma face de um cubo de aresta  $a$  e a base circunscrita à face oposta do cubo. Determine a diferença entre o volume do cubo e o volume do cone.

## IX. Cilindro e esfera

### 263. Cilindro circunscrito a uma esfera

O cilindro circunscrito a uma esfera é um cilindro equilátero cujo raio da base é igual ao raio da esfera.

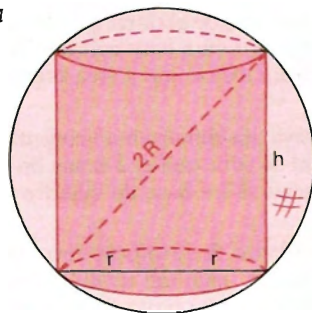
$$h = 2r$$



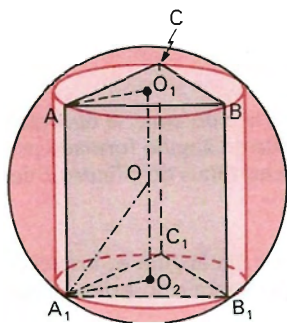
### 264. Cilindro inscrito numa esfera

O raio da base  $r$  e a altura  $h$  de um cilindro inscrito numa esfera de raio  $R$  guardam entre si a relação:

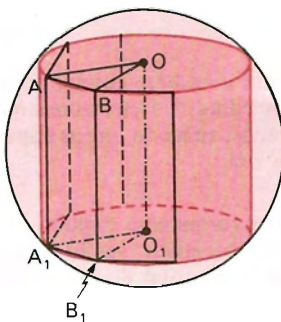
$$(2r)^2 + h^2 = (2R)^2.$$



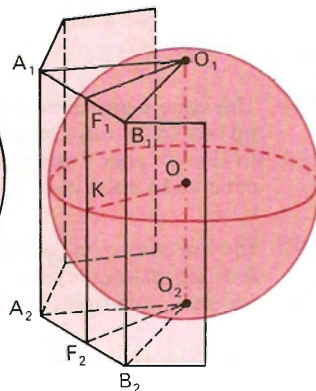
**Nota:** Tendo a esfera e um prisma, basta considerar um cilindro inscrito ou circunscrito ao prisma.



Note o cilindro.



Note o cilindro.



A altura é o diâmetro.

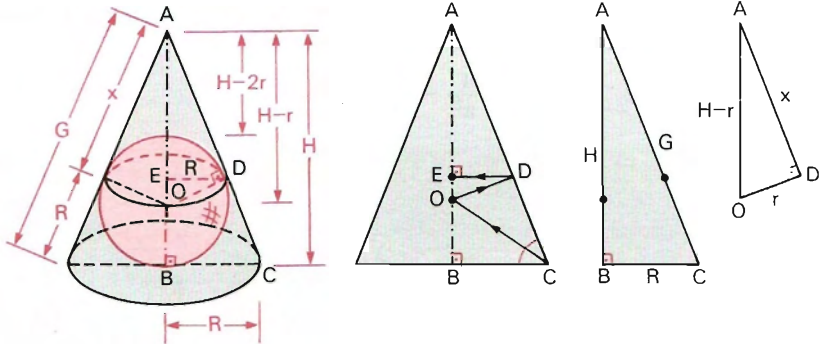
## EXERCÍCIOS

- 954.** Uma esfera está inscrita em um cilindro de  $150 \pi \text{ cm}^2$  de área total. Determine a área e o volume dessa esfera.
- 955.** Determine a área total de um cilindro equilátero circunscrito a uma esfera de superfície  $400 \pi \text{ m}^2$ .
- 956.** Determine a área de uma esfera inscrita em um cilindro de revolução cuja secção meridiana tem  $225 \text{ cm}^2$  de área.
- 957.** Determine o volume da esfera inscrita no cilindro de volume  $18 \text{ cm}^3$ .
- 958.** Determine a razão entre os volumes de uma esfera e do cilindro equilátero nela inscrito.
- 959.** Um cilindro está circunscrito a uma esfera. Determine as razões da superfície e do volume da esfera para a superfície e o volume do cilindro.
- 960.** Determine a altura de um cilindro inscrito em uma esfera de raio  $r$ , sendo  $2 \pi a^2$  a área total do cilindro.
- 961.** Determine a razão entre o volume de um cilindro equilátero circunscrito e o volume de um cilindro equilátero inscrito em uma esfera.
- 962.** Em uma esfera de raio  $r$ , inscrevemos um cilindro de modo que o raio da esfera seja igual ao diâmetro do cilindro. Calcule a área lateral, a área total e o volume do cilindro em função de  $r$ .
- 963.** Determine o volume compreendido entre uma esfera e um cilindro, sabendo que o cilindro está circunscrito à esfera e que a área total do cilindro somada à área da esfera é  $160 \pi \text{ cm}^2$ .
- 964.** Determine o volume de um cilindro equilátero circunscrito a uma esfera, sabendo que o cilindro equilátero inscrito nessa mesma esfera tem volume igual a  $250 \pi \text{ cm}^3$ .
- 965.** Em uma vasilha de forma cilíndrica colocamos uma esfera de raio  $R$ . Sabendo que o raio da base da vasilha mede  $r$ , responda: em quanto se elevará o nível da água contida na vasilha, sabendo que a esfera está totalmente submersa na água?
- 966.** A área lateral de um cilindro reto é  $48 \pi \text{ cm}^2$  e sua altura é  $8 \text{ cm}$ . Sabendo que o cilindro está inscrito em uma esfera, determine o raio da esfera e a relação entre o volume do cilindro e o volume da esfera. Calcule ainda a relação entre o volume do cilindro equilátero inscrito nessa mesma esfera e o volume do cilindro considerado.

- 967.** Inscreva um cilindro circular reto de área lateral  $\pi a^2$  numa esfera de diâmetro  $d$ . Discuta.
- 968.** Prove que a área total de um cilindro equilátero é igual à média aritmética das áreas das esferas inscrita e circunscrita ao cilindro.
- 969.** Num cilindro de raio  $r$  inscreve-se uma esfera. Mostre que a razão entre o volume da esfera e o do cilindro é  $2/3$ .
- 970.** Calcule a área total do prisma hexagonal regular de  $8\text{ m}$  de altura, inscrito numa esfera de  $10\text{ m}$  de diâmetro.
- 971.** Em uma esfera de raio  $R$ , inscrevemos oito esferas iguais. Sabendo que cada esfera tangencia outras três e tangencia a esfera maior, determine os raios das esferas inscritas considerando que os seus centros são os vértices de um cubo.
- 972.** Seis esferas de mesmo raio  $4\text{ cm}$  têm por centros os centros das faces de um cubo e são tangentes exteriormente, cada uma, a outras quatro. Calcule o raio da esfera tangente exteriormente a essas seis esferas.
- 973.** No interior de um cubo regular de aresta  $a$ , existem  $9$  esferas de mesmo raio  $r$ . O centro de uma dessas esferas coincide com o centro do cubo e cada uma das demais esferas tangencia a esfera do centro e três faces do cubo. Exprima  $a$  em função de  $r$ .
- 974.** Uma esfera de raio  $R$  está colocada em uma caixa cúbica, sendo tangente às paredes da caixa. Essa esfera é retirada da caixa e em seu lugar são colocadas  $8$  esferas iguais, tangentes entre si e também às paredes da caixa. Determine a relação entre o volume não ocupado pela esfera única e o volume não ocupado pelas  $8$  esferas.
- 975.** Demonstre que a afirmativa abaixo é verdadeira:  
 Inscreve-se um cubo  $C$  em uma esfera  $E$ . Nesse cubo inscreve-se uma esfera  $E'$ . Inscreve-se um novo cubo  $C'$  na esfera  $E'$ . A área total do cubo  $C'$  é  $2S/3\pi$ , em que  $S$  é a área da esfera  $E$ .
- 976.** Num cubo está inscrita uma esfera de raio  $R$ . Calcule a área lateral do cone reto cuja base está circunscrita a uma das faces do cubo e cujo vértice é o centro da esfera.
- 977.** Em um prisma regular quadrangular inscrevemos uma esfera, de tal maneira que tangencia todas as faces do prisma. Nesse prisma circunscrevemos uma outra esfera. Determine a relação entre os volumes das duas esferas.
- 978.** Tomam-se dois vértices opostos de um cubo e pelos pontos médios das seis arestas que não passam por esses vértices traça-se um plano secante que divide o cubo em dois sólidos e em cada um desses sólidos inscrevemos uma esfera. Dado que essas esferas tangenciam três faces do cubo e o plano secante, determine a relação entre o volume de cada esfera e o volume do cubo.

## X. Esfera e cone reto

### 265. Esfera inscrita em cone reto



$O$  é o centro da esfera inscrita ( $OC$  é bissetriz).

$E$  é o centro da circunferência segundo a qual a superfície cônica tangencia a esfera.

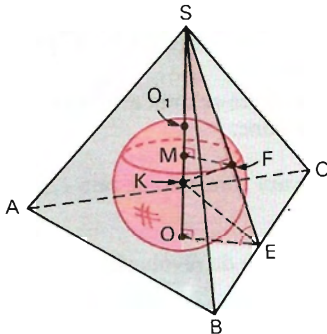
$D$  é o ponto de tangência.

$$\triangle ADO \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{x}{H} = \frac{r}{R} = \frac{H-r}{G}$$

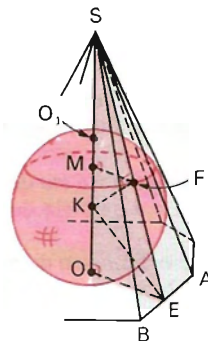
$x$  é calculado no  $\triangle ADO$  retângulo em  $D$ :

$$x^2 = (H-r)^2 - r^2 \Rightarrow x = \sqrt{H(H-2r)}$$

**Nota:** Caso se tenha *esfera* inscrita em *pirâmide*, basta considerar um cone inscrito na pirâmide e a esfera inscrita no cone.



Note a analogia com o caso acima.



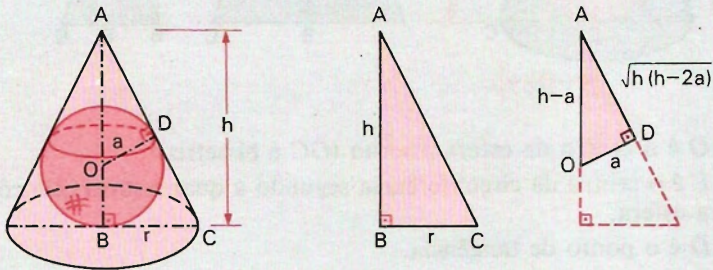
Note os pontos  $K$ ,  $F$  e  $M$ .

## EXERCÍCIOS

- 979.** Quando um cone está circunscrito a uma esfera de raio  $a$ , o raio  $r$  e a altura  $h$  do cone estão ligados ao raio da esfera pela relação:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{2}{ah}.$$

**Solução**



$$\triangle ADO \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{\sqrt{h(h-2a)}}{h} = \frac{a}{r} \Rightarrow \frac{h-2a}{h} = \frac{a^2}{r^2}$$

$$\text{Dividindo por } a^2: \frac{h-2a}{a^2h} = \frac{1}{r^2} \Rightarrow \frac{h}{a^2h} - \frac{2a}{a^2h} = \frac{1}{r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{2}{ah}$$

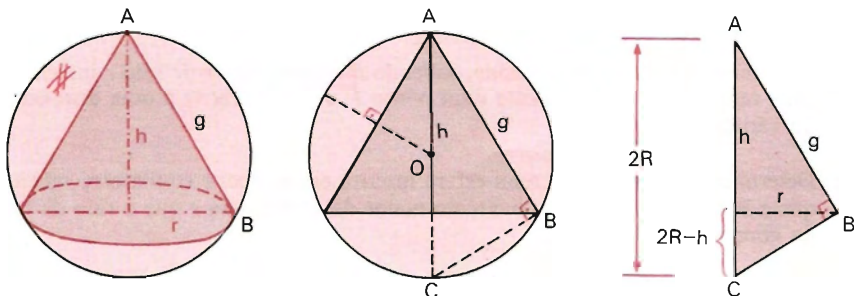
- 980.** Num cone circular reto de  $18\text{ m}$  de altura, inscreve-se uma esfera de  $5\text{ m}$  de raio. Calcule o diâmetro da base e a geratriz do cone.
- 981.** Numa esfera de  $6\text{ cm}$  de raio circunscribe-se um cone reto de raio  $12\text{ cm}$ . Calcule a altura e a geratriz do cone.
- 982.** Calcule o diâmetro da esfera inscrita em um cone de revolução cujo raio da base mede  $12\text{ cm}$  e a geratriz  $20\text{ cm}$ .
- 983.** Determine o volume de uma esfera inscrita em um cone de  $15\text{ cm}$  de apótema e  $18\text{ cm}$  de diâmetro da base.



- 984.** Determine a área da esfera inscrita em um cone equilátero cuja área lateral mede  $50\pi\text{ cm}^2$ .
- 985.** Determine o volume de uma esfera inscrita em um cone de revolução cujo raio da base mede  $6\text{ cm}$  e cuja área total mede  $96\pi\text{ cm}^2$ .
- 986.** Uma esfera é inscrita num cone reto, com os elementos:  
 $r$  — raio da esfera;  $G$  — geratriz;  
 $R$  — raio da base do cone;  $H$  — altura.  
Resolva os problemas:  
a) dados  $G$  e  $R$ , calcule  $H$  e  $r$ ;                      c) dados  $H$  e  $R$ , calcule  $G$  e  $r$ ;  
b) dados  $G$  e  $H$ , calcule  $R$  e  $r$ ;                      d) dados  $H$  e  $r$ , calcule  $G$  e  $R$ .
- 987.** Determine o volume e a área lateral de um cone em função da altura  $h$  do cone e do raio  $r$  de uma esfera inscrita nesse cone.
- 988.** Em uma cavidade cônica, cuja abertura tem um raio de  $8\text{ cm}$  e de profundidade  $32/3\text{ cm}$ , deixa-se cair uma esfera de  $6\text{ cm}$  de raio. Ache a distância do vértice da cavidade cônica ao centro da esfera.
- 989.** Uma esfera é colocada no interior de um vaso cônico com  $\sqrt{55}\text{ cm}$  de geratriz e  $\sqrt{30}\text{ cm}$  de altura. Sabendo que os pontos de tangência das geratrizes com a superfície esférica estão a  $3\text{ cm}$  do vértice, calcule o raio da esfera.
- 990.** Determine o ângulo do vértice de um cone, sabendo que a razão entre a superfície da esfera inscrita e a área total do cone é igual a  $4/9$ .
- 991.** Determine a altura e o raio da base de um cone de revolução em função do raio da esfera inscrita  $r$  e do raio da esfera circunscrita  $R$ , sabendo que a geratriz do cone mede  $5r$ .
- 992.** Determine o volume de um cone, sabendo que uma esfera de raio  $r$  inscrita no cone tangencia-o internamente num ponto  $P$  de sua geratriz a uma distância  $d$  do vértice do cone.
- 993.** Determine a área de uma semi-esfera inscrita em um cone equilátero, sabendo que a base do cone contém o círculo maior da semi-esfera e que o raio da base do cone mede  $36\text{ m}$ .
- 994.** Em um cone inscrevemos uma semi-esfera de tal modo que o círculo maior dessa semi-esfera está contido na base do cone. Determine o ângulo do vértice do cone, sabendo que a superfície do cone e a superfície da esfera estão entre si como  $18/5$ .
- 995.** Determine o volume de uma esfera inscrita em um cone de revolução, sabendo que a base do cone está inscrita numa face de um cubo de aresta  $3a$  e o vértice do cone está no centro da face oposta.

- 996.** Prove que a razão entre o volume de qualquer cone (circular reto) e o volume da esfera inscrita é superior ou igual a dois.
- 997.** Uma esfera de raio  $R$  é tangente às três faces de um triedro, cada uma das quais mede  $60^\circ$ . Ache a distância do vértice do triedro ao centro da esfera.
- 998.** Em uma pirâmide triangular  $PABC$ , as arestas  $PA$ ,  $PC$  e  $PB$  são duas a duas perpendiculares. Sabendo que as arestas  $AB$  e  $BC$  medem  $10\text{ cm}$  e a aresta  $BP$  mede  $6\text{ cm}$ , determine o raio da esfera inscrita nessa pirâmide.
- 999.** Determine a relação entre o volume de uma pirâmide regular hexagonal e o volume de uma esfera inscrita nessa pirâmide, sabendo que a base da pirâmide e cada face lateral estão inscritas em circunferências de raio  $r$ .
- 1000.** Determine o raio de uma esfera inscrita em uma pirâmide regular hexagonal, sabendo que a aresta da base dessa pirâmide mede  $2$  e a aresta lateral mede  $6$ .
- 1001.** Em uma pirâmide regular hexagonal, cujo ângulo diedro da base mede  $\alpha$ , inscrevemos uma esfera de raio  $r$ . Determine a relação entre o volume da esfera e o volume da pirâmide.

**266.** *Esfera circunscrita a um cone reto*



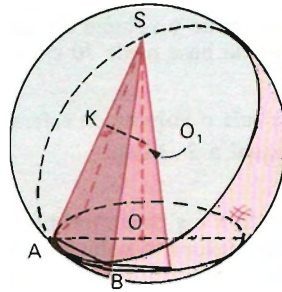
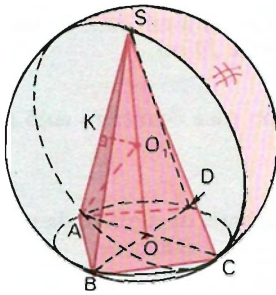
Do triângulo retângulo  $ABC$  vem:

$$g^2 = 2R \cdot h$$

$$r^2 = h(2R - h)$$

Para mais, acesse: <http://fvestibular.com.br/>

**Nota:** Caso se tenha *esfera circunscrita* a pirâmide, basta considerar um cone circunscrito a pirâmide e trabalhar com o cone e a esfera.



Note a analogia com o caso acima.

Note os pontos  $K$  e  $O_1$ .

## EXERCÍCIOS

- 1002.** Calcule a geratriz de um cone reto de raio 6, inscrito numa esfera de diâmetro 12,5.

### Solução

Do triângulo retângulo  $ABC$  vem:

$$g^2 = \frac{25}{2} \cdot h \quad (1)$$

$$6^2 = h \left( \frac{25}{2} - h \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2h^2 - 25h + 72 = 0 \Rightarrow$$

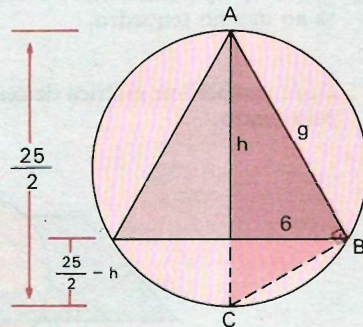
$$\Rightarrow h_1 = 8 \text{ e } h_2 = \frac{9}{2}$$

Substituindo  $h_1$  e  $h_2$  em (1), temos:

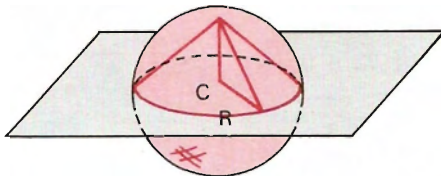
$$g_1^2 = \frac{25}{2} \cdot 8 \Rightarrow g_1 = 10$$

$$g_2^2 = \frac{25}{2} \cdot \frac{9}{2} \Rightarrow g_2 = \frac{15}{2}$$

Resposta: A geratriz mede 10 ou 7,5.



- 1003.** Determine a altura de um cone reto inscrito em uma esfera de raio igual a  $18\text{ cm}$ , sendo a área lateral do cone o dobro da área da base.
- 1004.** Determine o volume de uma esfera circunscrita a um cone de revolução cujo raio da base mede  $10\text{ cm}$  e cuja altura mede  $20\text{ cm}$ .
- 1005.** Calcule o volume da esfera circunscrita ao cone equilátero cujo raio da base é igual a  $2\sqrt{3}\text{ cm}$ .
- 1006.** Sendo  $h$  e  $g$  os comprimentos, respectivamente, da altura e da geratriz de um cone, calcule o volume da esfera circunscrita a esse cone.
- 1007.** Determine o volume e a área lateral de um cone em função de sua altura  $h$  e do raio  $R$  da esfera circunscrita ao cone.
- 1008.** Calcule o raio da base de um cone circular reto, circunscrito a uma esfera de raio unitário, sabendo que o diâmetro da esfera é igual ao segmento maior da secção áurea da altura daquele cone.
- 1009.** Dado num plano  $\pi$  um triângulo equilátero  $ABC$  de lado  $\ell$ , sobre a perpendicular em  $A$  ao plano  $\pi$  toma-se um ponto  $D$  tal que  $AD = 2\ell$ . Determine a posição do centro e calcule o raio da esfera circunscrita ao tetraedro  $ABCD$ .
- 1010.** Demonstre que o raio da esfera tangente às seis arestas de um tetraedro regular é média proporcional entre o raio da esfera inscrita e o raio da esfera circunscrita ao mesmo tetraedro.
- 1011.** Dada a superfície esférica de centro  $C$  e raio  $R$ , considere um plano passando pelo centro.



- a) Determine a razão entre o volume da esfera e o volume do cone circular reto inscrito na semi-esfera como na figura ao lado.
- b) Determine a razão entre a área da superfície esférica e a área lateral do mesmo cone.

## XI. Esfera, cilindro equilátero e cone equilátero

### 267. Cilindro equilátero circunscrito a uma esfera

Dada uma esfera de raio  $r$ , calcular a área da base ( $B$ ), área lateral ( $A_l$ ), área total ( $A_t$ ) e o volume do cilindro equilátero circunscrito.

#### Solução

Elementos:

Seja  $R$  o raio da base e  $H$  a altura do cilindro. Então:

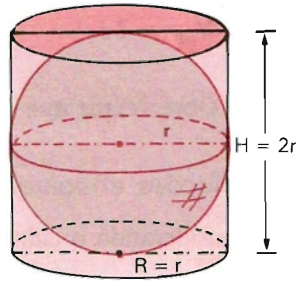
$$R = r \text{ e } H = 2r.$$

$$\text{Área da base: } B = \pi r^2$$

$$\begin{aligned} \text{Área lateral: } A_l &= 2\pi r \cdot 2r \Rightarrow \\ \Rightarrow A_l &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área total: } A_t &= A_l + 2B \Rightarrow \\ \Rightarrow A_t &= 6\pi r^2 \end{aligned}$$

$$\text{Volume: } V = B \cdot H \Rightarrow V = \pi r^2 \cdot 2r \Rightarrow V = 2\pi r^3$$



### 268. Cone equilátero circunscrito a uma esfera

Calcular a área da base ( $B$ ), área lateral ( $A_l$ ), área total ( $A_t$ ) e volume do cone equilátero circunscrito.

#### Solução

Seja  $x$  a altura e  $y$  o raio da base do cone.

$$O \text{ é baricentro} \Rightarrow x = 3r$$

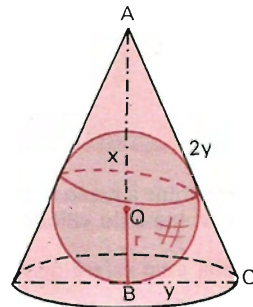
$$\begin{aligned} \triangle ABC \Rightarrow (2y)^2 &= y^2 + 9r^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow y^2 &= 3r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área da base: } B &= \pi y^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow B &= 3\pi r^2 \end{aligned}$$

$$\text{Área lateral: } A_l = \pi y \cdot 2y = 2\pi y^2 \Rightarrow A_l = 6\pi r^2$$

$$\text{Área total: } A_t = A_l + B \Rightarrow A_t = 6\pi r^2 + 3\pi r^2 \Rightarrow A_t = 9\pi r^2$$

$$\text{Volume: } V = \frac{1}{3} B \cdot x \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 3\pi r^2 \cdot 3r \Rightarrow V = 3\pi r^3$$



**269.** *Relações envolvendo cilindro equilátero e cone equilátero circunscritos à mesma esfera*

a) Entre as áreas totais calculadas e a área da superfície esférica

$$A_{T_{cil.}} = 6\pi r^2 \qquad A_{T_{cone}} = 9\pi r^2 \qquad A_{esf.} = 4\pi r^2$$

Observemos que

$$A_{T_{cil.}}^2 = A_{T_{cone}} \cdot A_{esf.}$$

b) Entre os volumes calculados e o volume da esfera

$$V_{cil.} = 2\pi r^3 \qquad V_{cone} = 3\pi r^3 \qquad V_{esf.} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Observemos que

$$V_{cil.}^2 = V_{cone} \cdot V_{esf.}$$

**270.** *Relações envolvendo cilindro equilátero e esfera inscrita*

Considerando o cilindro equilátero circunscrito e a esfera, temos:

a) A área lateral do cilindro é igual à área da superfície esférica.

$$b) \left. \begin{aligned} \frac{A_{esf.}}{A_{T_{cil.}}} &= \frac{4\pi r^2}{6\pi r^2} = \frac{2}{3} \\ \frac{V_{esf.}}{V_{cil.}} &= \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi r^3} = \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{A_{esf.}}{A_{T_{cil.}}} = \frac{V_{esf.}}{V_{cil.}} = \frac{2}{3}$$

## EXERCÍCIOS

**1012.** Determine a razão entre o volume de um cone equilátero inscrito em uma esfera e o volume do cilindro equilátero circunscrito à mesma esfera.

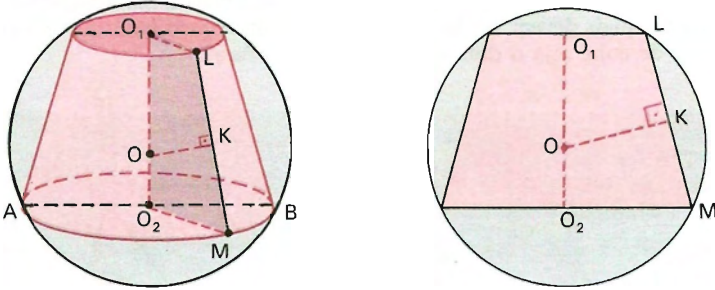
**1013.** Dada uma esfera de raio  $R$ :

- a) calcule  $B$ ,  $A_l$ ,  $A_t$  e  $V$  do cilindro equilátero inscrito na esfera;
- b) calcule  $B$ ,  $A_l$ ,  $A_t$  e  $V$  do cone equilátero inscrito na esfera;
- c) estabeleça uma relação (a melhor) entre o volume do cilindro, do cone e da esfera acima.

**1014.** Prove que a área total de um cone equilátero inscrito em uma esfera é igual a  $1/4$  da área total do cone equilátero circunscrito à mesma esfera.

## XII. Esfera e tronco de cone

**271.** Esfera circunscrita a tronco de cone reto de bases paralelas



$OK$  é mediatriz da geratriz  $LM$ .

Os problemas recaem em circunferência circunscrita a trapézio isósceles.

**272.** Esfera inscrita em tronco de cone reto de bases paralelas

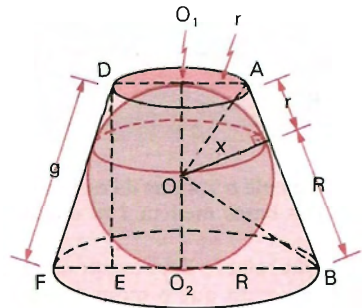
Condição para o tronco de cone ser circunscritível a uma esfera.

$$g = R + r$$

Sendo  $x$  o raio da esfera, do triângulo retângulo  $AOB$  vem:

$$x^2 = R \cdot r.$$

Essa conclusão também pode sair do  $\triangle DEF$ .



**Nota:** Em problemas que envolvem circunscrição ou inscrição de esfera em tronco de pirâmide, deve-se primeiro considerar um tronco de cone inscrito ou circunscrito ao tronco de pirâmide e depois trabalhar com o tronco de cone e a esfera.

## EXERCÍCIOS

- 1015.** Num tronco de cone de revolução é inscrita uma esfera. Sendo o raio da esfera de  $2\text{ cm}$ , quais devem ser os raios das bases do tronco para que o volume do tronco de cone seja o dobro do volume da esfera?

**Solução**

Do triângulo  $AOB$  vem:

$$R \cdot r = 4 \quad (1)$$

$$V_{\text{tronco}} = 2 \cdot V_{\text{esfera}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi 4}{3} (R^2 + R \cdot r + r^2) =$$

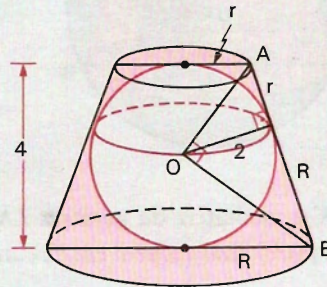
$$= 2 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 + Rr + r^2 = 16 \Rightarrow R^2 + r^2 = 12 \quad (2)$$

De (1) e (2) vem:

$$\left. \begin{aligned} R^2 + r^2 + 2Rr &= 20 \Rightarrow R + r = 2\sqrt{5} \\ R^2 + r^2 - 2Rr &= 4 \Rightarrow R - r = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R = \sqrt{5} + 1 \text{ e } r = \sqrt{5} - 1$$

Resposta:  $\sqrt{5} + 1$  e  $\sqrt{5} - 1$ .



- 1016.** Calcule o volume da esfera inscrita num tronco de cone circular reto cujos raios das bases medem  $1\text{ m}$  e  $4\text{ m}$ , respectivamente.
- 1017.** Que relação deve existir entre os raios das bases e a altura de um tronco de cone reto para que o mesmo seja circunscritível a uma esfera?
- 1018.** Determine a área de um tronco de cone circunscrito a uma esfera de raio  $R$ , sabendo que o volume do tronco é igual ao triplo do volume da esfera.
- 1019.** Determine o volume de um tronco de cone circunscrito a uma esfera de  $10\text{ cm}$  de raio, sabendo que o raio da base maior do tronco é o quádruplo do raio da base menor.
- 1020.** Determine a área total e o volume de um tronco de cone em função de sua altura  $h$  e da sua geratriz  $g$ , sabendo que o tronco circunscribe uma esfera de raio  $r$ .



### XIII. Exercícios gerais sobre inscrição e circunscrição de sólidos

- 1021.** Determine o volume de uma pirâmide hexagonal regular inscrita em um cone equilátero de volume  $9\sqrt{3} \pi / 8 \text{ cm}^3$ .
- 1022.** Exprima, por uma igualdade, que “o volume do cilindro equilátero é igual à soma dos volumes da esfera e do cone nele inscritos”.
- 1023.** Qual a relação entre os volumes da esfera inscrita em um cilindro equilátero e do cone cuja base é a base do cilindro, sendo o vértice do cone o centro da base superior do cilindro?
- 1024.** Em um recipiente cilíndrico de  $20 \text{ cm}$  de altura colocamos duas esferas, uma sobre a outra, de tal maneira que essas esferas tangenciem as bases do cilindro e a sua superfície lateral. Determine a diferença entre o volume do cilindro e o volume das duas esferas.
- 1025.** Um plano secciona uma esfera de raio  $r$ , determinando um círculo que é base de um cilindro e um cone de revolução inscritos nessa esfera. Sabendo que o cilindro e o cone estão situados num mesmo semi-espaço em relação ao plano e que os volumes do cilindro e do cone são iguais, determine a distância do centro da esfera ao plano.
- 1026.** Em um cilindro de  $288 \pi \text{ cm}^3$  de volume e raio  $6 \text{ cm}$  estão contidos dois cilindros de mesma altura que o cilindro dado e de diâmetros iguais ao raio da base do cilindro dado. Calcule a relação entre as áreas laterais dos dois cilindros e do cilindro dado.
- 1027.** É dado um cone circular reto de altura  $8 \text{ dm}$ , cortado por um plano paralelo à base, a uma distância  $3 \text{ dm}$  do vértice. Inscrevendo no tronco de cone que resulta um tronco de pirâmide hexagonal e sabendo que o raio da base menor do tronco de cone é  $1 \text{ dm}$ , calcule o volume do tronco de pirâmide inscrito.
- 1028.** Um cone equilátero está inscrito numa esfera de raio igual a  $4 \text{ m}$ . Determine a que distância do centro da esfera deve-se traçar um plano paralelo à base do cone, para que a diferença das secções (na esfera e no cone) seja igual à área da base do cone.
- 1029.** Determine o volume de um cone reto, sabendo que seu vértice coincide com o centro de uma esfera, sua base é circunscrita à base de um cubo inscrito nessa mesma esfera e que o raio da esfera mede  $r$ .
- 1030.** Um cone é circunscrito a duas esferas de raio  $2$  e  $1$ . Sabendo que essas duas esferas são tangentes exteriormente, determine o volume do sólido compreendido entre o cone e essas duas esferas.

- 1031.** O vértice de um cone de revolução com o centro de uma esfera e a base é a secção feita nessa esfera por um plano distante  $4 \text{ cm}$  do centro. Sendo o volume desse cone  $12 \pi \text{ cm}^3$ , calcule a área e o volume da esfera.
- 1032.** Determine o volume de um cone de revolução, sabendo que seu vértice coincide com o centro da base de um outro cone de raio  $R$  e que sua base coincide com a secção determinada por um plano que secciona esse outro cone a uma distância  $h/3$  do vértice.
- 1033.** Uma esfera de raio  $r$  circunscribe um cone equilátero. Um plano que secciona a esfera e o cone paralelamente à base do cone determina duas secções de tal modo que a diferença entre as áreas dessas secções é equivalente à área da base do cone. Determine a distância da base do cone ao plano secção.
- 1034.** Uma esfera está inscrita em um cone de altura  $h$  e raio da base  $r$ . Obtenha a distância do vértice do cone ao plano que secciona esse cone e a esfera determinando duas secções cuja soma das áreas é  $13 \pi r^2 / 36$ , sendo esse plano paralelo à base do cone.
- 1035.** Sabendo que as bases de dois cones coincidem e que os vértices estão situados em semi-espacos opostos em relação a essas bases, determine o volume da esfera inscrita nesse sólido, sendo  $3 \text{ cm}$  o raio da base comum e  $5 \text{ cm}$  as medidas das geratrizes dos cones.
- 1036.** Determine o volume do espaço limitado pelos troncos de pirâmide quadrangular e cone, sabendo que a base menor do tronco de cone está apoiada na base menor do tronco de pirâmide e que a base maior do tronco de cone está apoiada na base maior do tronco de pirâmide, sendo  $10 \text{ cm}$  e  $6 \text{ cm}$  as arestas da base maior e menor, respectivamente, do tronco de pirâmide,  $3 \text{ cm}$  e  $1 \text{ cm}$  os raios das bases e  $12 \text{ cm}$  a altura do tronco de cone.

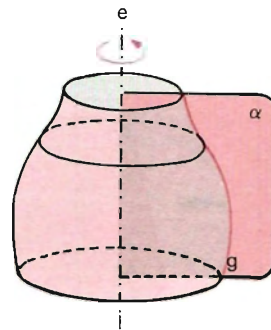
# Superfícies e Sólidos de Revolução

## I. Superfícies de revolução

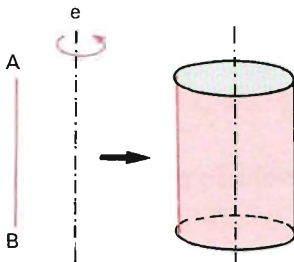
### 273. Definição

Consideremos um semiplano de origem  $e$  (eixo) e nele uma linha  $g$  (geratriz); girando esse semiplano em torno de  $e$ , a linha  $g$  gera uma superfície, que é chamada superfície de revolução.

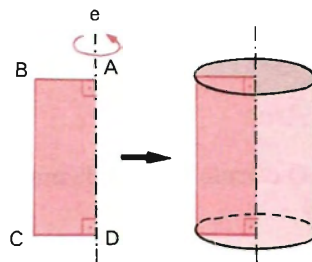
Salvo aviso em contrário, considera-se revolução completa (de  $360^\circ$  em torno do eixo).



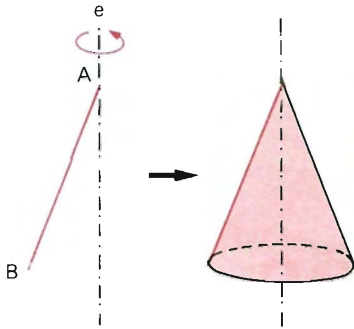
### Exemplos



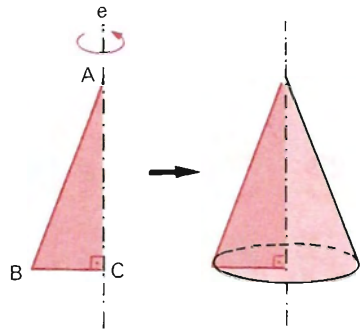
O segmento  $AB$  gera a superfície lateral de um cilindro.



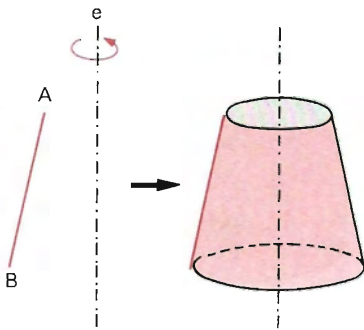
A poligonal  $ABCD$  gera a superfície total de um cilindro.



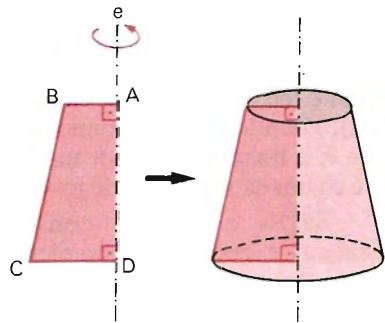
O segmento  $AB$  gera a superfície lateral de um cone.



A poligonal  $ABC$  gera a superfície total de um cone.



O segmento  $AB$  gera a superfície lateral de um tronco de cone.



A poligonal  $ABCD$  gera a superfície total de um tronco de cone.

### 274. Área

O cálculo da área de uma superfície de revolução pode ser feito de dois modos:

*1º modo:*

Usando as expressões de área lateral e de área total que conhecemos (do cilindro, do cone, do tronco de cone, etc.).

2º modo:

Usando a fórmula

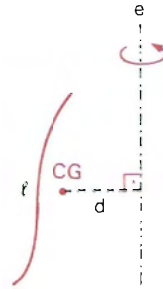
$$A = 2\pi \ell d$$

em que

$A$  é a área da superfície gerada.

$\ell$  é o comprimento da geratriz.

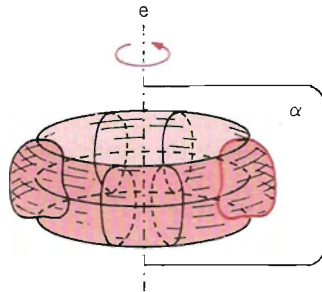
$d$  é a distância do centro de gravidade da geratriz ao eixo.



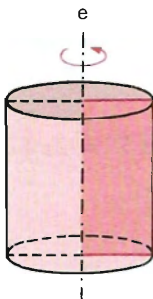
## II. Sólidos de revolução

### 275. Definição

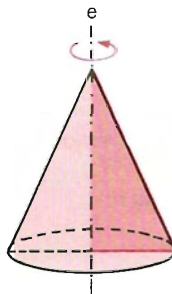
Consideremos um semiplano de origem  $e$  (eixo) e nele uma superfície  $S$ ; girando o semiplano em torno de  $e$ , a superfície  $S$  gera um sólido chamado sólido de revolução.



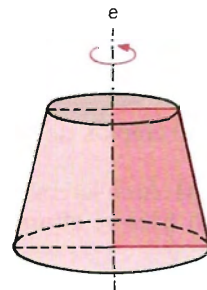
*Exemplos*



Retângulo gerando cilindro de revolução.



Triângulo retângulo gerando cone de revolução.



Trapézio retângulo gerando tronco de revolução.

Outros exemplos de sólidos de revolução, assim como de superfícies de revolução, aparecerão no próximo capítulo.

## 276. Volume

O cálculo do volume de um sólido de revolução pode ser feito de dois modos.

1.º modo:

Usando as expressões dos volumes dos sólidos (cilindro, cone, tronco de cone, etc.).

2.º modo:

Usando a fórmula

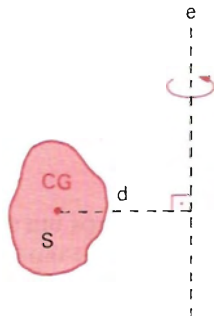
$$V = 2\pi Sd$$

em que

$V$  é o volume do sólido gerado.

$S$  é a área da superfície geradora.

$d$  é a distância do centro de gravidade da superfície ao eixo.



### Observação

As fórmulas  $A = 2\pi \ell d$  e  $V = 2\pi Sd$ , fórmulas de Pappus-Guldin (Pappus — matemático grego do início do século IX; Guldin — padre Guldin, matemático suíço do século XI), só devem ser aplicadas quando o centro de gravidade da geratriz for de fácil determinação e o  $d$  não apresentar dúvidas; caso contrário, usam-se os primeiros modos para obter área e volume de sólidos de revolução.

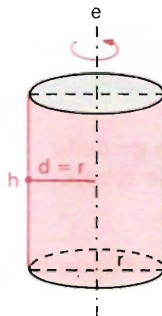
## 277. Exemplos de utilização das fórmulas $A = 2\pi \ell d$ e $V = 2\pi Sd$ :

a) Área lateral do cilindro de revolução (raio  $r$ , altura  $h$ ).

$$\left. \begin{aligned} A &= 2\pi \ell d \\ \ell &= h \text{ e } d = r \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_l = 2\pi hr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_l = 2\pi rh$$

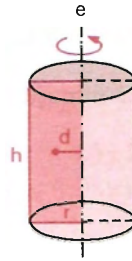


b) Volume do cilindro de revolução (raio  $r$ , altura  $h$ ).

$$\left. \begin{aligned} V &= 2\pi Sd \\ S &= r \cdot h \text{ e } d = \frac{1}{2} r \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 2\pi \cdot rh \cdot \frac{1}{2} r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \pi r^2 h$$

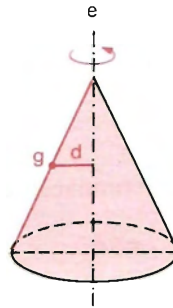


c) Área lateral de um cone de revolução (raio  $r$ , geratriz  $g$ ).

$$\left. \begin{aligned} A &= 2\pi \ell d \\ \ell &= g \text{ e } d = \frac{1}{2} r \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_l = 2\pi \cdot g \cdot \frac{1}{2} r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_l = \pi r g$$

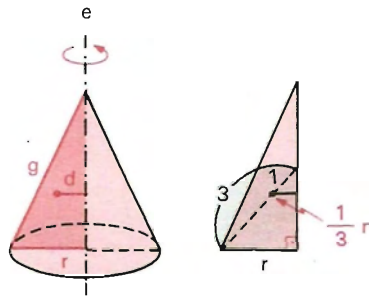


d) Volume de um cone de revolução (raio  $r$ , altura  $h$ ).

$$\left. \begin{aligned} V &= 2\pi Sd \\ S &= \frac{1}{2} rh \text{ e } d = \frac{1}{3} r \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 2\pi \cdot \frac{1}{2} rh \cdot \frac{1}{3} r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

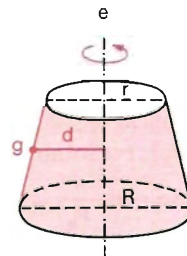


e) Área lateral do tronco de cone de revolução (raios  $R$  e  $r$ , geratriz  $g$ ).

$$A = 2\pi \ell d$$

$$A_l = 2\pi g \cdot \frac{R + r}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_l = \pi(R + r)g$$



**Nota:** O volume de um tronco de cone de revolução não é calculado por  $V = 2\pi Sd$ , em vista do exposto na observação sobre a utilização dessa fórmula.

f) Determinação do centro de gravidade de uma semicircunferência.

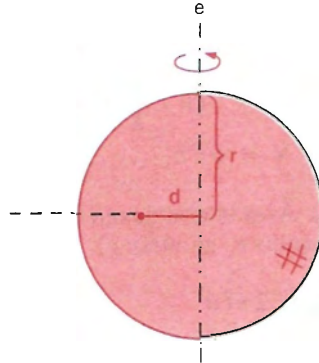
$$A = 2\pi \ell d$$

com  $A = 4\pi r^2$ ,  $\ell = \pi r$

obtemos  $d$

$$4\pi r^2 = 2\pi \cdot \pi r d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{2}{\pi} r$$

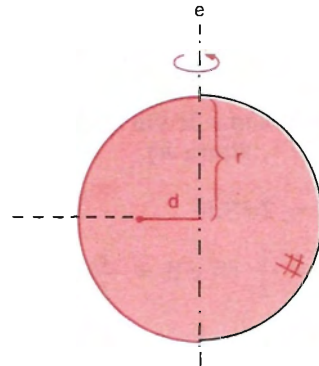


g) Determinação do centro de gravidade de um semicírculo.

$$V = 2\pi Sd$$

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = 2\pi \cdot \frac{\pi r^2}{2} \cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{4}{3\pi} r$$



## EXERCÍCIOS

**1037.** Dado um triângulo retângulo de catetos  $b$  e  $c$  e hipotenusa  $a$ ,

a) calcule os volumes dos sólidos gerados quando o triângulo gira em torno de  $b$  ( $V_b$ ), em torno de  $c$  ( $V_c$ ) e em torno de  $a$  ( $V_a$ );

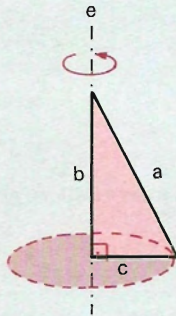
b) prove que  $\frac{a}{V_a} = \frac{b}{V_b} + \frac{c}{V_c}$ ;

c) supondo que  $b > c$ , compare  $V_a$ ,  $V_b$  e  $V_c$ .

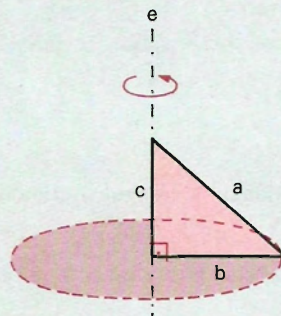


**Solução**

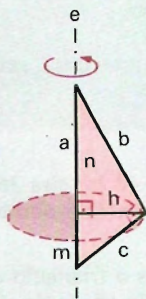
a)



$$V_b = \frac{1}{3} \pi c^2 b$$



$$V_c = \frac{1}{3} \pi b^2 c$$



$$V_a = \frac{1}{3} \pi h^2 n + \frac{1}{3} \pi h^2 m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_a = \frac{1}{3} \pi h^2 (n + m) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_a = \frac{1}{3} \pi h^2 a$$

Sendo  $bc = ah \Rightarrow h = \frac{bc}{a}$ .

Substituindo  $h$ , vem:

$$V_a = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{bc}{a}\right)^2 \cdot a \Rightarrow V_a = \frac{1}{3} \pi \frac{b^2 c^2}{a}$$

b) Tese:  $\frac{a}{V_a} = \frac{b}{V_b} + \frac{c}{V_c}$ .

*Demonstração*

$$2^\circ \text{ membro} = \frac{b}{V_b} + \frac{c}{V_c} = \frac{b}{\frac{1}{3} \pi c^2 b} + \frac{c}{\frac{1}{3} \pi b^2 c} =$$

$$= \frac{b^2 + c^2}{\frac{1}{3} \pi b^2 c^2} = \frac{a^2}{\frac{1}{3} \pi b^2 c^2} = \frac{a}{\frac{1}{3} \pi \frac{b^2 c^2}{a}} = \frac{a}{V_a} = 1^\circ \text{ membro}$$

c)  $b > c \Rightarrow a > b > c$

Estabelecendo a razão  $\frac{V_b}{V_c}$ , temos:

$$\frac{V_b}{V_c} = \frac{\frac{1}{3} \frac{\pi c^2 b}{a}}{\frac{1}{3} \pi b^2 c} = \frac{c}{b} < 1 \Rightarrow V_b < V_c$$

O triângulo retângulo, girando em torno do menor cateto, gera o sólido de volume maior.

Estabelecendo a razão  $\frac{V_a}{V_b}$ , temos:

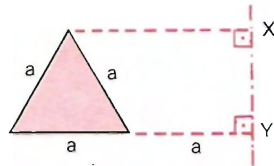
$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{\frac{1}{3} \frac{\pi b^2 c^2}{a}}{\frac{1}{3} \pi c^2 b} = \frac{b}{a} < 1 \Rightarrow V_a < V_b$$

O triângulo retângulo, girando em torno da hipotenusa, gera o sólido de volume menor.

- 1038.** Um triângulo escaleno de lados  $13 \text{ cm}$ ,  $14 \text{ cm}$  e  $15 \text{ cm}$  gira  $360^\circ$  em torno do lado de  $14 \text{ cm}$ . Determine a área e o volume do sólido obtido.
- 1039.** Seja um triângulo de base  $a$  e altura  $h$ . Giramos o triângulo em torno de um eixo paralelo à base e que contém o baricentro do triângulo. Qual é o volume do sólido gerado?
- 1040.** Determine o volume de um sólido gerado por um triângulo de base  $a$  e altura  $h$ , sabendo que esse triângulo gira  $360^\circ$  em torno de sua base.
- 1041.** Um triângulo isósceles  $ABC$  gira ao redor de uma reta paralela à base  $BC$  e passando pelo seu vértice  $A$ . Determine o volume do sólido gerado, sabendo que a base mede  $3 \text{ cm}$  e os lados congruentes medem  $4 \text{ cm}$ .
- 1042.** Um triângulo isósceles tem os lados congruentes medindo  $20 \text{ cm}$  cada um, e o ângulo do vértice  $120^\circ$ . Determine a área e o volume do sólido gerado por esse triângulo quando gira em torno de sua base.
- 1043.** Determine a área e o volume do sólido gerado por um triângulo isósceles que gira em torno da base que mede  $10 \text{ cm}$ , sendo  $120^\circ$  a medida do ângulo do vértice do triângulo.

- 1044.** Um triângulo retângulo isósceles, girando em torno de um dos catetos, gera um sólido cujo volume é  $\frac{\pi}{3} m^3$ . Calcule a hipotenusa.
- 1045.** Calcule o volume do sólido gerado por um triângulo retângulo isósceles, cujos catetos medem  $3 m$ , ao girar em torno da paralela à hipotenusa traçada pelo vértice do ângulo reto.
- 1046.** A hipotenusa de um triângulo retângulo mede  $20 cm$  e um cateto mede os  $\frac{3}{4}$  do outro cateto. Determine o volume do sólido obtido ao girar  $360^\circ$  o triângulo ao redor de sua hipotenusa.
- 1047.** Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno da hipotenusa, sabendo que um dos ângulos do triângulo é de  $60^\circ$  e que a hipotenusa tem medida  $2a$ .

- 1048.** Calcule a área e o volume gerados pela rotação da figura dada em torno do eixo indicado  $XY$ .



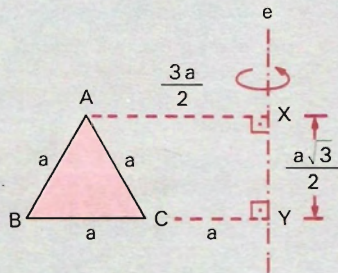
**Solução**

1ª modo: calculando diretamente.

a) Área

$$S_{ABC} = S_{AB} + S_{AC} + S_{BC}$$

$\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$   
 gerada (lateral) (lateral) (coroa)  
 por (tronco) (tronco)  
 ABC



Fórmulas  $\left\{ \begin{array}{l} \text{tronco de cone: } A_t = \pi(R + r)g \\ \text{coroa circular: } A = \pi(R^2 - r^2) \end{array} \right.$

$$S_{ABC} = \pi \left( 2a + \frac{3a}{2} \right) a + \pi \left( \frac{3a}{2} + a \right) a + \pi [(2a)^2 - a^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{7}{2} \pi a^2 + \frac{5}{2} \pi a^2 + 3 \pi a^2 \Rightarrow S_{ABC} = 9 \pi a^2$$

b) Volume

$$V_{ABC} = V_{XABY} - V_{XACY}$$

$\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$   
 gerado              tronco              tronco  
 por ABC              de cone              de cone

Fórmula:  $V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2)$ .

$$V_{ABC} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \left[ (2a)^2 + (2a) \cdot \left(\frac{3a}{2}\right) + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 \right] -$$

$$- \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \left[ \left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right) \cdot a + a^2 \right]$$

$$V_{ABC} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \left[ 4a^2 + 3a^2 + \frac{9a^2}{4} - \frac{9a^2}{4} - \frac{3a^2}{2} - a^2 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{ABC} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{9a^2}{4} \Rightarrow V_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \pi a^3$$

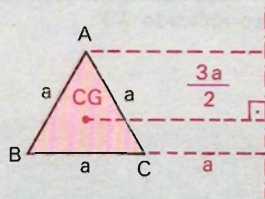
2.º modo: usando as fórmulas de Pappus-Guldin.

a) Área

$$A = 2\pi \ell d$$

com  $\ell = 3a$  e  $d = \frac{3a}{2}$ , vem:

$$A = 2\pi \cdot 3a \cdot \frac{3a}{2} \Rightarrow A = 9\pi a^2.$$



b) Volume

$$V = 2\pi Sd$$

$$\text{com } S = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{e } d = \frac{3a}{2}, \text{ vem } V = 2\pi \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a}{2} \Rightarrow V = \frac{3\sqrt{3}}{4} \pi a^3.$$

- 1049.** Calcule o volume e a área do sólido gerado por um triângulo equilátero de lado  $a$  que gira ao redor de um dos seus lados.
- 1050.** Determine o volume de um sólido gerado por um triângulo equilátero de lado  $a$ , quando gira em torno de um eixo paralelo a um de seus lados, sabendo que esse eixo passa pelo vértice oposto a esse lado.
- 1051.** Calcule o volume do sólido gerado por um triângulo equilátero de lado  $a$  que gira em torno de um eixo que contém um vértice e é paralelo à altura relativa a outro vértice.
- 1052.** Consideremos um triângulo equilátero  $ABC$  de lado  $5 \text{ cm}$ . Do ponto  $D$ , médio de  $AB$ , traçamos a perpendicular  $DE$  até  $AC$ . Executando uma revolução completa em torno de  $AC$ , calcule o volume do sólido gerado pela figura  $DECB$ .

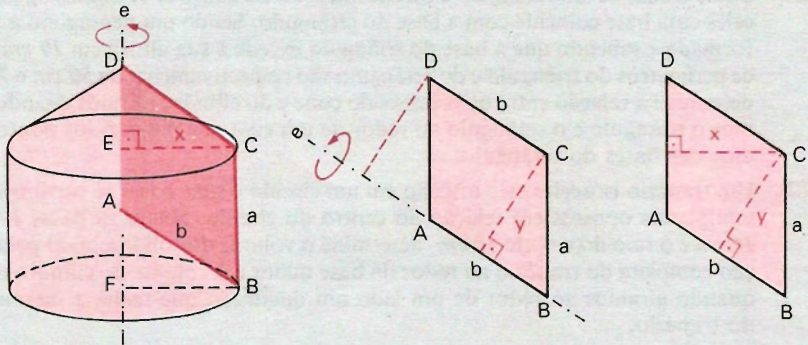
- 1053.** Determine o volume e a área de um sólido gerado quando um triângulo equilátero de lado  $a$  gira em torno de um eixo perpendicular a um dos seus lados e que passa pela extremidade desse lado.
- 1054.** Determine o volume e a área de um sólido gerado por um triângulo equilátero  $ABC$  que faz uma rotação de  $360^\circ$  em torno de um eixo que é perpendicular à sua altura  $AM$  e passa pelo vértice  $A$  do triângulo, sabendo que a medida do lado do triângulo é igual a  $m$ .
- 1055.** Seja  $ABC$  um triângulo equilátero de lado  $a$ . Prolonga-se a base  $BC$  até um ponto  $D$ , tal que  $CD = a$ . Pelo ponto  $D$ , levantamos uma perpendicular ao segmento  $BD$  e fazemos girar o triângulo em torno de  $DE$ , que é perpendicular a  $BD$ . Determine o volume e a área do sólido gerado.
- 1056.** Determine a área total e o volume do sólido gerado por um quadrado de lado  $a$ , sabendo que faz uma rotação de  $360^\circ$  em torno de um de seus lados.
- 1057.** Calcule o volume e a área do sólido gerado pela rotação de um quadrado de lado  $a$ , em torno de um eixo que passa por um de seus vértices e é paralelo a uma de suas diagonais.
- 1058.** Um quadrado de lado igual a  $m$  gira em torno de um eixo que passa pela extremidade de uma diagonal e é perpendicular a essa diagonal. Determine a área e o volume do sólido gerado.
- 1059.** Determine o volume do sólido gerado por um retângulo que gira  $360^\circ$  em torno de uma reta  $r$  paralela aos maiores lados do retângulo, distando  $6\text{ cm}$  do lado mais próximo, sendo  $10\text{ cm}$  e  $15\text{ cm}$  as medidas do comprimento e da altura do retângulo.
- 1060.** Girando um retângulo de  $8\text{ cm}$  por  $12\text{ cm}$  ao redor de cada um de seus lados, obtemos dois cilindros. Determine o volume e a superfície total dos dois cilindros.
- 1061.** Um paralelogramo de lados  $27\text{ cm}$  e  $12\text{ cm}$  e ângulo entre os lados de  $60^\circ$  gira em torno de um eixo que contém o seu maior lado. Determine a área e o volume do sólido obtido.
- 1062.** As áreas laterais dos cilindros gerados por um mesmo retângulo que gira ao redor de cada lado são iguais.
- 1063.** Um retângulo de  $4\text{ cm}$  de comprimento e  $3\text{ cm}$  de largura gira ao redor de um eixo, situado no seu plano, paralelo ao maior lado e à distância de  $1\text{ cm}$  desse lado. Calcule o volume do sólido gerado pela revolução desse retângulo.
- 1064.** As diagonais de um losango de  $5\text{ cm}$  de lado estão na razão  $1 : 2$ . Ache o volume do sólido que se obtém quando o losango dá um giro de  $360^\circ$  em torno de um de seus lados.

- 1065.** Um losango de lado  $36 \text{ cm}$  e ângulo agudo  $60^\circ$  gira em torno de um eixo passando por um vértice e perpendicular à sua maior diagonal. Encontre a área e o volume do sólido obtido.
- 1066.** Um trapézio  $ABCD$  retângulo em  $B$  tem por bases  $AB = 24 \text{ cm}$  e  $CD = 13 \text{ cm}$  e por altura  $BC = 16 \text{ cm}$ . Qual é o volume do sólido que se obtém quando este gira em torno de  $AB$ ?
- 1067.** Um trapézio retângulo gira em torno do segmento adjacente aos ângulos retos. Sendo  $68 \text{ cm}^2$  a área do trapézio e as bases  $10 \text{ cm}$  e  $7 \text{ cm}$ , determine o volume do sólido obtido.
- 1068.** Determine o volume do sólido obtido quando giramos um trapézio isósceles de altura  $h$ , em torno da base maior, sendo a medida dessa base igual a  $m$  e  $45^\circ$  o ângulo agudo do trapézio.
- 1069.** Determine a medida do sólido obtido pela rotação de um hexágono regular, de lado  $8 \text{ cm}$ , em torno de um de seus lados.
- 1070.** Sabendo que  $OABCD$  é um semi-hexágono regular de  $\frac{10}{\sqrt{\pi}} m$  de lado, calcule a área da superfície gerada pela poligonal  $ABCD$  em rotação completa em torno do diâmetro  $AOB$ .
- 1071.** Um triângulo gira  $360^\circ$  em torno de cada um de seus lados, gerando três sólidos de volumes inversamente proporcionais aos lados do triângulo.
- 1072.** Conhecendo a área  $A$  do triângulo gerador de um cone e a área total  $B$  do cone, calcule o apótema e o raio da base.
- 1073.** Demonstre que, se fazemos girar um triângulo qualquer em torno de um de seus lados, o volume do sólido obtido é igual ao produto da área do triângulo pelo círculo descrito pelo ponto de interseção das medianas.
- 1074.** Quando um triângulo retângulo isósceles gira ao redor de uma reta conduzida pelo vértice do ângulo reto, paralelamente à hipotenusa ele gera um volume equivalente à esfera que teria a hipotenusa por diâmetro.
- 1075.** As áreas laterais dos cones gerados por um mesmo triângulo retângulo que gira em torno de cada cateto são inversamente proporcionais aos catetos fixos.
- 1076.** Os volumes dos cones gerados por um triângulo retângulo que gira em torno de cada cateto são inversamente proporcionais aos catetos fixos.
- 1077.** Representando por  $V_a$ ,  $V_b$  e  $V_c$  os volumes dos sólidos gerados por um triângulo retângulo  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , quando gira respectivamente em torno de hipotenusa  $a$ , dos catetos  $b$  e  $c$ , verifique a identidade:

$$\frac{1}{V_a^2} = \frac{1}{V_b^2} + \frac{1}{V_c^2}.$$

- 1078.** Um triângulo equilátero  $ABC$  tem lado  $a$ ; por um ponto  $P$  da base  $BC$  traçam-se as paralelas  $PR$  e  $PS$ , respectivamente, aos lados  $AB$  e  $AC$ , que concorrem com  $AC$  e  $AB$ , respectivamente em  $R$  e  $S$ . Determine a distância  $x = PB$ , de modo que o volume do sólido gerado pelo paralelogramo  $PRAS$  seja  $2/3$  do volume do sólido gerado pelo triângulo  $ABC$ , quando a figura girar ao redor de  $BC$ .
- 1079.** Seja dado um paralelogramo  $ABCD$  de lado  $AD = a$  e  $AB = b$ . Mostre que, se girarmos sucessivamente em  $360^\circ$  o paralelogramo em torno de  $AD$  e de  $AB$ , obteremos os volumes  $V_a$  e  $V_b$  que estão na razão  $b/a$ .

**Solução**



O sólido gerado por  $ABCD$  é equivalente ao gerado por  $FBCE$  (girando em torno de  $AD$ ).

$$V_a = \pi x^2 a \qquad V_b = \pi y^2 b$$

$$\text{Área de } ABCD = ax = by \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{b}{a}.$$

Estabelecendo a razão, vem:

$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{\pi x^2 a}{\pi y^2 b} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{V_a}{V_b} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{V_a}{V_b} = \frac{b}{a}.$$

- 1080.** Os volumes dos cilindros gerados por um retângulo que gira em torno de cada lado são inversamente proporcionais aos lados fixos.
- 1081.** O volume de um cilindro circular reto é igual ao produto da área do retângulo gerador pelo comprimento da circunferência que descreve o ponto de concurso das diagonais do retângulo.
- 1082.** O volume de um cilindro circular gerado por um retângulo, de área  $A \text{ cm}^2$ , é de  $B \text{ cm}^3$ . Calcule o raio.
- 1083.** Calcule as dimensões de um retângulo, sabendo que, se o fizermos girar sucessivamente em torno de dois lados adjacentes, os volumes dos cilindros gerados serão, respectivamente,  $V$  e  $V'$ .

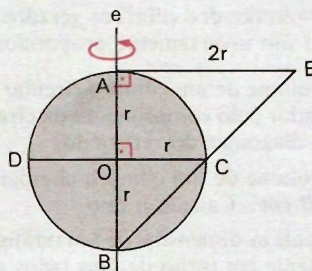
- 1084.** O volume do sólido gerado por um retângulo girando em torno de um eixo de seu plano, paralelo a um de seus lados, e externo ao retângulo, é igual ao produto da área do retângulo pelo comprimento da circunferência descrita pelo centro do retângulo.
- 1085.** Sendo  $a$  o lado de um losango e  $\theta$  um de seus ângulos, exprima em função de  $a$  e  $\theta$  o volume do sólido que se obtém girando o losango em torno de um de seus lados.
- 1086.** Um retângulo de dimensões  $a$  e  $b$  gira em torno de uma reta de seu plano, paralela aos lados de medida  $b$  e cuja distância ao centro do retângulo é  $d > a/2$ . Determine a superfície total e o volume do sólido anular gerado pelo retângulo.
- 1087.** Sobre a base de um retângulo e exteriormente a ele constrói-se um triângulo isósceles cuja base coincide com a base do retângulo. Sendo um pentágono a figura formada e sabendo que a base do triângulo excede a sua altura em  $19\text{ cm}$  e que os perímetros do triângulo e do retângulo são respectivamente de  $50\text{ cm}$  e  $70\text{ cm}$ , determine a relação entre os volumes do cone e do cilindro obtidos quando giramos o triângulo e o retângulo ao redor de um eixo que passa pelos pontos médios das bases do retângulo.
- 1088.** Um trapézio isósceles está inscrito em um círculo e suas bases se encontram em semiplanos opostos em relação ao centro do círculo. Sendo as bases  $12\text{ cm}$  e  $16\text{ cm}$  e o raio do círculo  $10\text{ cm}$ , determine o volume do sólido obtido pela rotação completa do trapézio ao redor da base maior e o volume do cilindro obtido quando giramos ao redor de um lado um quadrado que tenha a mesma área do trapézio.
- 1089.** Consideremos um semicírculo  $ADC$  de centro  $O$  e de diâmetro  $AC = 2a$ . Prolongamos  $OA$  até um ponto  $B$ , tal que  $OA = AB$ ; e pelo vértice  $B$  traçamos a tangente  $BM$  ao semicírculo. Determine a medida de  $BM$  e o ângulo  $MBC$  compreendido entre a tangente e o diâmetro prolongado. Depois calcule a área e o volume do sólido obtido quando efetuamos uma rotação em torno de  $BO$  da figura  $BMO$ .
- 1090.** Num círculo de centro  $O$  e raio  $r$ , traçam-se dois diâmetros perpendiculares  $AB$  e  $CD$ ; traça-se  $BC$  e prolonga-se até interceptar em  $E$  a tangente ao círculo por  $A$ . Gira-se o triângulo  $ABE$  em torno de  $AB$ . Calcule o volume e a área gerada pela superfície  $CEA$  compreendida entre as retas  $AE$ ,  $EC$  e o arco  $AC$ .

**Solução**

a) Volume

$$V_{CEA} = V_{OCEA} - V_{OCA}$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 tronco                   $\frac{1}{2}$  esfera  
 de cone





$$V_{CEA} = \frac{\pi r}{3} [(2r)^2 + (2r) \cdot (r) + r^2] - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{CEA} = \frac{7}{3} \pi r^3 - \frac{2}{3} \pi r^3 \Rightarrow V_{CEA} = \frac{5}{3} \pi r^3$$

b) Área

$$S_{CEA} = S_{CF} + S_{EA} + S_{AC}$$

$\downarrow$                      $\downarrow$                      $\downarrow$   
 lateral            (círculo)            ( $\frac{1}{2}$  superfície esférica)  
 de tronco

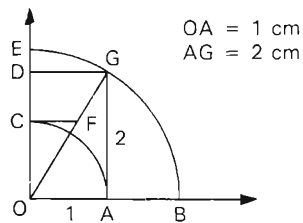
$$S_{CEA} = \pi(2r + r) \cdot r \sqrt{2} + \pi(2r)^2 + \frac{1}{2} 4\pi r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{CEA} = 3\sqrt{2} \pi r^2 + 4\pi r^2 + 2\pi r^2 \Rightarrow S_{CEA} = 3(2 + \sqrt{2}) \pi r^2$$

**1091.** A medida do raio de um círculo é  $20 \text{ cm}$ . Por um ponto  $P$  situado a  $50 \text{ cm}$  do centro traçam-se duas tangentes ao círculo. Sejam  $A$  e  $B$  os pontos de tangência e  $AB$  a corda obtida. Efetuando uma rotação do triângulo  $PAB$  em torno do diâmetro paralelo a  $AB$ , obtemos um sólido. Calcule o volume desse sólido.

**1092.** Consideremos um hexágono regular inscrito em um círculo de raio  $R$ . Efetuando uma rotação do círculo em torno de um diâmetro que passa pelos pontos médios de dois lados paralelos do hexágono, calcule a razão entre os volumes gerados pelo círculo e pelo hexágono.

**1093.** As questões abaixo ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ) referem-se à figura ao lado, em que são dados  $OA = 1 \text{ cm}$  e  $AG = 2 \text{ cm}$ .



- Ache a área da superfície esférica de raio  $OB$ .
- Ache a medida de  $CF$ .
- Ache a área do quarto da coroa circular  $ABEC$ .
- Ache o volume do sólido que se obtém girando o triângulo  $OAG$  em torno da reta  $OE$ .
- Ache a área lateral do sólido que se obtém girando o trapézio  $CFGD$  em torno da reta  $OE$ .

## CAPÍTULO XVI

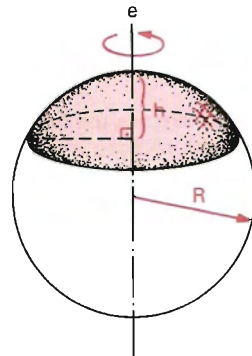
# Superfícies e Sólidos Esféricos

### I. Superfícies — Definições

#### 278. Calota esférica

É a superfície de revolução cuja geratriz é um arco de circunferência e cujo eixo é uma reta tal que:

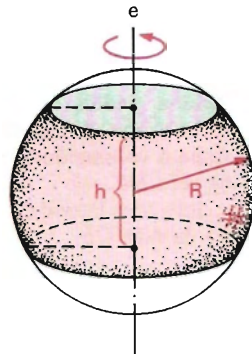
- passa pelo centro da circunferência que contém o arco;
- passa por um extremo do arco e não o intercepta em outro ponto;
- é coplanar com o arco.



#### 279. Zona esférica

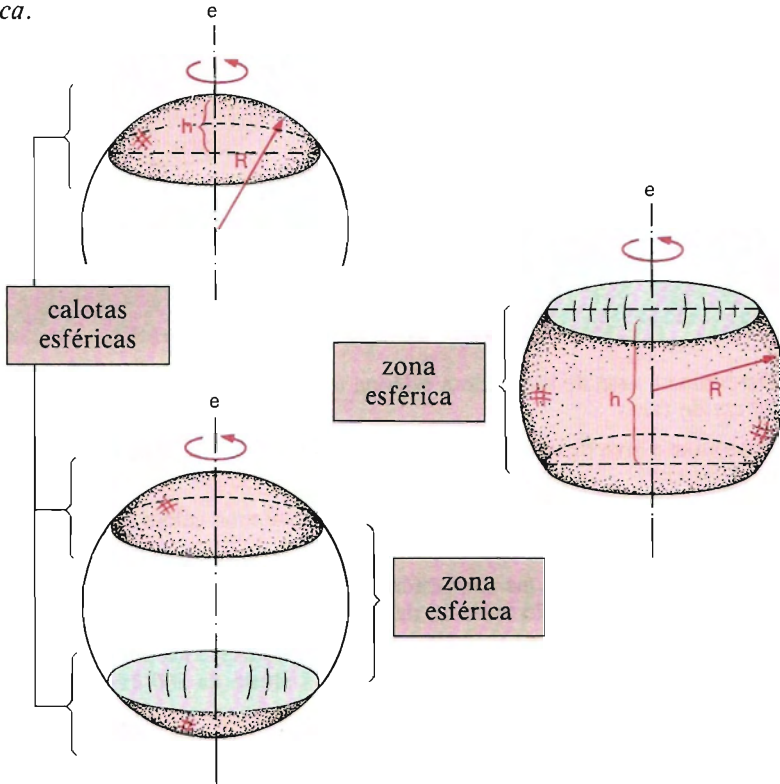
É a superfície de revolução cuja geratriz é um arco de circunferência e cujo eixo é uma reta tal que:

- passa pelo centro da circunferência que contém o arco;
- não passa por nenhum extremo do arco nem intercepta o arco em outro ponto;
- é coplanar com o arco.



### 280. Outra definição para calota e zona esférica

Seccionando uma superfície esférica por dois planos paralelos entre si, dividimos essa superfície em três partes; a que está entre os dois planos, reunida às duas circunferências-seção, é chamada *zona esférica*, e cada uma das outras duas, reunidas à respectiva circunferência-seção, é chamada *calota esférica*.



## II. Áreas das superfícies esféricas

### 281. Área da calota e área da zona esférica

$$A = 2\pi R h$$

Veja a dedução no item 296.

em que:  $R$  é o raio da circunferência que contém o arco (é o raio da *superfície esférica*);

$h$  é a projeção do arco sobre o eixo.

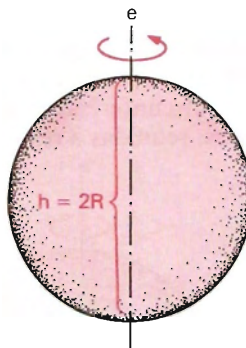
$$A_{\text{calota}} = 2\pi R h_{\text{calota}}$$

$$A_{\text{zona}} = 2\pi R h_{\text{zona}}$$

### 282. Área da superfície da esfera

A superfície da esfera pode ser entendida, por extensão, como uma calota esférica de altura igual ao diâmetro ( $h = 2R$ ). Daí, a área da superfície esférica é:

$$A = 2\pi R \cdot \frac{2R}{h} \Rightarrow A = 4\pi R^2$$



## EXERCÍCIOS

- 1094.** Determine a área de uma calota esférica de 75 cm de altura de uma esfera de 70 cm de raio.
- 1095.** Determine a área de uma esfera em que uma zona de 10 cm de altura tem área de  $120\pi \text{ cm}^2$ .
- 1096.** Determine o volume de uma esfera, sabendo que uma calota dessa esfera tem 47 cm de altura e  $198\pi \text{ cm}^2$  de área.
- 1097.** Determine a altura de uma zona esférica, sabendo que sua área é igual ao quíntuplo da área do círculo máximo da esfera na qual está contida.
- 1098.** Qual é a fração da área da superfície da Terra suposta esférica (raio = 6 300 km) observada por um cosmonauta que se acha à altura de 300 km?

**Solução**

Sejam:

$x = 300$  a altitude,

$R = 6\,300$  o raio da Terra e

$h$  a altura da calota visível.

O problema pede:  $\frac{A_{\text{calota}}}{A_{\text{sup.esf.}}}$

$$\frac{A_{\text{calota}}}{A_{\text{sup.esf.}}} = \frac{2\pi R h}{4\pi R^2} = \frac{h}{2R}$$

Calculando  $h$ , no triângulo retângulo  $PTO$ , temos:

$$R^2 = (R - h)(x + R) \implies h = \frac{Rx}{x + R}$$

$$\implies \frac{h}{2R} = \frac{x}{2(x + R)}$$

$$\text{Substituindo } x \text{ e } R, \text{ vem: } \frac{h}{2R} = \frac{300}{2(300 + 6300)} \implies \frac{h}{2R} = \frac{1}{44}$$

Resposta:  $\frac{1}{44}$  da superfície da Terra.

- 1099.** Determine a altura a que deve se elevar um astronauta para ver  $1/36$  da superfície da Terra.
- 1100.** Admitindo a Terra como esférica, determine a altura e a área da calota esférica observada por um astronauta que sobrevoa a Terra, no instante em que ele se encontra na altitude de 9 vezes o raio terrestre. Adote o raio da Terra como unidade de medida.
- 1101.** Um ponto luminoso está situado a  $2 \text{ m}$  de distância de uma esfera de raio igual a  $4 \text{ m}$ . Qual o valor da área da porção iluminada da esfera?
- 1102.** Determine a que distância  $x$  da superfície de uma esfera de raio  $R$  deve ficar um ponto  $M$ , a fim de que a calota visível desse ponto seja uma fração dada  $1/m$  da superfície da esfera.
- 1103.** Uma esfera é seccionada por um plano a  $3 \text{ cm}$  do centro da esfera. Sabendo que as áreas das calotas determinadas estão entre si como  $3/5$ , calcule o volume da esfera.
- 1104.** Consideremos duas esferas concêntricas. A esfera exterior é seccionada por um plano tangente à interior, determinando uma calota esférica de  $100 \pi \text{ cm}^2$  de área. Calcule o raio da esfera exterior, sendo  $3 \text{ cm}$  a medida do raio da esfera interior.
- 1105.** Seccionando uma esfera por um plano, obtemos duas calotas cujas áreas estão na razão  $2/5$ . Calcule a superfície da esfera, sendo  $4 \text{ cm}$  a medida da corda do arco gerador da menor calota.
- 1106.** Um arco de  $60^\circ$ , pertencente a uma circunferência de raio  $10 \text{ cm}$ , gira em torno de um diâmetro que passa por uma de suas extremidades. Determine a área da calota gerada.
- 1107.** Calcule a razão entre as duas calotas esféricas em que uma superfície esférica é dividida por um plano que passa por uma face do cubo inscrito.

- 1108.** Corta-se uma esfera de raio  $R$  por um plano  $\alpha$ . A diferença das áreas das calotas obtidas é igual à área da secção determinada pelo plano. Qual a distância do plano ao centro da esfera?
- 1109.** Dada uma circunferência de raio  $R$  e diâmetro  $CB$ , uma corda  $AC$  é tal que, girando a figura em torno de  $AB$ , a área da calota gerada por  $AC$  e a área lateral do cone de geratriz  $\overline{AC}$  estão na razão  $M : (m/n > 1)$ . Calcule a projeção de  $\overline{AC}$  sobre  $\overline{BC}$ .

**Solução**

$$\frac{A_{\text{calota}}}{A_{\text{l. cone}}} = \frac{m}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi R x}{\pi y z} = \frac{m}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2R x n = m y z \quad (1)$$

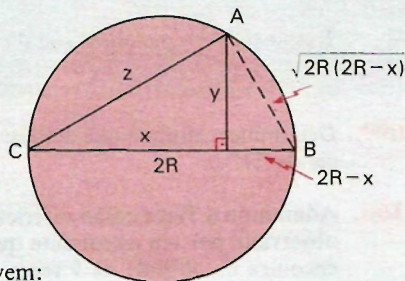
Do triângulo  $ACB$  retângulo em  $A$ , vem:

$$y z = x \sqrt{2R(2R - x)} \quad (2)$$

$$(1) \text{ e } (2) \Rightarrow 2R x n = m x \sqrt{2R(2R - x)} \Rightarrow m^2 x = 2R(m^2 - n^2) \Rightarrow$$

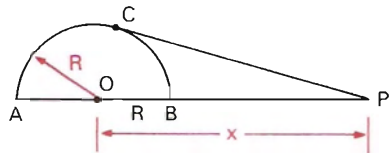
$$\Rightarrow x = \frac{m^2 - n^2}{m^2} \cdot 2R$$

Resposta: A projeção mede  $\frac{m^2 - n^2}{m^2} \cdot 2R$ .



- 1110.** Determine a distância de um plano secante ao centro de uma esfera, sabendo que a maior calota determinada por esse plano tem área igual à média geométrica entre a área da menor calota e a área da esfera na qual estão contidas as calotas.
- 1111.** A geratriz de um cone forma com o eixo um ângulo de  $30^\circ$ , sendo esse cone circunscrito a uma esfera de raio  $12 \text{ cm}$ . Obtenha a área da menor calota determinada pelo círculo de contato das duas superfícies.
- 1112.** Determine o raio da esfera na qual seja possível destacar uma calota de altura igual a  $2m$  e cuja área seja igual ao triplo da área lateral do cone, tendo o vértice no centro da esfera e por base a base da calota.
- 1113.** Determine a medida da área de uma zona cujos raios das bases medem  $3 \text{ cm}$  e  $5 \text{ cm}$ , respectivamente, sendo  $8 \text{ cm}$  a medida da altura da zona.
- 1114.** Uma zona esférica de  $5 \text{ cm}$  de altura é equivalente a um fuso esférico de  $45^\circ$  da mesma esfera. Determine o volume e a área da esfera.

- 1115.** Determine o raio de uma esfera, sabendo que a diferença entre a sua área e a de uma sua zona de  $5\text{ cm}$  de altura é igual à área de um fuso de  $60^\circ$  da mesma esfera.
- 1116.** A soma das áreas de um fuso de  $60^\circ$  e de uma zona esférica de  $8\text{ cm}$  de altura é igual a  $3/2$  da área da esfera. Determine o volume da esfera.
- 1117.** Uma zona esférica e um fuso de uma mesma esfera têm áreas iguais. A altura da zona é  $1/n$  do raio. Calcule o arco equatorial do fuso.
- 1118.** Dois planos equidistantes do centro de uma esfera de raio  $R$  seccionam essa esfera, determinando uma zona cuja área é igual à soma das áreas de suas bases. Obtenha a distância entre esses dois planos.
- 1119.** A que distância do centro de uma esfera devemos traçar um plano para que a área da zona (calota) determinada seja igual à área lateral de um cone cuja base é o círculo da secção do plano com a esfera e cujo vértice é o centro da esfera, sendo  $10\text{ cm}$  a medida do raio da esfera?
- 1120.** Um cone está inscrito em uma esfera de raio  $r$ . A área lateral do cone é a quinta parte da área de uma zona de altura igual à altura do cone. Determine a distância do centro da esfera à base do cone.
- 1121.** Um plano secciona uma esfera de raio  $r$  a uma distância  $d$  do centro da esfera, determinando uma zona (calota) cuja área é igual à área de uma outra esfera de raio igual ao triplo de  $d$ . Obtenha essa distância  $d$ .
- 1122.** Dois planos seccionam uma esfera, sendo que o primeiro passa pelo centro da esfera e o segundo a uma distância  $d$  do centro da esfera. Sabendo que a área da zona esférica determinada por esses dois planos é igual à soma das áreas do círculo máximo da esfera com a área da secção à distância  $d$  do centro da esfera, obtenha  $d$ .
- 1123.** É dado um semicírculo  $\widehat{AB}$  de raio  $R$  e um ponto  $P$  no prolongamento do diâmetro. Calcule  $\overline{OP}$ , de modo que a tangente  $\overline{PC}$  possa gerar em torno do diâmetro uma área igual à área gerada pelo arco  $\widehat{AC}$  em torno do mesmo diâmetro.



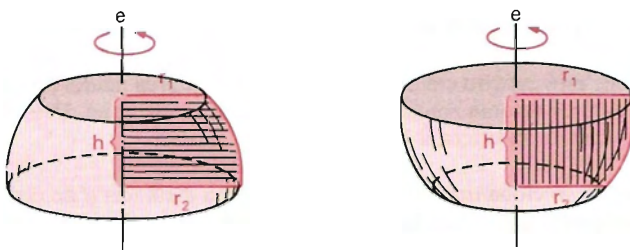
- 1124.** Seja uma esfera de raio  $R$  cortada por um feixe de  $N$  planos que tem uma reta comum, determinando nesta  $N + 1$  sólidos. Sendo  $S$  a superfície total desses sólidos, prove que:

$$\frac{S}{2\pi R^2} - 2 \leq N.$$

### III. Sólidos esféricos: definições e volumes

#### 283. Segmento esférico de duas bases

Consideremos um segmento circular de duas bases e um eixo (reta) perpendicular a essas bases pelo centro e que divide o segmento em duas partes congruentes. Girando uma dessas partes em torno do eixo, obtém-se um sólido que é chamado *segmento esférico de duas bases*.



#### 284. Volume

$$V = \frac{\pi h}{6} [3(r_1^2 + r_2^2) + h^2]$$

em que

$r_1$  é a medida do raio de uma base

$r_2$  é a medida do raio da outra base e

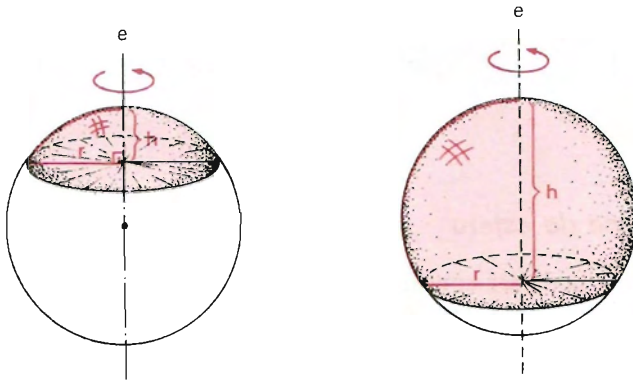
$h$  é a medida da altura (projeção do arco sobre o eixo).

Veja a dedução no item 293.



### 285. Segmento esférico de uma base

Consideremos um segmento circular de uma base e um eixo (reta) perpendicular a ela pelo centro e que divide o segmento em duas partes congruentes. Girando uma dessas partes em torno do eixo, obtém-se um sólido que é chamado *segmento esférico de uma base*.



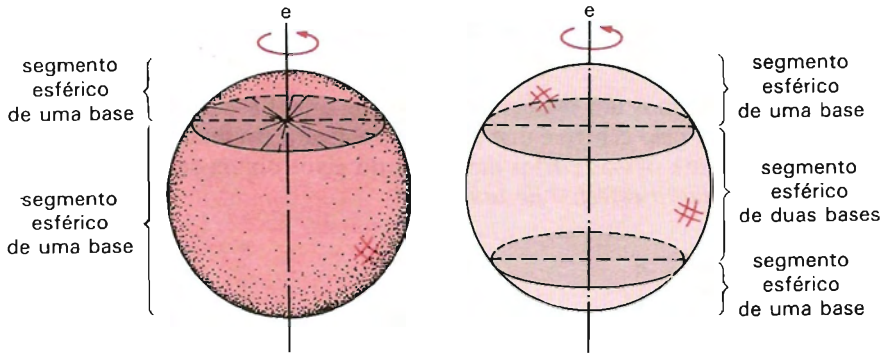
### 286. Volume

Decorre da fórmula do volume do segmento esférico de duas bases, fazendo:  $r_1 = r$  e  $r_2 = 0$ .

$$V = \frac{\pi h}{6} [3(r^2 + 0) + h^2] \Rightarrow V = \frac{\pi h}{6} [3r^2 + h^2]$$

### 287. Outra definição para os segmentos esféricos

Secionando uma esfera por dois planos paralelos entre si, dividimos a esfera em três partes; a que está compreendida entre os dois planos, reunida aos dois círculos-secção, é chamada *segmento esférico de duas bases*, e cada uma das outras duas, reunidas ao respectivo círculo-secção, é chamada *segmento esférico de uma base*.

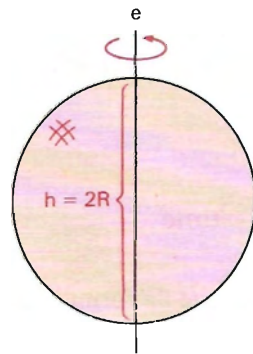


### 288. Volume da esfera

A esfera pode ser considerada, por extensão, um segmento esférico em que  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 0$  e  $h = 2R$ . Daí, o volume da esfera é:

$$V = \frac{\overbrace{\pi(2R)}^h}{6} [3(\underbrace{0}_{r_1^2} + \underbrace{0}_{r_2^2}) + \underbrace{(2R)^2}_h] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

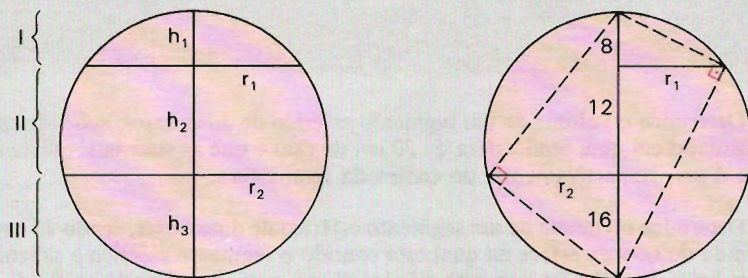


## EXERCÍCIOS

- 1125.** Determine o volume de um segmento esférico de uma base, sendo de  $16 \pi m^2$  a área da base e  $2 m$  a altura do segmento.
- 1126.** O raio da base e a altura de um segmento esférico de uma base medem, respectivamente,  $8 cm$  e  $12 cm$ . Determine o volume do segmento esférico.

- 1127.** Determine o volume de um segmento esférico cuja calota tem  $100\pi \text{ cm}^2$  de área, estando ambos situados em uma esfera de  $20 \text{ cm}$  de diâmetro.
- 1128.** Determine o volume do segmento esférico obtido da secção de uma esfera de  $10 \text{ cm}$  de raio, por um plano, que passa a  $2 \text{ cm}$  do centro da esfera.
- 1129.** Determine o volume de um segmento esférico de duas bases, sendo  $4 \text{ cm}$  a altura do segmento e  $8 \text{ cm}$  os diâmetros das bases.
- 1130.** Uma esfera de  $18 \text{ m}$  de raio é seccionada por planos perpendiculares a um diâmetro, dividindo-o em partes proporcionais a 2, 3 e 4. Calcule as áreas totais e os volumes dos sólidos determinados.

### Solução



Os sólidos determinados são segmentos esféricos.

- a) Cálculo dos elementos caracterizados na figura.

$$R = 18 \quad h_1 = 2k \quad h_2 = 3k \quad h_3 = 4k$$

$$h_1 + h_2 + h_3 = 36 \Rightarrow 9k = 36 \Rightarrow k = 4$$

$$h_1 = 8 \quad h_2 = 12 \quad h_3 = 16$$

Dos triângulos retângulos vem:

$$r_1^2 = 8 \cdot 28 \Rightarrow r_1^2 = 224 \quad r_2^2 = 16 \cdot 20 \Rightarrow r_2^2 = 320$$

- b) Cálculo das áreas e volumes.

Do segmento esférico I.

$$A_t = A_{\text{calota}} + A_{\text{círculo}} \Rightarrow A_t = 2\pi R h_1 + \pi r_1^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow A_t = 2\pi \cdot 18 \cdot 8 + \pi \cdot 224 \Rightarrow A_t = 512\pi \text{ m}^2$$

$$V = \frac{\pi h_1}{6} [3r_1^2 + h_1^2] \Rightarrow V = \frac{\pi \cdot 8}{6} [3 \cdot 224 + 64] \Rightarrow V = \frac{2944}{3} \pi \text{ m}^3$$

Do segmento esférico II.

$$A_t = A_{\text{zona}} + A_{\text{círculo I}} + A_{\text{círculo II}} \Rightarrow A_t = 2\pi R h_2 + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow A_t = 2\pi \cdot 18 \cdot 12 + \pi \cdot 224 + \pi \cdot 320 \Rightarrow A_t = 976\pi \text{ m}^2$$

$$V = \frac{\pi h_2}{6} [3(r_1^2 + r_2^2) + h_2^2] \Rightarrow V = \frac{\pi 12}{6} [3(224 + 320) + 12^2] \Rightarrow \\ \Rightarrow V = 3\,552\pi \text{ m}^3$$

Do segmento esférico III.

$$A_t = A_{\text{calota}} + A_{\text{círculo}} \Rightarrow A_t = 2\pi R h_3 + \pi r_2^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow A_t = 2 \cdot \pi \cdot 18 \cdot 16 + \pi \cdot 320 \Rightarrow A_t = 896\pi \text{ m}^2$$

$$V = \frac{\pi h_3}{6} [3r_2^2 + h_3^2] \Rightarrow V = \frac{\pi 16}{6} [3 \cdot 320 + 16^2] \Rightarrow \\ \Rightarrow V = \frac{9\,728}{3}\pi \text{ m}^3$$

- 1131.** Determine o volume de um segmento esférico de duas bases, sabendo que está situado em uma semi-esfera de  $20 \text{ cm}$  de raio e que as suas bases distam  $3 \text{ cm}$  e  $6 \text{ cm}$ , respectivamente, do centro da semi-esfera.
- 1132.** Determine o volume de um segmento esférico de duas bases, sendo  $15 \text{ cm}$  a medida do raio da esfera na qual está contido o segmento esférico e sabendo que as bases paralelas do segmento esférico distam cada uma  $6 \text{ cm}$  do centro da esfera.
- 1133.** Dada uma esfera  $S$  de diâmetro  $AB = 2R$ , considera-se o cone  $C$  de altura  $AB$  e de raio  $R$ . Calcule o volume do sólido comum à esfera  $S$  e ao cone  $C$ .

### Solução

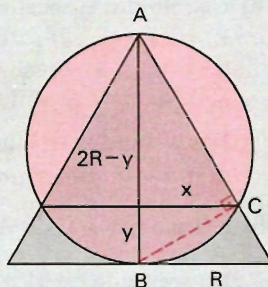
O sólido comum é a reunião de um cone de raio  $x$  e altura  $2R - y$ , com um segmento esférico de raio  $x$  e altura  $y$ .

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 (2R - y) + \frac{\pi y}{6} [3x^2 + y^2]$$

Cálculo de  $x$  e  $y$ .

Da semelhança:  $\frac{x}{R} = \frac{2R - y}{2R} \Rightarrow x = \frac{2R - y}{2}$ . (1)

Do triângulo  $ACB$ :  $x^2 = y(2R - y)$ . (2)



$$\text{De (1) e (2) saem: } x = \frac{4}{5} R \qquad y = \frac{2}{5} R$$

Substituindo  $x$  e  $y$  em  $V$ , temos:

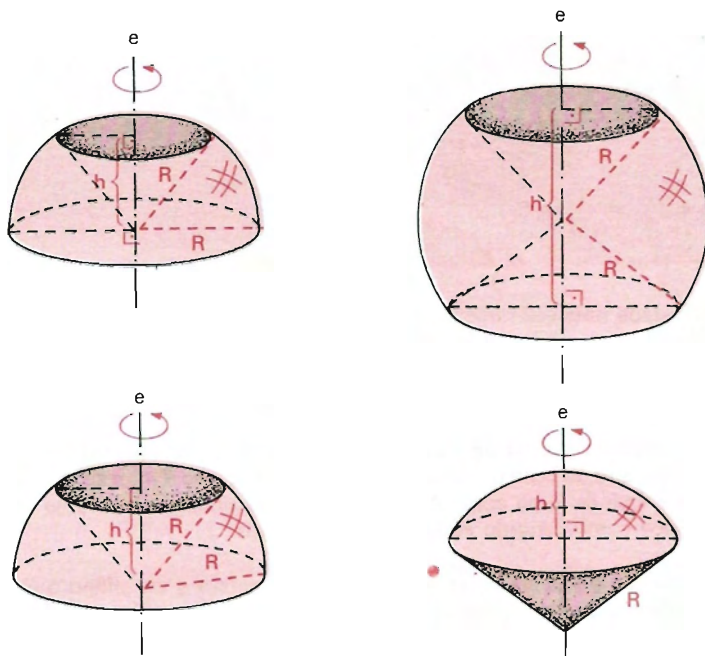
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{16}{25} R^2 \cdot 2x + \frac{\pi}{6} \cdot \frac{2}{5} R \left( 3 \cdot \frac{16}{25} R^2 + \frac{4}{25} R^2 \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow V &= \frac{12}{25} \pi R^3 \end{aligned}$$

- 1134.** Seja dada uma esfera de raio  $R$  em um ponto  $P$  distante  $h > R$  do seu centro. Considere-se o cone indefinido, formado pela totalidade das retas tangentes à esfera, traçadas pelo ponto  $P$ . Calcule o volume do sólido, cujos pontos são internos ao cone e externos à esfera.
- 1135.** Uma esfera de  $30 \text{ m}$  de diâmetro foi seccionada por dois planos paralelos do mesmo lado do centro e distantes deste centro  $12 \text{ m}$  e  $8 \text{ m}$ , respectivamente. Calcule a área da zona compreendida entre esses planos e o volume do segmento esférico compreendido entre esses dois planos.
- 1136.** Obtenha a distância entre o centro de uma esfera e um plano que a secciona determinando um segmento esférico, de tal maneira que o volume do segmento esférico seja igual ao volume de um cone de revolução cuja base é a secção da esfera e cujo vértice é o centro da esfera, sendo  $r$  o raio da esfera.
- 1137.** Seccionando um hemisfério de raio  $r$ , por um plano paralelo à base, obtemos um segmento esférico de uma base. Sendo o volume desse segmento igual ao volume de um cilindro cuja base é a secção e cuja altura é igual à distância entre o plano e a base do hemisfério, determine essa distância.
- 1138.** Num segmento esférico de uma só base, de uma esfera e raio  $R$ , está inscrito um cone, cujo vértice é um dos pólos relativos a sua base. Qual a área da base, se a razão entre o volume do cone e o do segmento esférico é igual à constante  $K$ ? (Discuta o problema.)

## 289. Setor esférico

É o sólido de revolução obtido pela rotação de um setor circular em torno de um eixo tal que:

- passa pelo vértice do setor circular;
- não intercepta o arco do setor circular ou o intercepta num extremo;
- é coplanar com o setor circular.



### 290. Volume do setor

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h$$

em que

$R$  é a medida do raio do setor (note que é o raio da esfera) e  $h$  é a medida da altura do setor (projecção do arco sobre o eixo).

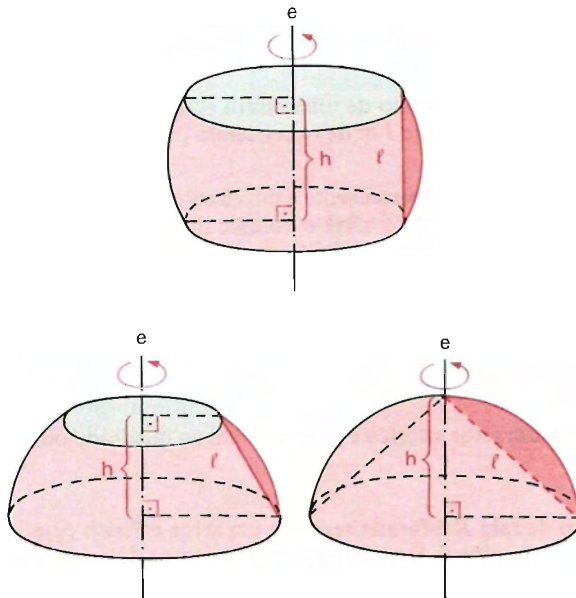
**Nota:** A esfera pode ser considerada, por extensão, um setor esférico de altura  $h = 2R$ .

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot \underbrace{2R}_h \Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

## 291. Anel esférico

É um sólido de revolução que se obtém pela rotação de um segmento circular (de uma base) em torno de um eixo tal que:

- passa pelo centro do círculo que define o segmento circular;
- não intercepta o arco do segmento circular ou intercepta-o num dos extremos;
- é coplanar com o segmento circular.



## 292. Volume do anel

$$V = \frac{\pi h}{6} \ell^2$$

em que

$h$  é a medida da altura (projecção do arco sobre o eixo) e  
 $\ell$  é a medida da corda (base do segmento circular).

## EXERCÍCIOS

- 1139.** Numa esfera de  $1\text{ m}$  de raio, uma zona de  $1\text{ m}^2$  serve de base a um setor esférico. Determine o volume do setor.
- 1140.** Um setor esférico tem volume igual a  $200\pi\text{ cm}^3$ , sua zona de base tem área igual a  $100\pi\text{ cm}^2$ . Determine o volume da esfera a qual pertence o setor esférico.
- 1141.** O volume de um setor esférico é igual a  $1350\pi\text{ cm}^3$ . O raio da esfera no qual está contido mede  $15\text{ cm}$ . Determine a medida da área da zona correspondente.
- 1142.** Determine a medida do raio de uma esfera cujo volume é igual ao volume de um setor de uma esfera de  $1\text{ m}$  de raio e tendo por base uma zona de  $80\pi\text{ cm}^2$ .
- 1143.** Um setor circular  $AOB$ , pertencente a um círculo de  $10\text{ cm}$  de raio, gira em torno do diâmetro  $POQ$ . Determine o volume do sólido gerado, sabendo que o raio  $AO$  forma com o diâmetro  $POQ$  um ângulo de  $60^\circ$  e que o raio  $OB$  forma com o mesmo diâmetro um ângulo de  $45^\circ$ .
- 1144.** Dois setores esféricos de uma mesma esfera e de mesmo volume têm necessariamente a mesma altura?
- 1145.** O volume de um setor esférico é proporcional ao quadrado ou ao cubo do raio? Justifique.
- 1146.** Uma esfera de raio  $R$  é furada segundo um setor esférico cujo vértice coincide com o centro da esfera. Determine a expressão que dá o raio da circunferência segundo o qual o setor corta a esfera, de tal maneira que o volume do setor seja  $1/n$  do volume da esfera.
- 1147.** Um anel esférico é gerado por um segmento circular cuja corda mede  $\ell$ . Sendo  $V$  o volume do anel, calcule a projeção da corda sobre o eixo.
- 1148.** Determine o volume gerado pelo segmento circular  $AMB$ , girando ao redor do diâmetro  $PQ$ , sendo a corda  $AB$  deste segmento igual a  $5\text{ cm}$ , a distância do ponto  $A$  ao eixo igual a  $3\text{ cm}$  e a distância do ponto  $B$  ao eixo igual a  $6\text{ cm}$ .
- 1149.** Dado um hemisfério  $H$ , definido por seu círculo máximo  $C$  e pelo pólo correspondente  $P$ , determine o volume interior a  $H$  e exterior a quatro cones, tendo  $P$  para vértice comum e para bases quatro círculos iguais, situados no plano  $C$ , tangentes interiormente a este círculo e exteriormente entre si.

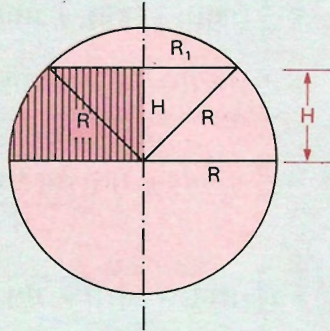


- 1150.** Deduza a fórmula do *volume do segmento esférico*; supondo conhecida a fórmula do volume do setor esférico.

**Solução**

Dividamos em 2 casos:

*1.º caso:* Uma das bases do segmento esférico é círculo máximo da esfera.



$$\left. \begin{aligned} V_{\text{segm.}} &= V_{\text{setor}} + V_{\text{cone}} \\ V_{\text{setor}} &= \frac{2}{3} \pi R^2 H = \frac{\pi H}{6} 4R^2 \\ V_{\text{cone}} &= \frac{1}{3} \pi R_1^2 H = \frac{\pi H}{6} 2R_1^2 \end{aligned} \right\} =$$

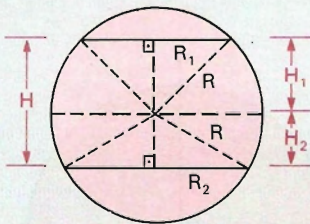
$$\Rightarrow V_{\text{segm.}} = \frac{\pi H}{6} [4R^2 + 2R_1^2] = \frac{\pi H}{6} [3R^2 + 3R_1^2 + R^2 - R_1^2] =$$

artifício

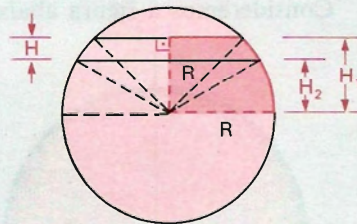
$H^2$

$$\Rightarrow V_{\text{segm.}} = \frac{\pi H}{6} [3(R_1^2 + R^2) + H^2]$$

*2.º caso:* Nenhuma das bases do segmento esférico é círculo máximo da esfera. Recaimos em soma ou diferença de dois segmentos do 1.º caso.



$$H = H_1 + H_2$$



$$H = H_1 - H_2$$

$$\begin{aligned} V_{\text{segm.}} &= V_{\text{segm.}_1} \pm V_{\text{segm.}_2} = \\ &= \frac{\pi H_1}{6} [3(R_1^2 + R^2) + H_1^2] \pm \frac{\pi H_2}{6} [3(R^2 + R_2^2) + H_2^2] = \end{aligned}$$



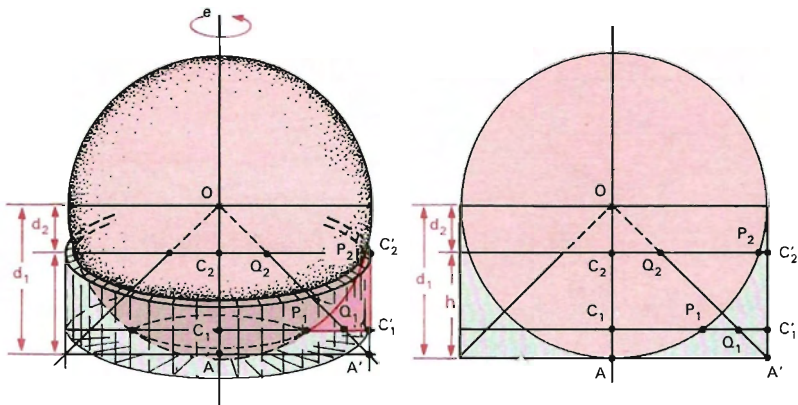
$$\begin{aligned}
 &= \frac{\pi}{6} [3R_1^2H_1 + 3R_2^2H_1 + H_1^3 \pm 3R_2^2H_2 \pm 3R_1^2H_2 \pm H_2^3] = \\
 &\quad \underbrace{3R_1^2H_1 + 3R_2^2H_1}_{R_1^2 + H_1^2} \quad \underbrace{H_1^3}_{R_1^2 + H_1^2} \pm \underbrace{3R_2^2H_2 \pm 3R_1^2H_2}_{R_1^2 + H_1^2} \pm H_2^3 = \\
 &= \frac{\pi}{6} [3R_1^2H_1 + 3R_2^2H_1 + 3H_1^2H_1 + H_1^3 \pm 3R_1^2H_2 \pm 3H_1^2H_2 \pm 3R_2^2H_2 \pm H_2^3] = \\
 &= \frac{\pi}{6} [3R_1^2(H_1 \pm H_2) + 3R_2^2(H_1 \pm H_2) + H_1^3 \pm 3H_1^2H_2 + 3H_1H_2^2 \pm H_2^3] = \\
 &= \frac{\pi}{6} [(3(R_1^2 + 3R_2^2) \underbrace{(H_1 \pm H_2)}_H) + \underbrace{(H_1 \pm H_2)^3}_H] = \\
 &= \frac{\pi}{6} [3(R_1^2 + R_2^2)H + H^3] \Rightarrow V_{\text{segm.}} = \frac{\pi H}{6} [3(R_1^2 + R_2^2) + H^2]
 \end{aligned}$$

## IV. Deduções das fórmulas de volumes dos sólidos esféricos

A dedução das fórmulas de volumes dos sólidos esféricos (segmento esférico, setor esférico e anel esférico) pode ser feita a partir do segmento esférico de raios  $r_1$  e  $r_2$  e altura  $h$ .

### 293. Volume do segmento esférico

Consideremos a figura abaixo:



em que

$$OA = AA' = OP_1 = OP_2 = R \text{ ("raio da esfera")}$$

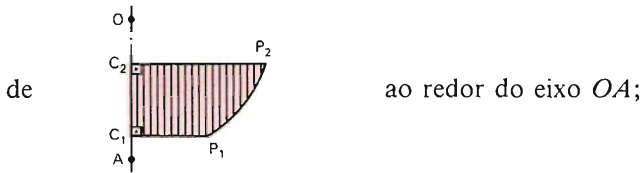
$$C_1P_1 = r_1 \text{ e } C_2P_2 = r_2 \text{ (raios das bases do segmento esférico)}$$

$$OC_1 = C_1Q_1 = d_1 \text{ e } OC_2 = C_2Q_2 = d_2$$

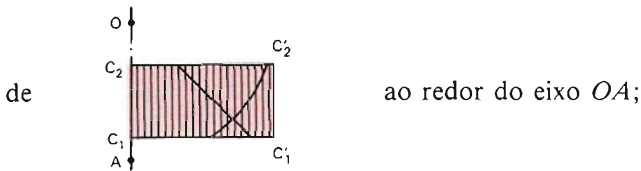
$$C_1C_2 = h = d_1 - d_2$$

Nessa figura devemos reconhecer:

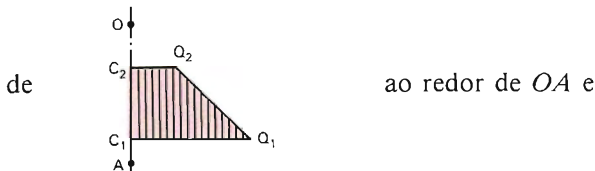
a) o *segmento esférico* gerado pela rotação



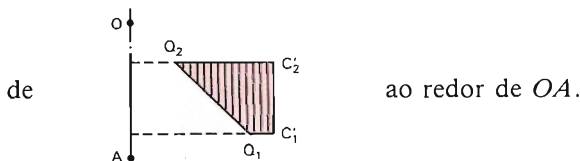
b) o *cilindro* gerado pela rotação



c) o *tronco de cone* gerado pela rotação



d) a *parte da anticlépsidra* gerada pela rotação



Pelo visto no item 224 o segmento esférico é equivalente à parte da anticlépsidra acima e, então, seu volume é dado pela diferença entre os volumes do cilindro e do tronco de cone acima identificados.

Então:

$$V = \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3} [(C_1 Q_1)^2 + (C_1 Q_1)(C_2 Q_2) + (C_2 Q_2)^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3} [d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi h}{6} [6R^2 - 2d_1^2 - 2d_1 d_2 - 2d_2^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi h}{6} [3R^2 + 3R^2 - 3d_1^2 - 3d_2^2 + d_1 + d_2 - 2d_1 d_2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi h}{6} [3(R^2 - d_1^2) + 3(R^2 - d_2^2) + (d_1 - d_2)^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi h}{6} [3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2] \Rightarrow$$

$$V = \frac{\pi h}{6} [3(r_1^2 + r_2^2) + h^2]$$

**Nota:** Da fórmula do volume do segmento esférico de duas bases sai a do volume do segmento esférico de uma base e a do volume da esfera.

### 294. Volume do setor esférico

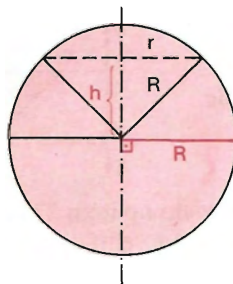
Sendo conhecida a fórmula do volume do segmento esférico, deduzimos a fórmula do volume do setor esférico, dividindo em três casos:

*1.º caso:* Um dos raios do contorno do setor circular (que gera o setor esférico) é perpendicular ao eixo.

$$V_{\text{setor}} = V_{\text{segm. esf.}} - V_{\text{cone}}$$

$$\text{Sendo } V_{\text{segm. esf.}} = \frac{\pi h}{6} [3(R^2 + r^2) + h^2]$$

$$\text{e } V_{\text{cone}} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{2\pi r^2 h}{6}$$



vem:

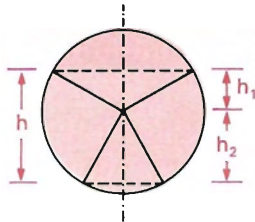
$$V_{\text{setor}} = \frac{\pi h}{6} [3R^2 + 3r^2 + h^2 - 2r^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{\text{setor}} = \frac{\pi h}{6} [3R^2 + \underbrace{r^2 + h^2}_{R^2}] \Rightarrow V_{\text{setor}} = \frac{\pi h}{6} \cdot 4R^2 \Rightarrow$$

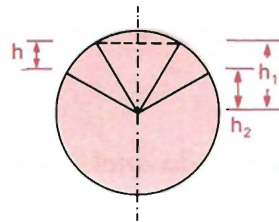
$$\Rightarrow \boxed{V_{\text{setor}} = \frac{2}{3} \pi R^2 h}$$

2.º caso: Nenhum dos raios do contorno do setor circular é perpendicular ao eixo.

Recaímos em soma ou diferença de dois setores do 1.º caso.



$$h = h_1 + h_2$$



$$h = h_1 - h_2$$

$$V_{\text{setor}} = V_{\text{setor } 1} \pm V_{\text{setor } 2} = \frac{2}{3} \pi R^2 \underbrace{(h_1 \pm h_2)}_h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{\text{setor}} = \frac{2}{3} \pi R^2 h}$$

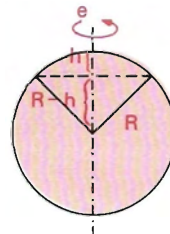
3.º caso: Um dos raios do contorno do setor circular (que gera o setor esférico) está contido no eixo.

$$V_{\text{setor}} = V_{\text{segm.}} + V_{\text{cone}}$$

$$V_{\text{segm.}} = \frac{\pi h}{6} [3r^2 + h^2]$$

$$V_{\text{cone}} = \frac{\pi}{3} r^2 (R - h)$$

$\Rightarrow$



$$\Rightarrow V_{\text{setor}} = \frac{\pi h}{6} [3r^2 + h^2] + \frac{\pi r^2}{3} (R - h) =$$

$$= \frac{\pi}{6} [3r^2 h + h^3 + 2Rr^2 - 2r^2 h] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{\text{setor}} = \frac{\pi}{6} \cdot [r^2 h + h^3 + 2Rr^2]$$

Do triângulo retângulo:  $r^2 = R^2 - (R - h)^2 = 2Rh - h^2$ .

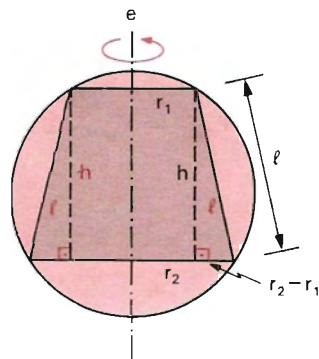
$$V_{\text{setor}} = \frac{\pi}{6} [(2Rh - h^2)h + h^3 + 2R(2Rh - h^2)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{\text{setor}} = \frac{\pi}{6} [2Rh^2 - h^3 + h^3 + 4R^2h - 2Rh^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{\text{setor}} = \frac{\pi}{6} \cdot 4R^2h \Rightarrow \boxed{V_{\text{setor}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h}$$

### 295. Volume do anel esférico

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{anel}} &= V_{\text{segm. esf.}} - V_{\text{tronco de cone}} \\ V_{\text{segm.}} &= \frac{\pi h}{6} [3(r_1^2 + r_2^2) + h^2] \\ V_{\text{tronco}} &= \frac{\pi h}{3} [r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2] \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$



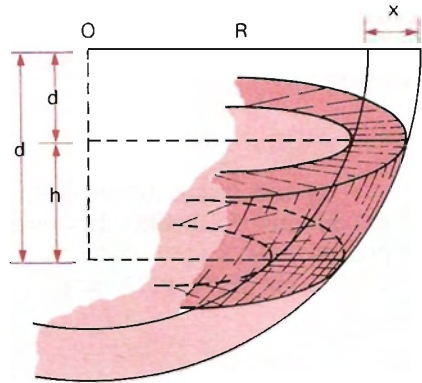
$$\Rightarrow V_{\text{anel}} = \frac{\pi h}{6} [3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2 - 2r_1^2 - 2r_1 r_2 - 2r_2^2] =$$

$$= \frac{\pi h}{6} [r_1^2 - 2r_1 r_2 + r_2^2 + h^2] = \frac{\pi h}{6} \underbrace{[(r_2 - r_1)^2 + h^2]}_{\ell^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{\text{anel}} = \frac{\pi h}{6} \ell^2}$$

### 296. Área da calota ou da zona esférica

Para o cálculo destas áreas vamos utilizar a noção estabelecida no item 229.



O volume do segmento esférico correspondente à zona (ou calota) esférica é dado por:

$$V_1 = \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi h (d_1^2 + d_1 \cdot d_2 + d_2^2).$$

Para a esfera concêntrica de raio  $R + x$ , o volume é:

$$V_2 = \pi (R + x)^2 h - \frac{1}{3} \pi h (d_1^2 + d_1 \cdot d_2 + d_2^2).$$

Portanto:

$$\begin{aligned} V_p &= V_2 - V_1 \Rightarrow V_p = \pi (R + x)^2 h - \pi R^2 h \Rightarrow \\ \Rightarrow V_p &= \pi (2R + x) h x \Rightarrow \frac{V_p}{x} = \pi (2R + x) h \end{aligned}$$

Então, para  $x = 0$ , vem:

$$A_{\text{zona (ou calota)}} = \pi (2R + 0) h = 2\pi R h$$

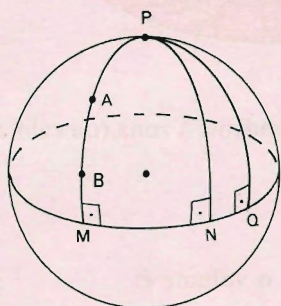
$$A_{\text{zona (ou calota)}} = 2\pi R h$$

## LEITURA

# Riemann, o Grande Filósofo da Geometria

Hygino H. Domingues

Qual a menor distância entre dois pontos? O leigo (porque é leigo) dirá que é a medida do segmento de reta com extremidades nesses pontos. Mas, e se se trata de dois pontos  $A$  e  $B$  sobre uma superfície esférica (da Terra, por exemplo) e se procura o menor caminho de um



ao outro sobre essa superfície? Ora, se os pontos estão perto um do outro, então o segmento de reta  $AB$  pode fornecer uma boa aproximação; caso contrário (pode-se provar), a resposta é o menor dos arcos do círculo máximo da esfera por esses dois pontos. Questões como essa levam às seguintes indagações: não seria importante uma geometria intrínseca da superfície esférica, em vez de considerá-la tão-somente como uma parte do espaço tridimensional euclidiano? O mesmo não é válido para outras superfícies?

A resposta afirmativa parece óbvia. No entanto, a geometria euclidiana reinava de maneira tão absoluta até as primeiras décadas do século XIX que nem sequer se cogitava dessas questões. Immanuel Kant (1724-1804), o mais respeitado filósofo do século XVIII, apoiava suas idéias numa suposta verdade inquestionável dessa geometria. Em 1826 Lobachevsky golpeou fatalmente o mito da unicidade da geometria euclidiana (ver pág. 266), mas, por motivos vários, seu trabalho não alcançou grande repercussão nos primeiros tempos. De qualquer maneira, isso não bastava; era preciso buscar uma visão global da geometria, através de idéias gerais, em espaços de dimensão qualquer. Inclusive o quadro das geometrias não euclidianas se completaria como subproduto dessa abordagem. Quem brilhantemente inaugurou esse trabalho foi G. F. Bernhard Riemann (1826-1866).

Filho de um pastor luterano, Riemann nasceu na aldeia de Bre-selens, Hanover, na Alemanha. Além da pobreza, teve de lutar sempre



contra a timidez e a fragilidade física. Aos 19 anos de idade, atendendo a orientação paterna, ingressa na Universidade de Göttingen para estudar filosofia e teologia. Mas sua vocação prevaleceu e acabou cursando matemática, o primeiro ano em Göttingen, transferindo-se depois para Berlim. De volta a Göttingen, obtém em 1851 o título de doutor, sob a orientação de Gauss, com uma tese que introduz as hoje chamadas *superfícies de Riemann*.

Sua carreira acadêmica foi rápida: em 1859 já sucedia Dirichlet na cadeira de matemática de Göttingen. Em 1862, um mês após seu casamento, adoece gravemente; os quatro anos seguintes passou-os em tratamentos. E morreu na Itália, ainda sem completar 40 anos, onde procurara um clima melhor para inutilmente combater sua tuberculose. Nessas condições não é de estranhar que a obra matemática de Riemann não seja vasta; mas é uma das mais importantes em todos os tempos pelos novos e produtivos campos que abriu.

Dos mais inovadores é um trabalho seu de 1854 sobre os fundamentos em que se baseia a geometria. Nele aparece a importante distinção entre “infinito” e “ilimitado”, que no futuro teria papel importante na teoria da relatividade. Por exemplo, os círculos máximos de uma esfera são finitos (percorrendo-os sempre se volta ao ponto de partida) mas ilimitados (pode-se percorrê-los indefinidamente). Daí a uma geometria sem retas paralelas não vai muito. Isso, contudo, exige dois outros afastamentos da geometria euclidiana para evitar contradições: que as “retas” sejam finitas (porém ilimitadas) e que eventualmente possam se cruzar em mais de um ponto.

Mas haverá alguma superfície cuja geometria intrínseca corresponda a tais imposições? Sim, a superfície esférica (por exemplo), tomando como “retas” os círculos máximos (que sempre se interceptam em dois pontos). Dois resultados dessa geometria podem ser visualizados na figura: “a soma dos ângulos de um triângulo é maior que  $180^\circ$ ” e “todas as perpendiculares a uma mesma ‘reta’ cortam-se num ponto”.

Enfim a geometria estava totalmente livre.



G. F. Bernhard Riemann (1826-1866).

# Respostas dos Exercícios

## Capítulo 1

1. Resolvido.
2. Infinitas.
3. a) 3 retas:  $\vec{AD}$ ,  $\vec{BD}$ ,  $\vec{CD}$   
b) 6 retas:  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AD}$ ,  $\vec{BC}$ ,  $\vec{BD}$  e  $\vec{CD}$
4. Nenhum, um só ou quatro.
5. Resolvido.
6. Postulado da determinação de planos.
7. Resolvido.
8. Infinitos.
9. A concorrente está contida no plano das paralelas.
10. Resolvido.
11. Faça o plano (r, P) coincidir com o plano (r, s).
12. a) F b) F c) F d) V e) V
13. Resolvido.
14. Use o método indireto de demonstração.
15. Use o método indireto de demonstração.
16. Não são obrigatoriamente reversas. Podem ser paralelas, concorrentes ou reversas.
17. Resolvido.
18. a) V e) V h) F k) F  
b) V f) F i) F l) V  
c) F g) V j) F m) V  
d) V
19. a) F c) F e) V g) V  
b) V d) V f) F h) F
20. a) V c) F e) F g) V  
b) V d) V f) V h) V
21. Resolvido.
22. Sendo O tal que  $\vec{AB} \cap \vec{CD} = \{O\}$ , então  $\beta \cap \gamma = \vec{OP}$ .
23. Resolvido.
24.  $\alpha \cap \beta = \vec{RS}$
25. É o conjunto formado pelas extremidades do diâmetro comum.
26. Os pontos O, P e R pertencem à interseção de dois planos que é uma única reta.
27. Resolvido.
28. Resolvido.
29. Aplique o 2º caso do teorema dos 3 planos secantes.
30. Se  $x = \beta \cap \gamma$ , x, a e b ou incidem num mesmo ponto (1º caso do teorema dos 3 planos secantes) ou  $x \parallel a$  e  $x \parallel b$  (2º caso do mesmo teorema).
31. a)  $a \cap b \cap c = \{P\}$   
b)  $b \parallel a$ ,  $b \parallel c$   
c)  $a \cap b \cap c = \{P\}$  ou ( $a \parallel b$ ,  $a \parallel c$ ,  $b \parallel c$ )

## Capítulo II

32. Use o fato de que o segmento com extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo e metade do terceiro lado.

33. É análogo ao anterior (veja um octaedro num tetraedro).
34. Use o fato de que as diagonais de um paralelogramo interceptam-se nos respectivos pontos médios.
35. Tome uma reta no plano e, por um ponto fora do plano, uma paralela a essa reta. Infinitas soluções.
36. Por um ponto fora da reta conduza uma paralela a ela. Por esta reta conduzida, passe um plano. Infinitas soluções.
37. Resolvido.
38. É aplicação do exercício 37.
39. Use o método indireto de demonstração e posições de reta e plano.
40. Por um ponto de uma, conduza uma reta paralela à outra.
41. É aplicação do exercício 37.
42. Basta conduzir pelo ponto uma reta paralela à interseção dos planos.
43. Resolvido.
44. No 1º caso e no 2º caso o problema não tem solução. No 3º caso basta conduzir, por  $P$ , as retas  $r'$  e  $s'$  respectivamente paralelas a  $r$  e  $s$ .
45. Existem infinitos pontos  $P$ . Analise o 2º caso.
46. Use o método indireto e o exercício 38.
47. a) F      e) V      i) F      l) V  
b) V      f) F      j) V      m) V  
c) V      g) F      k) F      n) F  
d) V      h) F
48. a) F      b) V      c) F      d) F
49.  $(\alpha \cap \beta = \phi, a \subset \beta) \Rightarrow a \cap \alpha = \phi \Rightarrow a \parallel \alpha$
50. Basta considerar, por  $P$ , duas retas respectivamente paralelas a duas retas concorrentes do plano.
51. Analise as posições relativas da reta com o plano. Método indireto e exercício 37.
52. Aplique o exercício 51.
53. Resolvido.
54. Os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.
55. Use o método indireto.
56. Resolvido.
57. Aplique o exercício 56.
58. Eles se interceptam: aplique o método indireto e o exercício 56. Na outra parte aplique o exercício 53 duas vezes.

59. Método indireto e aplique o exercício 38.
60.  $a \subset \alpha$ ; o problema não tem solução.  
 $a \parallel \alpha$  e  $\beta = (a, P)$  é secante com  $\alpha$ ; o problema não tem solução.  
 $a \parallel \alpha$  e  $\beta = (a, P)$  é paralela a  $\alpha$  — infinitas soluções  
 $a$  e  $\alpha$  concorrentes — uma única solução.
61. No 1º caso, o problema admite solução única (analise a figura deste caso). No 2º caso, o problema não tem solução.
62. Chame de  $t$  a interseção de  $\alpha$  e  $\beta$ . Recai no exercício 61.
63. Tome um ponto  $P$  numa das retas e a solução é a interseção  $x$  dos planos determinados por  $P$  e pelas outras duas retas. No 1º caso há restrições para  $P$ .
64. a) F      e) V      i) F      m) F  
b) V      f) F      j) F      n) V  
c) V      g) F      k) F      o) F  
d) F      h) V      l) F
65. a) F      b) V      c) V      d) F
66. a) V      c) V      e) V      g) F  
b) F      d) V      f) F      h) V

### Capítulo III

67.  $(AB \perp BC, BC \parallel DE) \Rightarrow AB \perp DE$
68. Resolvido.
69. Use o teorema fundamental.
70. Resolvido.
71. O ponto médio de uma aresta e a aresta oposta determinam um plano perpendicular à primeira.
72. Resolvido.
73. Tome o mesmo plano  $\beta$  do exercício 72 e prove que  $b \perp \beta$ .
74. É reto. Justificação: é o teorema das três perpendiculares.
75. Prove que a reta é paralela a uma reta do plano.
76. Por um ponto do plano conduza duas retas respectivamente paralelas às retas dadas.
77. a) V      e) V      i) V      l) F  
b) F      f) F      j) V      m) V  
c) V      g) V      k) V      n) V  
d) F      h) F
78. Resolvido.
79. Resolvido.

80. a) Use o método indireto e o exercício 78.  
 b) Resolvido.  
 c) Considere no plano duas retas concorrentes.  
 d) Pelo ponto onde uma das retas fura o plano, passe uma paralela à outra. Use a unicidade.
81. Use o exercício 80 *b* e *d*.
82. Use o exercício 80 *c* e *a*.
83. Considere em  $\beta$  uma reta  $b$  perpendicular à interseção.
84. Pelo ponto  $P$ , interseção de  $\alpha$  com  $b$ , conduza uma reta  $i$  perpendicular à reta  $a$ . Veja o plano  $(b, i)$ .
85. Resolvido.
86. Use o exercício 85.
87. Basta aplicar a definição de planos perpendiculares.
88. Tome  $b$  em  $\alpha$ , paralela à reta  $a$ . Use o exercício 80 *c*.
89. Resolvido.
90. Método indireto, usando o exercício 89.
91. a) F      d) F      g) V      j) V  
 b) V      e) F      h) V      k) F  
 c) F      f) F      i) F

## Capítulo IV

92. Lados opostos de um retângulo são congruentes.
93. Resolvido.
94. a) V      d) V      f) V      h) F  
 b) F      e) V      g) F      i) F  
 c) F
95. a) F      c) V      e) V      g) V  
 b) V      d) V      f) F
96. Duas retas concorrentes ou duas retas coincidentes ou uma reta e um ponto pertencente a ela.
97. Paralelas, concorrentes, ou uma reta e um ponto fora dela.
98. Resolvido.
99. Prove que  $s \perp (i, r')$ . Veja o exercício 98.
100. Prove que  $s' \perp (r, r')$  e  $s \perp (r, r')$ . Dai sai que  $s \parallel s'$ , ou seja,  $s \parallel \alpha$  ou  $s \subset \alpha$
101. a) F      d) V      g) V      j) F  
 b) F      e) F      h) F      k) F  
 c) F      f) F      i) V
102. Resolvido.
103. Não. O plano pode ser paralelo ao segmento.
104. Resolvido.
105. Passe por  $M$ , ponto médio de  $\overline{AB}$ , uma reta  $r' \parallel r$ . Infinitas soluções (nos 3 casos possíveis).
106. Basta conduzir por  $M$ , ponto médio de  $\overline{AB}$ , o plano perpendicular a  $r$ . Se  $r \perp \overline{AB}$ , infinitas soluções; caso contrário, solução única.
107. Por  $M$  trace um plano paralelo a  $\alpha$ . Se  $\overline{AB} \parallel \alpha$  ou  $\overline{AB} \subset \alpha$ , infinitas soluções. Se  $\overline{AB} \perp \alpha$  concorrentes, solução única.
108. Pelo ponto médio de  $\overline{AB}$ , conduza  $r \perp \alpha$ . Infinitas soluções.
109. Todos os planos do feixe de planos paralelos a  $(A, B, C)$ . Tome os pontos médios dos lados do triângulo  $ABC$  e descubra mais três feixes de planos.
110. Se  $P \notin (A, B, C)$  com o ponto médio dos lados do triângulo  $ABC$ , temos 3 soluções e mais uma que é o plano, por  $P$ , paralelo ao  $(A, B, C)$ .
111. Analise o tetraedro  $ABCD$ . Observe o octaedro cujos vértices são os pontos médios das arestas do tetraedro. Ache 7 planos.
112. Por  $P$  conduza uma reta  $e \perp \alpha$ . Por  $e$  passe um plano  $\beta$ . Em  $\beta$ , conduza  $g$  tal que  $e\hat{P}g = 90^\circ - \theta$ . Infinitas soluções (só em  $\beta$  há duas).
113. Veja o exercício anterior.
114. Por  $P$  conduza  $g$  tal que  $g\hat{\alpha} = \theta$ . Em  $\alpha$  trace  $i \perp g$ . O plano pedido é o  $(i, P)$ . Infinitas soluções.
115. Resolvido.
116. Resolvido.
117. O lugar geométrico é a superfície esférica de diâmetro  $OP$ .
118. O lugar é uma circunferência  $\lambda$ , contida em  $\alpha$ , de diâmetro  $OP'$ , sendo  $P'$  a projeção ortogonal de  $P$  sobre  $\alpha$ .
119. É uma circunferência  $\lambda$ , contida no plano perpendicular a  $r$  por  $P$ , de diâmetro  $OP$ , sendo  $O$  a interseção de  $r$  com aquele plano.

## Capítulo V

120. Resolvido.
121. Resolvido.
122. Resolvido.
123. Resolvido.

124.  $45^\circ$
125.  $50^\circ$  ou  $130^\circ$
126.  $80^\circ$
127. Trace uma secção reta e recaia em ângulos opostos pelo vértice.
128. a ou  $180^\circ - a$
129. Resolvido.
130.  $5\sqrt{3}$  cm
131. 10 cm
132. 20 cm
133.  $10\sqrt{3}$  cm
134. Resolvido.
135. 10 cm
136. 15 cm
137.  $\frac{12\sqrt{3}}{5}$  cm
138. 10 cm
139.  $\frac{3m}{2}$ ;  $\frac{3m}{4}$
140. a) V    b) V    c) F    d) F    e) V
141. a) V    c) F    e) F    g) F    i) V  
b) V    d) V    f) V    h) V    j) V
142. a) V    b) V    c) V    d) V    e) V    f) V
143. Resolvido.
144. Resolvido.
145. Analise dois casos: 1º:  $\vec{AB}$  ortogonal a  $r$  (é imediato). 2º:  $\vec{AB}$  não ortogonal a  $r$ . Sai por congruência de triângulos e perpendicularidade de reta e plano.
146. Resolvido.
147. Resolvido.
- ## Capítulo VI
148. Resolvido.
149. Resolvido.
150.  $30^\circ < x < 110^\circ$
151.  $30^\circ < x < 90^\circ$
152.  $0^\circ < x < 120^\circ$
153. Resolvido.
154. a) F    c) F    e) F    g) V  
b) V    d) V    f) F
155. oito
156. Resolvido.
157. a) sim    c) não    e) não    g) sim  
b) não    d) não    f) não    h) sim
158. Não. As faces do polaredar mediriam  $140^\circ$ ,  $130^\circ$  e  $120^\circ$ , o que é impossível.
159. Entre  $90^\circ$  e  $270^\circ$ .
160.  $10^\circ < x < 130^\circ$
161. Resolvido.
162. Resolvido.
163.  $\frac{4\sqrt{6}}{6}$
164. a) V    c) V    e) F    g) V  
b) F    d) F    f) F    h) V
165.  $V(a, b, c)$  tem di(a) reto. Tome  $A$  em  $Va$  e por ele trace a secção reta do di(a) determinando  $B$  em  $Vb$  e  $C$  em  $Vc$ . Use o teorema de Pitágoras em 3 triângulos e o teorema dos cossenos no triângulo  $VBC$ .
166.  $3\sqrt{6}$  cm
167. Resolvido.
168. Resolvido.
169. No triedro  $V(a, b, c)$ , tome  $A \in a$ ,  $B \in b$  e  $C \in c$  tais que  $VA \equiv VB \equiv VC$ . Sendo  $G$  o baricentro do  $\Delta ABC$ , a reta comum é  $\vec{VG}$ .
170. As bissetrizes estão no plano determinado por  $\vec{MP}$  e  $b'$ , sendo  $M$  e  $P$  os respectivos pontos médios de  $BC$  e  $AB$  e  $b'$  a bissetriz de  $a'Vc'$  (em que  $Va'$  é oposta a  $Va$ ).
171. Por um ponto  $A \in Va$ ,  $A \neq V$ , conduza um plano perpendicular a  $Va$  determinando  $B$  em  $b$  e  $C$  em  $c$ . A reta comum é  $\vec{VH}$ , em que  $H$  é o ortocentro do  $\Delta ABC$ .
172. Conduza os planos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  do problema 171. As três retas são perpendiculares à reta comum de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  pelo ponto  $V$ .
173. Resolvido.
174.  $0^\circ < x < 10^\circ$
175.  $70^\circ < x < 170^\circ$
176.  $10^\circ < x < 50^\circ$
177. a) não  
b) não  
c) sim  
d) sim  
e) sim
178. a) 3, 4 ou 5 faces  
b) 3 faces  
c) Não é possível.
179. 5

## Capítulo VII

180. Resolvido.  
 181. 10  
 182. 6  
 183. 8  
 184. 9  
 185. 11  
 186. 8 e 4  
 187. Resolvido.  
 188. 10  
 189. 29, 68 e 41  
 190. 26  
 191. 14, 24 e 12  
 192. 10, 24 e 16  
 193. 20  
 194. 20  
 195. 3 triangulares, 2 quadrangulares e 1 pentagonal  
 196. 13  
 197.  $\frac{4 + a(l-2) + b(m-2) + c(n-2)}{2}$ ;  $(al + bm + cn)$   
 deve ser par.  
 198. Resolvido.  
 199. a)  $720^\circ$       c)  $1440^\circ$       e)  $3\ 600^\circ$   
 b)  $2\ 160^\circ$       d)  $6\ 480^\circ$   
 200. 7 triangulares e 5 pentagonais  
 201. 4  
 202. 6 triangulares e 3 quadrangulares  
 203. 27, 9 e 19  
 204. Resolvido.  
 205. Resolvido.  
 206. Resolvido.  
 207. Vide o exercício 205.  
 208. Em  $2V - 2A + 2F = 4$ , substitua  $2A$  com vértices.  
 209. Resolvido.  
 210. Em  $4V - 4A + 4F = 8$ , substitua  $2A$  com faces e outros  $2A$  com vértices.  
 211. Prove primeiro que  $3F \leq 2A$  e  $3V \leq 2A$ . Utilize essas desigualdades e a relação de Euler para provar as demais.  
 212.  $V = 60$  (átomos)  
 $A = 90$  (ligações)

## Capítulo VIII

213. a) prisma pentagonal  
 b) prisma hexagonal  
 c) prisma pentagonal  
 d) prisma octogonal  
 214. Resolvido.  
 215. prisma decagonal  
 216. prisma pentagonal  
 217.  $40r$   
 218.  $22r$   
 219. Resolvido.  
 220.  $56r$   
 221.  $(n - 1) \cdot 4r$   
 222.  $2\ 160^\circ$   
 223.  $1\ 080^\circ$   
 224. O número de diagonais de um polígono de  $n$  lados é  $\frac{n(n-3)}{2}$ .  
 225. Use congruência de triângulos retângulos.  
 226. Resolvido.  
 227. Use o fato de que dois planos paralelos interceptam um terceiro em retas paralelas.  
 228. a)  $d = \frac{5\sqrt{3}}{2}$  cm,  $S = 37,5$  cm<sup>2</sup>  
 b)  $d = \frac{\sqrt{57}}{2}$  cm,  $S = 28$  cm<sup>2</sup>  
 c)  $d = \frac{\sqrt{61}}{2}$  cm,  $S = 27$  cm<sup>2</sup>  
 229. a)  $d = x\sqrt{3}$ ,  $S = 6x^2$   
 b)  $d = a\sqrt{14}$ ,  $S = 22a^2$   
 c)  $d = \sqrt{3x^2 + 6x + 5}$ ,  $S = 6x^2 + 12x + 4$   
 230.  $\sqrt{6}$  m  
 231.  $\sqrt{3y^2 + 2}$   
 232.  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$  cm  
 233. 5 cm  
 234. Resolvido.  
 235.  $\sqrt{3}$  cm  
 236.  $\sqrt{3}$  cm  
 237. 3 cm

238.  $2,8\sqrt{3}$  cm

239.  $\frac{8}{3 + \sqrt{3} + 3\sqrt{2}}$  cm

240. Resolvido.

241.  $\sqrt{38}$  cm

242. Basta usar a expressão de  $d^2$ .

243. Note que  $(a + b + c)^2 = d^2 + S$ .

244. Resolvido.

245.  $5\sqrt{21}$  cm,  $8\sqrt{21}$  cm e  $10\sqrt{21}$  cm

246. 4 m, 6 m e 8 m

247.  $\frac{ad}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ ;  $\frac{bd}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ ;  $\frac{cd}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

248. 5 m

249. Resolvido.

250.  $\sqrt{\frac{Sst}{2r(r+s+t)}}$ ;  $\sqrt{\frac{Srt}{2s(r+s+t)}}$ ;  $\sqrt{\frac{Srs}{2t(r+s+t)}}$

251.  $\ell \sqrt{\frac{rq}{p(r+q+p)}}$ ;  $\ell \sqrt{\frac{rp}{q(r+q+p)}}$ ;  $\ell \sqrt{\frac{pq}{r(r+q+p)}}$

252.  $\frac{100\sqrt{6}}{3}$  cm

253. a)  $S = 24$  cm<sup>2</sup>,  $V = 8$  cm<sup>3</sup>  
 b)  $S = 30,50$  cm<sup>2</sup>,  $V = 10,500$  cm<sup>3</sup>  
 c)  $S = 13,50$  cm<sup>2</sup>,  $V = 3,375$  cm<sup>3</sup>

254. a)  $S = 4a^2$ ,  $V = \frac{a^3}{2}$   
 b)  $S = 6b^2$ ,  $V = b^3$   
 c)  $S = 16x^2 + 6x$ ,  $V = 6x^3 + 3x^2$

255. 3 m

256.  $d = \sqrt{155}$  cm,  $S = 286$  cm<sup>2</sup>,  $V = 315$  cm<sup>3</sup>

257. 12 cm,  $12\sqrt{3}$  cm

258. 100 cm<sup>3</sup>

259. 64 cm<sup>3</sup>

260. 1,2 m; 1,728 m<sup>3</sup>

261.  $d = 2,5\sqrt{3}$  cm;  $S = 37,5$  cm<sup>2</sup>;  $V = 15,625$  cm<sup>3</sup>

262.  $d = 5\sqrt{3}$  cm;  $S = 150$  cm<sup>2</sup>;  $V = 125$  cm<sup>3</sup>

263. a)  $S = 3r^2$ ,  $V = \frac{r^3\sqrt{2}}{4}$

b)  $S = 2d^2$ ,  $V = \frac{d^3\sqrt{3}}{9}$

264. 4 cm,  $4\sqrt{3}$  cm

265.  $S = 1\,152$  cm<sup>2</sup>,  $V = 1\,536\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>

266. 0,030 m<sup>3</sup>

267. a) A área é quadruplicada;  
o volume fica multiplicado por 8.

b) A área é reduzida a  $\frac{1}{9}$ ;  
o volume é reduzido a  $\frac{1}{27}$ .

c) A área é reduzida a  $\frac{1}{4}$ ;  
o volume é reduzido a  $\frac{1}{8}$ .

d) A área é multiplicada por  $k^2$ ;  
o volume é multiplicado por  $k^3$ .

268. 80 galões

269. Resolvido.

270.  $48\,000\sqrt{6}$  cm<sup>3</sup>

271. 8 000 m<sup>3</sup>

272.  $3\sqrt{3}$  cm

273. 30 cm; 5 400 cm<sup>2</sup>

274. 48 cm; 13 824 cm<sup>2</sup>

275. 258 dm<sup>2</sup>

276.  $\frac{9\sqrt{14}}{2}$  cm,  $9\sqrt{14}$  cm,  $\frac{27\sqrt{14}}{2}$  cm; 6 237 cm<sup>2</sup>;  
 $567\sqrt{14}$  cm<sup>3</sup>

277. 12 cm, 6 cm, 4 cm; 14 cm; 288 cm<sup>3</sup>

278. 200 cm<sup>2</sup>; 250 cm<sup>3</sup>

279. 12 m<sup>2</sup>

280. Resolvido.

281. 20 cm, 15 cm, 10 cm;  $V = 3\,000$  cm<sup>3</sup>

282.  $V = 2\,880$  a<sup>3</sup>;  $S = 1\,224$  cm<sup>2</sup>

283. 4 cm, 12 cm, 3 cm ou  $(7 + \sqrt{23})$  cm, 5 cm,  
 $(7 - \sqrt{23})$  cm

284. 54 cm<sup>3</sup>

285.  $V_{\text{ortocôndro}} : V_{\text{cubo}} = 208; 243$

286. 540 ℓ; 0,06 m

287. Resolvido.

288.  $\frac{4V}{\rho} + 2\ell^2$

289. 10 m, 15 m, 6 m

290.  $112 \text{ cm}^3$  ou  $108 \text{ cm}^3$

291.  $V_{\text{cubo}} : V_{\text{ortóedro}} = 6 : (11 - 2\sqrt{10})$

292. Resolvido.

293.  $\frac{6}{5}$  e 1

294.  $\frac{11}{3}$

295. O ortóedro de menor superfície é o cubo.

296.  $18(8 + 3\sqrt{2}) \text{ cm}^3$ ;  $240 \text{ cm}^2$

297. Resolvido.

298. a) Observe os triângulos formados pela diagonal, aresta e diagonal de uma face.  
b) Relação métrica no triângulo acima.

299.  $2,7\sqrt{6} \text{ cm}$ ;  $87,48 \text{ cm}^2$ ;  $39,366\sqrt{2} \text{ cm}^3$

300. Desenvolvimento algébrico.

301. a) cubo de aresta  $\sqrt[3]{V}$ .

b) cubo de aresta  $\frac{S\sqrt{6}}{6}$

302. a)  $A_r = 42 \text{ cm}^2$ ,  $A_t = 54 \text{ cm}^2$ ,  $V = 21 \text{ cm}^3$

b)  $A_r = 15 \text{ cm}^2$ ,  $A_t = \frac{3}{2}(10 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2$ ,

$$V = \frac{7\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3$$

c)  $A_r = 30\sqrt{3} \text{ cm}^2$ ,  $A_t = 6(3 + 5\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ ,

$$V = \frac{45\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3$$

303. a)  $A_r = 6a^2$ ,  $A_t = \frac{12 + \sqrt{3}}{2} a^2$ ,  $V = \frac{\sqrt{3}}{2} a^3$

b)  $A_r = 15x^2$ ,  $A_t = 3(5 + \sqrt{3})x^2$ ,  $V = \frac{15\sqrt{3}}{4} x^3$

c)  $A_r = \frac{7}{3} k^2$ ,  $A_t = \frac{19}{6} k^2$ ,  $V = \frac{5}{12} k^3$

304.  $A_r = 60(1 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2$ ,  $V = 90 \text{ cm}^3$

305.  $A_t = 20(32 + 25\sqrt{2}) \text{ cm}^2$ ,  $V = 2.000\sqrt{2} \text{ cm}^3$

306.  $A_r = 1.200 \text{ cm}^2$ ,  $V = 2.400\sqrt{3} \text{ cm}^3$

307.  $\frac{2}{3} \sqrt[3]{2.700}$

308.  $\frac{4\sqrt{3}}{9} \text{ m}$ ,  $\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ m}$

309.  $230 \text{ cm}^2$

310.  $A_t = 32(6 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$

311. Resolvido.

312.  $\frac{3a^3}{4}$

313.  $6r = s$

314.  $9 \text{ m}^3$

315.  $4\sqrt{3} \text{ cm}$

316.  $60 \text{ cm}^3$  ou  $11.760 \text{ cm}^3$

317.  $A_r = 270 \text{ cm}^2$ ,  $V = 45\sqrt{15} \text{ cm}^3$

318.  $6 \text{ dm}$

319.  $A_t = 1.020 \text{ m}^2$ ,  $V = 1.800 \text{ m}^3$

320.  $280 \text{ cm}^2$

321.  $144 \text{ m}^2$

322.  $A_t = 48(6 + \sqrt{2}) \text{ m}^2$ ,  $V = 288\sqrt{3} \text{ m}^3$

323.  $A_r = 192\sqrt{3} \text{ cm}^2$ ,  $V = 1.152 \text{ cm}^3$

324. Resolvido.

325.  $A_r = 248 \text{ cm}^2$ ,  $V = 240 \text{ cm}^3$

326.  $80\sqrt{29} \text{ cm}^2$

327.  $2 \text{ cm}$ ,  $A_t = 2(6 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$

328.  $V = 6 \text{ dm}^3$ ,  $A_t = 14\sqrt{3} \text{ dm}^2$

329.  $\frac{11\sqrt{33}}{4} \text{ m}^3$

330.  $24 \text{ m}^3$

331.  $64(4 + 3\sqrt{2}) \text{ cm}^2$

332.  $108 \text{ m}^3$

333. Resolvido.

334.  $24 \text{ dm}^3$

335.  $480\sqrt{3} \text{ cm}^3$

336. Resolvido.

337.  $120(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^3$

338. Resolvido.

339.  $4\sqrt{2} \text{ m}^3$

340.  $(6 + \sqrt{3} - \sqrt{3 + 12\sqrt{3}}) \text{ dm}^3$

341.  $\frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{V}{A} \cdot \frac{\sqrt{3}}{24} \cdot \frac{A^2}{V}$

342.  $2a\sqrt{2}$

343. É um retângulo de dimensões  $a$  e  $a\sqrt{2}$ ;  $a^2\sqrt{2}$ .

344.  $36\sqrt{2} \text{ cm}^2$

345.  $A_t = 35\sqrt{2}$

346. Resolvido.



347.  $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$

348.  $\frac{23\sqrt{6}(2-\sqrt{3})}{10}$  cm

349. a) O plano (B, E, P) intercepta as faces opostas do cubo em segmentos paralelos.

b) bases:  $a\sqrt{2}$  e  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ ;  $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ ;  $S = \frac{9a^2}{8}$

350. Os lados do triângulo são diagonais das faces. Os extremos da diagonal estão a igual distância dos vértices do triângulo.

Ponto médio

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

351.  $45^\circ, 90^\circ, 45^\circ$

352.  $30^\circ$

353. a)  $\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$  ou  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$

b)  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$  ou  $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$

354.  $45^\circ$

355.  $6 \text{ m}^3$

356.  $2\,016 \text{ a}^3$

357.  $1\,080 \text{ cm}^3$

358.  $192\sqrt{2} \text{ cm}^3$

359.  $45 \text{ cm}^3$

360.  $V = 540\sqrt{3} \text{ cm}^2$ ;

$A_r = 360 \text{ cm}^2$

361.  $\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ a}$

362.  $237,5\%$

363.  $32$

364. a)  $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

b)  $\widehat{IKJ} = \arccos \frac{2a\sqrt{5}}{15}$

365.  $\frac{5}{6} \text{ a}^3$

366. a) Observe os triângulos *PAM* e *ABM*.

b)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  unidades de comprimento

367.  $\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ m}$

368.  $\frac{\sqrt{d^2+S}}{3} - \sqrt{\frac{2d^2-S}{6}}$ ;  $\frac{\sqrt{d^2+S}}{3}$ ;  $\frac{\sqrt{d^2+S}}{3} + \sqrt{\frac{2d^2-S}{6}}$

em que  $\frac{S}{2} \leq d^2 < \frac{5S}{4}$  (as dimensões além de reais devem ser positivas).

369. Use o fato de a soma dos diedros de um triedro estar entre 2 retos e 6 retos.

370. É a generalização do exercício anterior.

371. Prove que a soma das distâncias do enunciado é a constante  $\frac{V}{S} + \frac{2S}{\ell}$ , em que  $\ell$  é o lado da secção,  $S$  é a área da secção e  $V$  é o volume do prisma.

372. Use base média de um trapézio.

373. Use a relação de Stewart da Geometria Plana ou a expressão da mediana de um triângulo qualquer.

374. O plano deve passar por uma diagonal e pelo ponto médio de uma aresta. A área mínima é  $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$ .

375.  $V_1 = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$ ,  $V_2 = \frac{36 - \sqrt{6}}{36} a^3$

376. a)  $\frac{\sqrt{3}}{8} \sin^2 \alpha \cos \alpha$  b)  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$

## Capítulo IX

377. pirâmide hexagonal

378. pirâmide pentadecagonal

379. 27

380. 10 retos

381. Resolvido.

382.  $(n-1) \cdot 4$  retos

383. a) pirâmide pentagonal

b) pirâmide heptagonal

c) pirâmide hexagonal

d) pirâmide decagonal

384. a)  $A_r = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$   $A_l = 25(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$

b)  $A_r = 48\sqrt{6} \text{ cm}^2$   $A_l = 24\sqrt{3}(1 + 2\sqrt{2}) \text{ cm}^2$   
 $V = 48\sqrt{7} \text{ cm}^3$

385. Resolvido.

386.  $\sqrt{6} \text{ cm}$ ;  $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$  e  $\frac{9\sqrt{2}}{4} \text{ cm}^3$

387. 3 cm
388.  $2\sqrt{2}$  cm;  $2\sqrt{6}$  cm<sup>3</sup>
389. 6 m
390.  $144\sqrt{3}$  m<sup>2</sup>
391. 3 m
392.  $\sqrt{6}$  cm
393. 16 cm
394. Resolvido.
395. 3 cm<sup>3</sup>
396.  $A_r = 4\ 320$  cm<sup>2</sup>;  $A_t = 108(40 + 3\sqrt{3})$  cm<sup>2</sup>
397.  $A_r = 28$  m<sup>2</sup>;  $A_t = 32$  m<sup>2</sup>
398.  $A_r = 21\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>,  $A_t = 24\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>
399. 192 m<sup>2</sup>
400. Resolvido.
401.  $\frac{8\sqrt{2}}{3}$  cm<sup>3</sup>
402. 10 cm e 24 cm e  $10(37 + 12\sqrt{2})$  cm<sup>2</sup>
403.  $2(5\sqrt{651} + 24\sqrt{133} + 120)$  cm<sup>2</sup>
404. 81 cm<sup>2</sup>
405. 30 cm<sup>2</sup>
406. 192 cm<sup>2</sup>
407.  $A_b = 25\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>,  $A_r = 25\sqrt{39}$  cm<sup>2</sup>,  
 $A_t = 25(\sqrt{39} + \sqrt{3})$  cm<sup>2</sup>
408.  $64\sqrt{7}$  cm<sup>2</sup>
409.  $4\sqrt{2}$  m
410. Resolvido.
411.  $A_r = 24$  cm<sup>2</sup>;  $A_t = 6(\sqrt{3} + 4)$  cm<sup>2</sup>
412.  $2\sqrt{34}$  cm
413.  $9\sqrt{33}$  cm
414.  $A_r = 60\sqrt{21}$  cm<sup>2</sup>;  
 $A_t = 30(5\sqrt{3} + 2\sqrt{21})$  cm<sup>2</sup>
415. 360 cm<sup>2</sup>;  $18(20 + 3\sqrt{3})$  cm<sup>2</sup>
416.  $2\sqrt{5}$  cm; 96 cm<sup>2</sup>
417.  $\frac{500\sqrt{7}}{3}$  cm<sup>3</sup>
418. 120 cm<sup>3</sup>
419.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$
420. 6
421. 2
422.  $1152\sqrt{3}$  m<sup>3</sup>
423.  $\frac{\sqrt{23}}{3}$  m<sup>3</sup>
424.  $\frac{4\sqrt{93}}{3}$  cm
425. Resolvido.
426.  $48\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>
427.  $B = 9\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>;  $A_r = 9\sqrt{39}$  cm<sup>2</sup>;  
 $A_t = 9\sqrt{3}(\sqrt{13} + 1)$  cm<sup>2</sup>;  $V = 18\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>
428. Resolvido.
429.  $8\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>;  $\frac{8\sqrt{2}}{3}$  cm<sup>3</sup>
430.  $288\sqrt{2}$  cm<sup>3</sup>
431. 4 cm, 60 cm<sup>2</sup>, 48 cm<sup>3</sup>
432.  $24\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>
433.  $144\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>
434.  $a = \frac{17}{2}$  m,  $h = \frac{15}{2}$  m
435.  $\frac{9\sqrt{33}}{2}$  m,  $\frac{243\sqrt{11}}{4}$  m<sup>3</sup>
436.  $\frac{105\sqrt{95}}{2}$  m<sup>3</sup>
437.  $\frac{54}{17}$  m
438.  $40\sqrt{3}$  m<sup>3</sup>
439.  $\frac{9\sqrt{15}}{8}$  cm<sup>3</sup>
440.  $A_r = 4\sqrt{327}$  cm<sup>2</sup>,  $A_t = 4\sqrt{3}(\sqrt{109} + 1)$  cm<sup>2</sup>
441.  $2\sqrt{3}$  cm
442. 60°
443. Resolvido.
444.  $\frac{a}{2}$ ;  $\frac{a\sqrt{21}}{6}$ ;  $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$
445. a) 60°; b)  $A_r = \frac{3\sqrt{15}}{2} a^2$ ;  
 $A_t = \frac{3(\sqrt{3} + \sqrt{15})}{2} a^2$ ,  $V = \frac{3a^3}{2}$
446. 60°
447.  $36\sqrt{3}$  m<sup>3</sup>; 108 m<sup>2</sup>
448. 2 m<sup>3</sup>
449.  $80\sqrt{3}$  m<sup>3</sup>
450.  $\frac{2592}{5}$  dm<sup>3</sup>

451.  $180 \text{ cm}^3$
452. Resolvido.
453.  $576\sqrt{3} \text{ cm}^3$
454.  $9 \text{ cm}^2$ ;  $9\sqrt{2} \text{ cm}^3$
455.  $8,64 \text{ cm}$
456.  $A_1 = a^2\sqrt{5}$ ;  
 $A_1 = (\sqrt{5} + 1)a^2$ ;  $V = \frac{1}{3} a^3$
457.  $6a$
458. Resolvido.
459.  $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$
460. Resolvido.
461.  $16\sqrt{2} \text{ m}^2$
462.  $2a$ ,  $a\sqrt{3}$ ,  $A_1 = (2\sqrt{3} + \sqrt{2})a^2$ ;  $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
463. Resolvido.
464.  $\frac{(n+2)h^3}{3(k^2-1)} \cdot \text{tg} \frac{\pi}{n+2}$
465.  $\frac{k\sqrt{6}}{3}$
466.  $\frac{3\sqrt{3}}{2} r^3$
467. Calcule  $MH$ ,  $HB$ ,  $MB$  e use o recíproco da relação de Pitágoras.
468.  $\frac{850}{3}$
469.  $\frac{2t^2}{3}$
470. Não é possível. Observe que a base seria um hexágono regular.
471.  $\frac{46}{3} \text{ m}^3$
472.  $2\sqrt{2} \text{ m}$ ;  $8 \text{ m}^2$ ;  $\frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ m}^3$
473. Os triângulos são retângulos em  $D$ ,  $D$ ,  $A$  e  $C$ .  
 $A_1 = 12(7 + \sqrt{5}) \text{ m}^2$
474. Parta da expressão de  $V$  e substitua os elementos em função de  $S$  e  $A$ .
475. Sendo  $ABCD$  o tetraedro, procure trabalhar com um prisma  $BCDAEF$ .
476. Sendo  $ABCD$  o tetraedro e  $DB'C'$  a projeção, procure raciocinar com um prisma  $DB'C'ABE$ .
477. Note que os tetraedros têm mesma altura e bases equivalentes.
478. Utilize a relação métrica no triângulo retângulo:  
 $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ , em que  $b$  e  $c$  são catetos e  $h$  é a altura relativa à hipotenusa.
479. a) Observe que a soma dos volumes de  $P(AMN)$ ,  $P(AMQ)$  e  $P(ANQ)$  é o volume de  $P(MNQ)$ .  
 b) Deve ser escolhido de modo que:  $PA = 3a$ ,  $PB = 3b$  e  $PC = 3c$ .
480. Use o teorema da bissetriz interna (Geometria Plana).
481. Tome dois dos segmentos citados, use semelhança de triângulos e a propriedade do baricentro.
482. Considere o segmento com extremidades num vértice e no baricentro da face oposta. O ponto que divide esse segmento na razão  $3:1$  a partir do vértice é o ponto pedido.
483. Estabeleça uma a uma as razões entre os volumes de  $P(BCD)$ ,  $P(ACD)$ ,  $P(ABD)$ ,  $P(ABC)$  e o volume de  $ABCD$ .
484. Resolvido.
485. Use o resultado do exercício 484.
486. Se  $A(BCDE)$  é a pirâmide, o plano é definido por  $B$ ,  $C$  e  $X$ , em que  $X$  é um ponto de  $AD$  tal que  $\frac{AX}{AD} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .
487. a) Use o exercício 475.  
 b) Trace as alturas  $CH$  e  $DH$  das faces  $ABC$  e  $ABD$ .  
 c) Cada diedro, com 2 dos ângulos citados, dá 2 retas.
488. Use paralelismo.
489.  $\frac{2}{3} v$
490.  $a = d \sqrt{\frac{2 \text{ sen } \alpha}{\text{sen } \beta \text{ sen } \varphi}}$ ;  $b = d \sqrt{\frac{2 \text{ sen } \beta}{\text{sen } \varphi \text{ sen } \alpha}}$ ;  
 $c = d \sqrt{\frac{2 \text{ sen } \varphi}{\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta}}$
491. a) Use a relação de Stewart ou a expressão da mediana de um triângulo.  
 b) Use o item a.
492. Use o exercício 480.
493. a) A superfície lateral é máxima se  $\widehat{APB} = 90^\circ$ .  
 b) O volume é máximo se  $PABC$  é tetraedro tri-retângulo.

## Capítulo X

494. a)  $A_f = 4\pi \text{ cm}^2$ ,  $A_t = 6\pi \text{ cm}^2$ ,  $V = 2\pi \text{ cm}^3$   
 b)  $A_f = 5\pi \text{ cm}^2$ ,  $A_t = 7\pi \text{ cm}^2$ ,  $V = 2,5 \text{ cm}^3$   
 c)  $A_f = 120(\pi + 2) \text{ mm}^2$ ,  $A_t = 8(23\pi + 30) \text{ mm}^2$ ,  
 $V = 480\pi \text{ mm}^3$

495. a)  $A_f = 4\pi x^2$ ,  $A_t = 6\pi x^2$ ,  $V = 2\pi x^3$   
 b)  $A_f = 7\pi r^2$ ,  $A_t = 9\pi r^2$ ,  $V = \frac{7\pi}{2} r^3$   
 c)  $A_f = 2(\pi + 2)a^2$ ,  $A_t = (3\pi + 4)a^2$ ,  $V = \pi a^3$

496.  $\frac{\sqrt{3}}{8} \pi g^3$

497. 5 cm

498.  $80\pi \text{ cm}^2$

499.  $18\pi \text{ cm}^2$

500.  $2r$

501. Saia da  $A_f$  e chegue na  $B$ .

502.  $2\pi \text{ cm}^2$

503. 3 m

504.  $18\pi \text{ m}^2$

505.  $\frac{15}{4} \text{ cm}$

506.  $\frac{25}{2} \text{ cm}$

507.  $\frac{16}{\pi} \text{ m}$

508. Resolvido.

509.  $225\pi \text{ cm}^2$

510.  $1\,200\pi \text{ cm}^2$

511.  $r\sqrt{6}$

512.  $100\pi \text{ cm}^2$ ;  $250\pi \text{ cm}^3$

513.  $375\pi \text{ m}^3$

514. 49 455 litros

515. 100 m

516. 8 cm

517. Resolvido.

518.  $A_f = 25\pi^2 \text{ cm}^2$ ;  $A_t = 25\pi(\pi + 2) \text{ cm}^2$ ;  
 $V = \frac{125}{2} \pi^2 \text{ cm}^3$

519. — o volume quadruplica  
 — o volume fica 16 vezes maior  
 — o volume fica reduzido a  $\frac{1}{4}$

520.  $4\,000\pi \text{ cm}^3$

521.  $6\,912\pi \text{ m}^3$

522.  $\frac{a^3}{4\pi}$

523.  $\frac{abc}{\pi r^2}$

524.  $3\,750\pi \text{ cm}^2$

525. 2 cm

526.  $8\pi$

527.  $\pi$

528.  $289\pi \text{ cm}^2$

529.  $\frac{23\pi r^3}{2}$

530.  $120 \text{ cm}^2$

531.  $\frac{3\pi S}{2}$

532.  $\frac{3}{2}$

533. 10 m

534.  $\frac{96\pi}{5} \text{ cm}^2$

535.  $r = 2 \text{ h}$

536. Verifique que  $A_f = \frac{A_t}{2}$ .

537.  $\frac{2V}{A_f}$

538.  $\frac{2V}{r}$

539.  $\pi h^2$ ;  $\frac{3\pi h^2}{2}$ ;  $\frac{\pi h^3}{4}$

540.  $87\,500\pi \text{ cm}^3$

541.  $4\sqrt{33} \text{ cm}^2$

542. Resolvido.

543.  $h = 9\sqrt{3} \text{ cm}$ ;  $r = 5\sqrt{3} \text{ cm}$

544.  $100\pi \text{ cm}^2$

545. 5 m

546. Aumenta  $k^2$  vezes.

547.  $\frac{225\pi}{2} \text{ cm}^2$

548.  $10 \text{ m}^2$

549.  $\frac{1 + \sqrt{101}}{10} \text{ cm}$

550. Parta do produto citado e chegue ao volume.

551.  $\sqrt{\frac{\pi}{\pi - 1}}$

552. Deve aumentar  $\frac{r^2}{g}$ .

553. O volume maior é aquele segundo o comprimento.

554. O volume menor é aquele segundo a largura.

555. Resolvido.

556.  $[32\sqrt{5} + (5 + 4\sqrt{5})4\pi] \text{ cm}^2$

557.  $\frac{\sqrt{2}(\pi + 2)}{2\pi} h$

558.  $\frac{A_r}{2\pi \sqrt{\frac{B}{\pi}}}$

559.  $\frac{-h + \sqrt{h^2 + 2a^2}}{2}$

560.  $36\sqrt{2}\pi \text{ cm}^3$

561.  $\frac{375\sqrt{3}\pi}{2} \text{ cm}^3$

562. Deve aumentar  $2g - r$ ;  $g$  = geratriz e  $r$  = raio da base.

563.  $\frac{V}{V'} = \frac{3}{4}$ ,  $\frac{A_1}{A'_1} = \frac{19}{26}$

564. Resolvido.

565.  $2 \sqrt{\frac{\pi V}{h}}$

566.  $2 \left( \sqrt{\pi h V} + \frac{V}{h} \right)$

567. Resolvido.

568.  $4\sqrt{3}$

569.  $1 \text{ cm}^2$

570.  $\frac{\pi\sqrt{2}}{\pi + 2}$

571.  $\frac{R}{r}$

572.  $9 \text{ cm}$

573.  $V_1 = \frac{1296\pi}{125} \text{ m}^3$ ;  $V_2 = \frac{20736\pi}{125} \text{ m}^3$

574.  $\frac{A}{\sqrt{S} - A}$

575. Resolvido.

576.  $\frac{r\sqrt{16 - \pi^2}}{4}$

577.  $\frac{160\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$

578.  $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ,  $h = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

579.  $r = h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

580.  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ ;  $h = 2 \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

581.  $\pi A \sqrt{S - A}$

582. O plano deve ser traçado a uma distância  $\frac{h \pm \sqrt{h^2 - r^2}}{2}$  da base, sendo  $h \geq r$ .

583. A primeira embalagem é mais vantajosa para o comprador.

584.  $54\pi$ ,  $9\pi$ ,  $36\pi$

585. a) A embalagem  $A$  gasta mais material ( $S_A > S_B$ ).

b) A embalagem  $A$  é mais econômica ( $V_A = 2V_B$ ).

586.  $R = \frac{2\sqrt{3} + 3}{3} r$

587. Use P.G. ilimitada.  $V = \frac{9\pi}{5}$ .

588.  $R = 3 \text{ cm}$  e  $r = 2 \text{ cm}$

589.  $\frac{10}{3} (4\pi - 3\sqrt{3}) \text{ cm}^3$

590. a) Não, porém o sólido é equivalente a um cilindro. (Veja o princípio de Cavalieri.)

b)  $V_S = \pi$

## Capítulo XI

591. a)  $A_r = 242\pi \text{ cm}^2$ ;  $A_1 = 363\pi \text{ cm}^2$ ;

$V = \frac{1331\pi}{3} \text{ cm}^3$

b)  $A_r = 50\pi\sqrt{53} \text{ cm}^2$ ;  $A_1 = 50(2 + \sqrt{53})\pi \text{ cm}^2$ ;

$V = \frac{3500\pi}{3} \text{ cm}^3$

c)  $A_r = \frac{1}{2} (15\pi + 24) \text{ cm}^2$ ;  $A_1 = 12(\pi + 1) \text{ cm}^2$ ;

$V = 6\pi \text{ cm}^3$

592. a)  $A_r = \frac{\pi\sqrt{17}}{8} h^2$ ;  $A_1 = \frac{\pi(2 + \sqrt{17})}{8} h^2$ ;

$V = \frac{\pi}{12} h^3$

b)  $A_r = 2\pi r^2$ ;  $A_1 = 3\pi r^2$ ;  $V = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi r^3$

c)  $A_r = \frac{1}{4} (\pi + \sqrt{3})d^2$ ;  $A_1 = \frac{1}{8} (3\pi + 2)d^2$ ;

$V = \frac{\pi\sqrt{3}}{48} d^3$

593. 8 cm
594. 66 cm
595.  $\pi \cdot r$
596. 3 cm
597. 4 cm
598. Resolvido.
599.  $\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3} a}{2}$
600.  $2\sqrt{29}$  cm
601.  $200\pi$  cm<sup>2</sup>
602. 48π dm<sup>2</sup>
603.  $A_f = 65\pi$  cm<sup>2</sup>  $A_t = 90\pi$  cm<sup>2</sup>
604.  $3\sqrt{6}$  cm
605.  $24\pi$  cm<sup>3</sup>;  $36\pi$  cm<sup>2</sup>
606.  $50\pi$  cm<sup>2</sup>
607.  $144\pi(1 + \sqrt{2})$  cm<sup>2</sup>
608.  $96\pi\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>
609.  $\pi(1 + \sqrt{2})A$
610. Resolvido.
611.  $\frac{1}{6}$
612.  $\frac{10}{3}\sqrt{55}$  cm
613. 60°
614. 288°
615. 180°
616. 240°
617.  $980\pi$  cm<sup>2</sup>
618.  $2,5\pi\sqrt{22,25}$  cm<sup>2</sup>
619.  $119\pi$  cm<sup>2</sup>
620. 20 cm
621.  $12\pi$  cm<sup>2</sup>
622. O volume dobra; o volume quadruplica.
623.  $\frac{3bc}{\pi a}$
624.  $\frac{35\pi\sqrt{1190}}{3}$  cm<sup>3</sup>
625.  $2,56\pi$  dm<sup>3</sup>
626.  $\frac{136\pi}{25}$  cm<sup>2</sup>
627.  $9\sqrt{\pi^2 + 1}$  cm
628. Resolvido.
629.  $A_t = \frac{4}{9}\pi R^2; V = \frac{2\sqrt{2}}{81}\pi R^3$
630.  $\frac{\sqrt{10}}{5}\pi$  rad =  $(36\sqrt{10})^0$
631.  $\frac{14}{25}\pi$  rad
632. 30°
633.  $\frac{r\sqrt{3}}{3}$
634.  $h = \pi R; A_f = \pi R^2\sqrt{\pi^2 + 1}; V = \frac{\pi^2 R^3}{3}$
635.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$
636.  $r = 10$  cm,  $g = 14$  cm
637.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
638.  $\frac{4\pi r^3}{9}$
639.  $\frac{-g + \sqrt{g^2 + 4a^2}}{2}$
640.  $\frac{A}{48}\sqrt{\frac{195 A}{2\pi}}$
641.  $\frac{40\pi\sqrt{481}}{3}$  cm<sup>3</sup>
642.  $\frac{S\sqrt{\pi S}}{9\pi}$
643.  $3\sqrt[3]{12}$  cm,  $4\sqrt[3]{12}$  cm,  $5\sqrt[3]{12}$  cm
644.  $\frac{375\sqrt{55}}{64}\pi$  cm<sup>3</sup>
645.  $A_f = 72\sqrt[3]{4}(\pi\sqrt{2} + 2)$  cm<sup>2</sup>
646.  $A_t = 224\pi$  cm<sup>2</sup>,  $V = 392\pi$  cm<sup>3</sup>
647.  $96\pi$  cm<sup>3</sup>
648.  $\frac{10\sqrt[3]{109}}{\sqrt{3}\pi}$
649. Parta do produto e chegue ao volume.
650.  $\frac{19\pi r^3}{9}$
651. 2 cm
652.  $r = \frac{1}{\sqrt{h^2 + 2}}; g = \frac{h^2 + 1}{\sqrt{h^2 + 2}}$
653.  $\frac{A^2\sqrt{\pi^2 g^4 - A^2}}{3\pi^2 g^3}$
654.  $\frac{hS^2}{3(\pi h^2 + 2S)}$

$$655. V = \frac{(S - A)}{3} \sqrt{\frac{A^2 - (S - A)^2}{(S - A)\pi}}$$

$$656. \frac{r}{3} \sqrt{S^2 - 2\pi Sr^2}$$

657. Parta do 2º membro, substitua  $S$  e  $A$  e chegue ao 1º membro.

658. Resolvido.

$$659. r = 3 \text{ cm}; h = 4 \text{ cm}; g = 5 \text{ cm}$$

$$660. \frac{(2r - h) + \sqrt{h^2 + 4rh}}{2} \text{ ou } \left( \frac{(2r - h) - \sqrt{h^2 + 4rh}}{2} \text{ para } r > 2h \right)$$

661. No cone,  $g > h$ .

662. Resolvido.

663. a) Se  $r > h$ , então  $V_1 > V_2$ . O volume diminui.  
 b) Se  $r = h$ , então  $V_1 = V_2$ . O volume não se alterou.  
 c) Se  $r < h$ , então  $V_1 < V_2$ . O volume aumentou.

$$664. \pi m$$

$$665. \frac{\pi}{4} m^2$$

$$666. a) \frac{\sqrt{6} \pi \rho^3}{27} \quad b) \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi \rho^2$$

$$667. r = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi \cdot \lg \alpha}} \quad h = \sqrt[3]{\frac{3V \cdot \lg^2 \alpha}{\pi}}$$

$$668. \beta = 2\pi \text{ sen } \alpha$$

$$681. 3\,364\pi \text{ cm}^2; \frac{97\,556\pi \text{ cm}^3}{3}$$

$$682. 576\pi \text{ cm}^2$$

$$683. 17\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$684. 676\pi \text{ cm}^2$$

$$685. 6 \text{ cm}$$

$$686. 972\pi \text{ cm}^3$$

$$687. \frac{500}{3} \pi \text{ cm}^3$$

$$688. 3$$

$$689. \frac{8\pi\sqrt{2}}{3} m^3, 8\pi m^2$$

$$690. 36\pi \text{ cm}^2; 36\pi \text{ cm}^3$$

$$691. 72\pi m^2$$

$$692. \frac{169}{24} \text{ cm}$$

$$693. 8\sqrt{5} \text{ cm ou } 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$694. 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$695. \frac{4r}{3}$$

$$696. \frac{625\sqrt{5} \pi}{4} \text{ cm}^2$$

$$697. r \notin 35$$

$$698. \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$699. 161\pi \text{ cm}^2$$

$$700. 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$701. \frac{25}{9}$$

702. Aumenta oito vezes; aumenta vinte e sete vezes.

703. Aumenta 700%; aumenta 6 300%; diminui 12,5%.

704. Aumenta 900%; aumenta 625%; diminui 6,25%.

705. Resolvido.

$$706. \frac{16 \cdot 10^8}{\pi} \text{ km}^2$$

707.  $A = 100\pi \text{ cm}^2$ ; aumenta  $44\pi \text{ cm}^2$ .

$$708. 676\pi \text{ cm}^2$$

$$709. 1,5 \text{ cm}$$

$$710. \pi(r^2 - 225) \text{ cm } r > 15$$

$$711. \frac{c^2}{\pi}$$

$$712. 4A$$

## Capítulo XII

$$669. a) A = 10,24\pi \text{ cm}^2 \quad V = 5,46 \text{ cm}^3$$

$$670. a) \frac{\pi}{12} x^2 \quad b) A_1 = \frac{\pi}{3} x^2$$

$$V = \frac{\pi}{72} x^3$$

$$671. 29 \text{ cm}$$

$$672. 28 \text{ cm}$$

$$673. 15 \text{ cm}$$

$$674. 4 r$$

$$675. 3 \text{ cm}$$

676. Resolvido.

$$677. 1\,225\pi \text{ cm}^2$$

$$678. 1\,369\pi \text{ cm}^2$$

$$679. \frac{17\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$$680. \frac{27}{475}$$

713.  $\frac{4\pi a^2}{3}$

714.  $\sqrt{\frac{\pi r^2 - A}{\pi}}$

715.  $\frac{c^3}{6\pi^2}$

716.  $3\sqrt[3]{\frac{1}{5}} \text{ m}$

717.  $3\sqrt[3]{\frac{2}{9\pi}}$

718.  $2a^2\sqrt[3]{\frac{9\pi}{2}}$

719.  $\frac{1715\sqrt{10}}{3}\pi \text{ cm}^3$

720. 3

721.  $\pi d^2$

722.  $\frac{4}{3}$

723. a) 3 cm

b)  $\frac{3}{2}$

724.  $\frac{21\sqrt{6}}{64}$

725. Os volumes das esferas são iguais.

726. O volume do cubo é maior.

727.  $\frac{\sqrt{6\pi}}{2\pi}$

728.  $\sqrt{6} \text{ dm}$

729.  $60^\circ$

730.  $\frac{14}{45}\pi \text{ m}^2$

731.  $50\pi \text{ cm}^2$

732.  $\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$

733.  $108\pi \text{ cm}^2$

734.  $4\sqrt{3} \text{ cm}$

735.  $\frac{4\pi r^2}{3}; \frac{\pi r^3}{9}$

736.  $48\pi \text{ m}^3$

737.  $81\pi \text{ m}^3$

738.  $r = 20(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}; R = 20(2 - \sqrt{2}) \text{ cm}$

739.  $r = 24(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}; R = 24(2 - \sqrt{2}) \text{ cm}$

740.  $5\sqrt[3]{4} \text{ cm}$

741. 8

742. a) Use o teorema de Pitágoras e a aproximação sugerida.

b) 21 km

743. 4

744. a) Use o teorema de Pitágoras.

b)  $\frac{r\sqrt{2}}{2}$

## Capítulo XIII

745. a)  $\frac{1}{2}$

d)  $\frac{1}{8}$

b) 2,5 cm

e) Sim, veja a teoria.

c)  $\frac{1}{4}$

746. A  $\sqrt[3]{2}$

747.  $h = 10 \text{ cm}, \ell = 6 \text{ cm}$

748.  $32 \text{ cm}^3$

749. 8

750.  $\frac{h}{2}$

751.  $10\sqrt{3} \text{ cm}^3$

752.  $\frac{45}{4} \text{ m}$

753.  $r = \frac{1}{2} \text{ m}; h = 1 \text{ m}$

754.  $100 \text{ m}^2$

755.  $3\sqrt[3]{18} \text{ cm}$

756.  $\frac{4}{25}$

757.  $h = 4\sqrt[3]{3} \text{ cm}; r = 3\sqrt[3]{3} \text{ cm}$

758.  $h\sqrt{\frac{b}{B}}$

759.  $40\sqrt[3]{4} \text{ cm}; 20\sqrt[3]{4} \text{ cm}; 30\sqrt[3]{4} \text{ cm}$

760.  $54 \text{ m}^3$

761.  $\frac{500}{3} \text{ m}^3$

762.  $576 \text{ cm}^2$

763.  $h = \frac{20}{3} \text{ cm}; \ell = \frac{8}{3} \text{ cm}$

764.  $16\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ cm}^3$

765.  $2\sqrt[3]{4} \text{ m}$



766. a)  $14 \text{ cm}^2$

b)  $3(8 + 5\sqrt{3}) \text{ cm}^2$

767.  $200 \text{ dm}^2$

768.  $6 \text{ cm}$

769.  $1024 \text{ cm}^2$

770.  $864 \text{ cm}^2$

771.  $\frac{351\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3$

772.  $6 \text{ cm}$

773.  $\frac{185}{2} \text{ m}^3$

774.  $336 \text{ dm}^3$

775. Resolvido.

776.  $228 \text{ cm}^3$

777.  $78\sqrt{7} \text{ m}^3$

778.  $1\,950\sqrt{3} \text{ cm}^2$ ;  $5\,700\sqrt{3} \text{ cm}^3$

779.  $9 \text{ cm}$

780.  $\frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}$

781.  $\frac{ab}{a + b}$

782.  $\frac{h}{6} (\sqrt{B} - \sqrt{b})^2$

783.  $\frac{224\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$

784.  $k^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

785.  $(\sqrt{3} + 6) \text{ dm}^2$

786.  $50(6 + 5\sqrt{6}) \text{ cm}^2$

787.  $\frac{109\sqrt{3}}{36} \text{ dm}$

788. Resolvido.

789.  $52\sqrt{7} \text{ cm}^3$

790.  $208 \text{ cm}^3$

791.  $156 \text{ cm}^2$

792.  $42 \text{ m}^3$

793.  $V_T = 224(\sqrt{2} + 1) \text{ cm}^3$   
 $V_P = 256(\sqrt{2} + 1) \text{ cm}^3$

794. a)  $6 \text{ m}^2$  e  $\frac{3}{2} \text{ m}^2$       b)  $\frac{21\sqrt{3}}{5} \text{ m}^3$

795. a)  $2,795\pi \text{ cm}^3$       b)  $0,784\pi \text{ cm}^3$

796.  $33\pi \text{ dm}^2$ ;  $\frac{19\sqrt{15}\pi}{3} \text{ dm}^3$

797.  $h = 7,5 \text{ cm}$ ;  $V = 4\,750\pi \text{ cm}^3$ ;  
 $b = 400\pi \text{ cm}^2$   
 $B = 900\pi \text{ cm}^2$

798.  $124\pi \text{ cm}^3$

799.  $\frac{39}{10} x^2\pi$

800.  $r = 2 \text{ dm}$ ,  $R = 4 \text{ dm}$ ,  $h = 8 \text{ dm}$ ,  $a = 2\sqrt{17} \text{ dm}$

801.  $9\,100\pi \text{ cm}^3$

802.  $\frac{60}{19} \text{ m}$

803.  $A_T = 160\pi \text{ cm}^2$      $A_L = 306\pi \text{ cm}^2$

804.  $140\pi \text{ cm}^2$

805.  $\frac{24}{5} \text{ m}$

806.  $20 \text{ cm}$

807.  $14 \text{ m}$

808.  $\frac{V_C}{V_T} = \frac{3}{8 + 3\sqrt{5}}$

809.  $13 \text{ cm}$

810.  $\frac{V_T}{V_C} = \frac{8 + 3\sqrt{5}}{3}$

811.  $\frac{2Rr}{R + r}$

812.  $\frac{7\pi}{3} \text{ m}^3$

813.  $\frac{7\,000\pi}{3} \text{ cm}^3$

814.  $g = R$

815.  $\frac{R}{r} = 1 + \sqrt{3}$

816. Demonstração.

817.  $\frac{8\pi}{3} (3 + \sqrt{2})$

818.  $3\sqrt{17}\pi r^2$ ,  $\frac{4 + \sqrt{19}}{3} r$

819.  $\frac{1}{3} \pi \frac{R^2rh}{R-r}$

820.  $\frac{23 - 4\sqrt{19}}{49} \text{ cm}$

821. Demonstração.

822.  $x = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{4a^2 + h^2 - g^2}{3}} + \sqrt{g^2 - h^2} \right)$

$y = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{4a^2 + h^2 - g^2}{3}} - \sqrt{g^2 - h^2} \right)$

com  $g^2 - 4a^2 < h^2 < g^2$

823.  $r = 10 \sqrt[3]{3}$  cm;  $h = 20 \sqrt[3]{3}$  cm

824.  $3(5 - \sqrt{15})$  cm

825.  $\frac{500}{3} \text{ m}^2$

826.  $1\,050\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$

827.  $\frac{A \cdot d^2}{g^2 - r^2}$

828.  $\frac{8\sqrt{3}}{49}$

829.  $18\sqrt{2}$  cm

830.  $\frac{h\sqrt[3]{4}}{2}$

831.  $12\sqrt[3]{4}$  cm

832. Resolvido.

833.  $\frac{h\sqrt[3]{3}}{3}$

834.  $\frac{Bt^2\pi}{\pi g^2 - B}$

835. 20 cm

836.  $\sqrt{g(g - R)}$

837.  $\frac{3\sqrt{10}}{5}$  cm

838.  $\frac{g^2 - r^2}{g}$

839.  $\sqrt{g(g - r)}$

840.  $(g + r) \sqrt{\frac{g - r}{2g}}$

841.  $\sqrt[3]{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$

842.  $\frac{3\,600\pi}{7} \text{ m}^3$ ;  $\frac{11\,600\pi}{49} \text{ m}^2$

843.  $\rho^3 \sqrt{\frac{V'}{V}}$

844.  $\frac{15}{512} \text{ dm}^3$ ;  $\frac{7\,665}{512} \text{ dm}^3$

845.  $\frac{4\sqrt[3]{25}}{5}$  m;  $2\sqrt[3]{4}$  m

846.  $63\sqrt{3} \text{ dm}^3$

847.  $4\sqrt[3]{9}$  m;  $4\sqrt[3]{18}$  m

848. Resolvido.

849. 240 m e 210 m

850. 550

851.  $x = \frac{h\sqrt[3]{4}}{2}$ ;  $x_i = h\sqrt[3]{\frac{i}{n}}$

852.  $\frac{12\sqrt[3]{147}}{7}$

853.  $7\sqrt[3]{18}$  m;  $7\sqrt[3]{9}$  m

854.  $\frac{4\sqrt[3]{900}}{3}$  m;  $4\sqrt[3]{75}$  m

855. 6 cm e 2 cm

856.  $\frac{3\sqrt{2}}{4} r$

857.  $9 \text{ m}^2$

858.  $\frac{\sqrt{Rg(g^2 - R^2)}}{R}$

859.  $\frac{\pi}{4} \text{ m}$

860. O plano deve passar a 2 m da base maior.

861.  $\sqrt[3]{\frac{aR^3 + br^3}{a + b}}$

862.  $\sqrt[3]{\left(\frac{pB\sqrt{B} + qb\sqrt{b}}{p + q}\right)^2}$

863. 7

864.  $\frac{26}{3} \text{ m}$

865.  $\frac{7a + 4\sqrt{ab} + b}{a + 4\sqrt{ab} + 7b}$

866.  $9\,728 \text{ cm}^3$  e  $2\,368 \text{ cm}^3$

867.  $6(2 - \sqrt[3]{3})$  cm

868.  $\left(\sqrt[3]{\frac{R^3 + 2r^3}{2R^3 + r^3}}\right)^2$

869.  $\frac{125\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^3$

870. a)  $2,25 \text{ cm}^3$       b)  $2 \text{ cm}^3$

871. a)  $13x^3$       b)  $\frac{\pi}{4} x^3$

872.  $200\sqrt{3} \text{ cm}^3$

873. 3 cm

874.  $C = \frac{3V}{B} - (a + b)$

875.  $144\pi \text{ cm}^2$ ,  $V = 432\pi \text{ cm}^3$

876. Demonstração.

877.  $\frac{1}{2} \pi r^2 (a + b)$

878.  $H = 2h$

879.  $1\,000\pi \text{ cm}^3$

## Capítulo XIV

880.  $\frac{\pi}{6} \text{ dm}^3$

881.  $864\sqrt{3} \pi \text{ cm}^3$

882.  $\frac{4\,096\sqrt{3}}{9} \text{ cm}^3$

883.  $100 \text{ cm}^2$ ;  $125 \text{ cm}^3$

884.  $\frac{27\sqrt{3} \pi}{2} \text{ cm}^3$

885.  $\frac{4,608}{\sqrt{3}} \text{ cm}^3$

886.  $\frac{\pi}{2}$

887.  $\frac{\sqrt{3}}{9}$

888.  $\frac{\sqrt{3}}{9}$

889.  $\frac{8r^3\sqrt{3}}{9}$

890.  $\frac{A\sqrt{A}}{3\pi\sqrt{3\pi}}$

891.  $\frac{2V}{\pi\sqrt{3}}$

892.  $\frac{\pi A}{2}$

893.  $\sqrt{41,07} \text{ cm}$

894.  $12\sqrt{3} \text{ cm}$

895.  $36\pi\sqrt{\pi} (6 - \pi) \text{ cm}^3$

896.  $\left(512 - \frac{512\pi}{3}\right) \text{ cm}^3$

897.  $36 \text{ cm}^3$

898.  $\frac{4}{3} r^3 (\pi - 1)$

899.  $144\sqrt{3} \text{ cm}^2$

900.  $3\sqrt{3}$

901.  $9 \text{ dm}$ ;  $\frac{27\sqrt{3}}{8} \text{ dm}^2$

902.  $13\sqrt{3} \text{ m}^2$

903.  $96\sqrt{2} \text{ cm}^3$

904.  $9 \text{ m}^3$

905.  $24\sqrt{3} R^2$ ;  $8\sqrt{3} R^3$

906.  $\frac{\pi\sqrt{6} a^3}{216}$

907.  $\frac{3\pi a^2}{2}$

908.  $\frac{\pi a^2}{6}$ ;  $\frac{3\pi a^2}{2}$ ;  $\frac{\pi\sqrt{6} a^3}{216}$ ;  $\frac{\pi\sqrt{6} a^3}{8}$

909.  $\frac{2}{\sqrt[6]{6}}$ ;  $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

910. 9

911. 27

912. a)  $\frac{a}{2}$       b)  $\frac{a\sqrt{2}}{6}$       c)  $\frac{a}{6}$

913.  $9 \text{ m}^3$

914.  $\frac{128}{3} \text{ cm}^2$

915.  $2\sqrt{3}$

916.  $\frac{V}{3}$

917.  $P$  é octaedro regular,  $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{2}$ ,  $\frac{\ell^3\sqrt{2}}{24}$ .

918.  $\frac{\pi \ell^2}{3}$

919.  $\frac{3}{8}$  ou  $\frac{8}{3}$

920.  $\frac{3}{\pi}$

921.  $\pi \cdot \frac{343}{2} \text{ cm}^3$

922.  $\frac{A_{\text{prisma}}}{A_{\text{cilindro}}} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$

923.  $5 \left(25 - \frac{9\pi}{4}\right) \text{ cm}^3$

924.  $72\pi \text{ cm}^3$

925.  $300\pi \text{ cm}^3$

926.  $600(4 - \pi) \text{ cm}^2$

927.  $4R(R + h\sqrt{2})$

928. a)  $\sqrt{3}\pi \cdot a \cdot h$ ;  $\frac{3\pi a^2 \cdot h}{4}$

b)  $2\pi ah \cdot \pi a^2 h$   
 $\frac{4\pi\sqrt{3} ha}{3}$ ;  $\frac{4\pi a^2 \cdot h}{3}$

c)  $\frac{A_{\ell_1}}{A_{\ell_2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $\frac{V_{C_1}}{V_{C_2}} = \frac{3}{4}$

929.  $V_c = 96\pi \text{ cm}^3$ ;  $V_p = 192 \text{ cm}^3$

930.  $5\sqrt{3} \text{ cm}$

931.  $\frac{\pi a^3}{2}$
932.  $g = 10 \text{ m}$ ,  $V = 144\sqrt{3} \text{ m}^3$ ;  $\ell_0 = 6 \text{ m}$
933.  $\frac{1}{3}$ ;  $144\sqrt{3} \text{ cm}^3$
934. Resolvido.
935.  $\frac{1}{6} abc$
936.  $\ell^2\sqrt{5}$ ,  $\frac{\ell^3}{3}$
937.  $8 \text{ m}^3$
938.  $\frac{h \pm \sqrt{h^2 - 4ah}}{2}$ , com  $h \geq 4a$
939.  $9\sqrt{2} \text{ m}^3$  ou  $3\sqrt{2} \text{ m}^3$
940.  $\frac{5}{6} abc$
941. Demonstração.
942.  $\frac{2}{3\pi}$
943.  $\frac{r\sqrt{6}}{4\pi}$
944.  $432\pi \text{ cm}^3$
945.  $\frac{2(2 + \sqrt{3})}{9}$
946. raio da base =  $\frac{2Rh}{2h + \sqrt{h^2 + R^2}}$ ,  
altura =  $\frac{h\sqrt{h^2 + R^2}}{2h + \sqrt{h^2 + R^2}}$
947.  $\frac{hg}{g + 2h}$
948.  $r = R\sqrt{\frac{R}{G + R}}$ ,  $h = \sqrt{G - R}(\sqrt{G + R} - \sqrt{R})$
949.  $\frac{5\pi R^3}{6}$
950.  $\arctg \frac{1}{2}$
951.  $\arcsen \frac{3}{5}$
952.  $6 \left( \frac{\sqrt{2\ell \operatorname{sen} \alpha}}{\sqrt{2 + \operatorname{tg} \alpha}} \right)$
953.  $\frac{a^3(6 - \pi)}{6}$
954.  $100\pi \text{ cm}^2$ ,  $\frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3$
955.  $600\pi \text{ m}^2$
956.  $225\pi \text{ cm}^2$
957.  $12 \text{ cm}^3$
958.  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$
959.  $\frac{2}{3}$ ;  $\frac{2}{3}$
960.  $H = \frac{a^2 - r^2}{r}$
961.  $2\sqrt{2}$
962.  $A_r = \pi\sqrt{3}r^2$ ,  $V = \frac{\sqrt{3}\pi}{4}r^3$   
 $A_t = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)\pi r^2$
963.  $\frac{128\pi}{3} \text{ cm}^3$
964.  $500\sqrt{2}\pi \text{ cm}^3$
965.  $\frac{4R^3}{4r^2}$
966.  $R = 5 \text{ cm}$ ,  $\frac{V_{\text{cil.}}}{V_{\text{esf.}}} = \frac{54}{125}$ ,  $\frac{V_{\text{cil. eq.}}}{V_{\text{cil.}}} = \frac{125\sqrt{2}}{144}$
967. diâmetro da base  
 $x = \frac{\sqrt{d^2 + 2a^2} + \sqrt{d^2 - 2a^2}}{2}$   
altura  
 $y = \frac{\sqrt{d^2 + 2a^2} - \sqrt{d^2 - 2a^2}}{2}$   
condição:  $d \geq a\sqrt{2}$
968. Demonstração.
969. Demonstração.
970.  $9(16 + 3\sqrt{3}) \text{ m}^2$
971.  $R(\sqrt{2} - 1)$
972.  $4(\sqrt{2} + 1) \text{ cm}$
973.  $\frac{2}{3} \cdot (2\sqrt{3} + 3)r$
974. Os volumes são iguais.
975. Demonstração.
976.  $\sqrt{6}\pi R^2$
977.  $3\sqrt{3}$
978.  $\frac{2(3 + \sqrt{3})^3}{9\pi}$
979. Resolvido.

980.  $R = 7,5 \text{ m}$ ,  $G = 19,5 \text{ m}$
981.  $H = 16 \text{ cm}$ ,  $G = 20 \text{ cm}$
982.  $2R = 12 \text{ cm}$
983.  $\frac{243 \pi}{2} \text{ cm}^3$
984.  $\frac{100 \pi}{3} \text{ cm}^2$
985.  $36 \pi \text{ cm}^3$
986. a)  $H = \sqrt{G^2 - R^2}$ ;  $r = \frac{R\sqrt{G^2 - R^2}}{R + G}$   
 b)  $R = \sqrt{G^2 - H^2}$ ;  $r = \frac{H\sqrt{G^2 - R^2}}{G + \sqrt{G^2 - H^2}}$   
 c)  $G = \sqrt{H^2 + R^2}$ ;  $r = \frac{RH}{R + \sqrt{H^2 + R^2}}$   
 d)  $G = \frac{H(H - r)}{\sqrt{H(H - 2r)}}$ ;  $R = \frac{rH}{\sqrt{H(H - 2r)}}$
987.  $\frac{\pi r^2 h^2}{3(h - 2r)}$ ;  $\frac{\pi r(h - r) \cdot h}{h - 2r}$
988.  $10 \text{ cm}$
989.  $\frac{\sqrt{30}}{2} \text{ cm}$
990.  $\frac{\pi}{3}$
991.  $H = \frac{25 r^2}{2R}$ ,  $\frac{10 Rr}{25 r - 2R}$
992.  $\frac{\pi r^2 (r + \sqrt{d^2 + r^2})^3}{3d^2}$
993.  $2916 \pi \text{ cm}^2$
994.  $2 \arcsin \frac{5}{6}$  ou  $2 \arcsin \frac{1}{6}$
995.  $\frac{9\pi a^3(\sqrt{5} - 2)}{2}$
996. Demonstração.
997.  $3R$
998.  $\frac{4(10 - \sqrt{34})}{11} \text{ cm}$
999.  $\frac{6\sqrt{3}}{5\pi}$
1000.  $\frac{\sqrt{210} + 3\sqrt{2}}{8}$
1001.  $\frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{2 \pi \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$
1002. Resolvido.
1003.  $27 \text{ cm}$
1004.  $\frac{15 \cdot 2625 \pi}{6} \text{ cm}^3$
1005.  $\frac{256 \pi}{3} \text{ cm}^3$
1006.  $\frac{\pi}{6} \cdot \frac{g^6}{h^3}$
1007.  $V = \frac{\pi h^2 (2R - h)}{3}$ ;  $A_r = \pi h \sqrt{2R(2R - h)}$
1008.  $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$
1009. Posição do centro: é a interseção do plano mediatriz de  $AD$  com a reta perpendicular ao plano  $ABC$  pelo circuncentro do triângulo  
 $R = \frac{2\sqrt{3}}{3} \ell$ .
1010. Demonstração.
1011. a)  $4$  b)  $2\sqrt{2}$
1012.  $\frac{3}{16}$
1013. a)  $B = \frac{1}{2} \pi R^2$ ;  $A_r = 2 \pi R^2$ ;  $A_t = 3 \pi R^2$ ;  
 $V = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi R^3$   
 b)  $B = \frac{3}{4} \pi R^2$ ;  $A_r = \frac{3}{2} \pi R^2$ ;  $A_t = \frac{9}{4} \pi R^2$ ;  
 $V = \frac{3}{8} \pi R^3$   
 c)  $V_{\text{cil.}}^2 = V_{\text{cone}} \cdot V_{\text{esf.}}$
1014. Demonstração.
1015. Resolvido.
1016.  $\frac{32\pi}{3} \text{ m}^3$
1017.  $\frac{h}{2} = \sqrt{R \cdot r}$
1018.  $12\pi R^2$
1019.  $3500\pi \text{ cm}^3$
1020.  $A_t = \frac{\pi}{2} (4g^2 - h^2)$ ,  $V = \frac{\pi h}{6} (2g^2 - h^2 + 2r^2)$
1021.  $\frac{81}{16} \text{ cm}^3$
1022.  $2$
1023.  $\frac{V_c}{V_e} = 2$

1024.  $\frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3$

1025.  $\frac{r}{5}$

1026. 1

1027.  $\frac{485\sqrt{3}}{18} \text{ dm}^3$

1028. 1 m

1029.  $\frac{2\pi r^3\sqrt{3}}{27}$

1030.  $\frac{28\pi}{3} \text{ cm}^3$

1031.  $100\pi \text{ cm}^2, \frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3$

1032.  $\frac{2\pi R^2 h}{81}$

1033.  $\frac{3r}{4}$

1034.  $\frac{h}{2}$

1035.  $\frac{2\ 304\pi}{125} \text{ cm}^3$

1036.  $4(196 - 13\pi) \text{ cm}^3$

## Capítulo XV

1037. Resolvido.

1038.  $\frac{4}{27} \pi ah^2$

1039.  $\frac{8\pi ah^2}{81}$

1040.  $\frac{\pi \cdot h^2 \cdot a}{3}$

1041.  $\frac{55\pi}{2} \text{ cm}^3$

1042.  $400\pi \text{ cm}^3; \frac{2\ 000\sqrt{3}\pi}{3} \text{ cm}^3$

1043.  $\frac{25\pi}{2} \text{ cm}^2, \frac{250\pi}{9} \text{ cm}^3$

1044.  $\sqrt{2} \text{ m}$

1045.  $9 \cdot \pi \cdot \sqrt{2} \text{ m}^3$

1046.  $\frac{3\ 072\pi}{5} \text{ cm}^3$

1047.  $\frac{\pi}{2} a^3$

1048. Resolvido.

1049.  $V = \frac{\pi a^3}{4}, A = \pi a^2\sqrt{3}$

1050.  $\frac{\pi a^3}{2}$

1051.  $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$

1052.  $\frac{1\ 875\pi}{64} \text{ cm}^3$

1053.  $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{4}, A = 3\pi a^2$

1054.  $\frac{\pi}{2} \text{ m}^3, 2\sqrt{3}\pi \text{ m}^2$

1055.  $V = \frac{3\sqrt{3}\pi a^3}{4}, A = 9\pi a^2$

1056.  $V = \pi a^3, A = 4\pi a^2$

1057.  $V = \pi a^3\sqrt{2}, A = 4\pi a^2\sqrt{2}$

1058.  $\sqrt{2}\pi \text{ m}^3, 4\sqrt{2}\pi \text{ m}^2$

1059.  $3\ 300\pi \text{ cm}^3$

1060.  $A_1 = 480\pi \text{ cm}^2$

1061.  $2\ 916\pi \text{ cm}^3; 468\sqrt{3}\pi \text{ cm}^2$

1062. Demonstração.

1063.  $60\pi \text{ cm}^3$

1064.  $80\pi \text{ cm}^3$

1065.  $69\ 984\pi \text{ cm}^3; 5\ 184\pi \text{ cm}^2$

1066.  $\frac{12\ 800\pi}{3} \text{ cm}^3$

1067.  $584\pi \text{ cm}^3$

1068.  $\frac{(3m - 4h)\pi h^2}{3}$

1069.  $2\ 304\pi \text{ cm}^3$

1070.  $200\sqrt{3} \text{ m}^2$

1071. Demonstração.

1072.  $R = \sqrt{\frac{B^2 - 4\pi A^2}{2\pi B}}$ ;

$g = \frac{B^2 + 4\pi^2 A^2}{\sqrt{2\pi B(B^2 - 4\pi A^2)}}$

1073. Demonstração.

1074. Demonstração.

1075. Demonstração.

1076. Demonstração.

1077. Demonstração.

1078.  $\frac{a}{3}$  ou  $\frac{2a}{3}$

1079. Resolvido.

1080. Demonstração.

1081. Demonstração.

1082.  $\frac{B}{\pi A}$

1083.  $x = \sqrt{\frac{V'^2}{\pi V}}$ ,  $y = \sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi V'}}$

1084. Demonstração.

1085.  $\pi a^3 \sin^2 \theta$

1086.  $A = 4\pi d(a + b)$ ,  $V = 2\pi abd$

1087.  $V_{cil.} = 6V_{cone}$

1088.  $V_{cil.} = 2744\pi \text{ cm}^3$ ;  $V_{sol.} = \frac{7840}{3}\pi \text{ cm}^3$

1089.  $BM = a\sqrt{3}$ ,  $M\hat{B}C = 30^\circ$ ;  $A = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}\pi a^2$

$V = \frac{\pi a^3}{2}$

1090. Resolvido.

1091.  $7392\sqrt{21} \text{ cm}^3$

1092.  $\frac{16\sqrt{3}}{21}$

1093. a)  $20\pi \text{ cm}^2$

d)  $\frac{4\pi}{3} \text{ cm}^3$

b)  $\frac{1}{2} \text{ cm}$

e)  $\frac{3\sqrt{5}\pi}{4} \text{ cm}^2$

c)  $4\pi \text{ cm}^2$

1102.  $\frac{2R}{m-2}$ ,  $m > 2$

1103.  $2304\pi \text{ cm}^3$

1104.  $\frac{3 + \sqrt{209}}{2} \text{ cm}$

1105.  $56\pi \text{ cm}^2$

1106.  $100\pi \text{ cm}^2$

1107.  $2 - \sqrt{3}$

1108.  $(\sqrt{5} - 2)R$

1109. Resolvido.

1110.  $(\sqrt{5} - 2)r$

1111.  $144\pi \text{ cm}^2$

1112.  $\frac{13}{9} \text{ cm}$

1113.  $16\sqrt{34}\pi \text{ cm}^2$

1114.  $\frac{32000\pi}{3} \text{ cm}^3$ ;  $1600\pi \text{ cm}^2$

1115.  $3 \text{ cm}$

1116.  $36\pi \text{ cm}^3$

1117.  $\frac{\pi}{n} \text{ rad}$

1118.  $(\sqrt{2} - 1)2r$

1119.  $5(4 - \sqrt{10}) \text{ cm}$

1120.  $\frac{23r}{25}$

1121.  $d = \frac{1 + \sqrt{73}}{36}r$ ,  $d = \frac{-1 + \sqrt{73}}{36}r$

1122.  $(\sqrt{3} - 1)r$

1123.  $3R$

1124. Demonstração.

1125.  $\frac{52\pi}{3} \text{ m}^3$

1126.  $672\pi \text{ cm}^3$

1127.  $\frac{625\pi}{3} \text{ cm}^3$

1128.  $\frac{1408\pi}{3} \text{ cm}^3$

1129.  $\frac{224}{3}\pi \text{ cm}^3$

1130. Resolvido.

1131.  $1137\pi \text{ cm}^3$

1132.  $2556\pi \text{ cm}^3$

1133. Resolvido.

## Capítulo XVI

1094.  $10500\pi \text{ cm}^2$

1095.  $144\pi \text{ cm}^2$

1096. aproximadamente  $12,52\pi \text{ cm}^3$

1097.  $\frac{5R}{2}$

1098. Resolvido.

1099.  $\frac{R}{17}$

1100.  $h = \frac{9}{10}R$ ,  $A = \frac{9}{5}\pi R^2$

1101.  $\frac{32\pi}{3} \text{ m}^2$

**1134.**  $\frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{n} \cdot (h - R)^2$

**1135.**  $120\pi \text{ m}^2$ ;  $V = \frac{1484 \pi}{3} \text{ cm}^3$

**1136.**  $\frac{(\sqrt{5} - 1)}{2} r$

**1137.**  $\frac{(\sqrt{3} - 1)}{2} r$

**1138.**  $\frac{k(2 - 3k)}{(1 - k)^2} \pi R^2$ ,  $k < \frac{2}{3}$

**1139.**  $\frac{1}{3} \text{ m}^3$

**1140.**  $288 \pi \text{ cm}^3$

**1141.**  $270 \text{ cm}^2$

**1142.**  $\sqrt[3]{20} \text{ cm}$

**1143.**  $\frac{1000}{3} (\sqrt{2} \pm 1) \pi \text{ cm}^2$

**1144.** Sim; vide expressão do volume.

**1145.** Ao quadrado; vide a fórmula.

**1146.**  $\frac{\sqrt{n-1}}{n} \cdot 2R$ ,  $n > 1$

**1147.**  $\frac{6V}{\pi \ell^2}$

**1148.**  $\frac{50 \pi}{3} \text{ cm}^3$

**1149.**  $\frac{2}{3} (4\sqrt{2} - 5) \pi R^3$

**1150.**  $\frac{\pi H}{6} [3(R_1^2 + R_2^2) + H^2]$

**1151.** Resolvido.



# Testes de Vestibulares

## Paralelismo — Perpendicularidade

- (ITA-70) Quando a projeção de um ângulo  $\theta$  sobre um plano paralelo a um de seus lados é um ângulo reto, podemos afirmar que:
  - $90^\circ < \theta < 180^\circ$
  - $\theta < 90^\circ$
  - $\theta = 90^\circ$
  - $\theta = 2\pi \text{ Rd}$
  - nenhuma das respostas anteriores é válida
- (CESCEM-70) Do enunciado abaixo:

“A condição necessária e suficiente para que uma reta seja paralela a um plano que não a contém é que ela seja paralela a uma reta desse plano.”

Podemos concluir que:
  - A condição ser suficiente significa que: todo plano paralelo a uma reta contém a paralela traçada a esta reta por um qualquer de seus pontos.
  - A condição ser necessária significa que: toda reta paralela a uma reta de um plano é paralela a este plano.
  - A condição ser suficiente significa que: todo plano paralelo a uma reta conterá todas as retas paralelas à reta dada.
  - A condição ser necessária significa que: todo plano paralelo a uma reta contém a paralela traçada a esta reta por um qualquer de seus pontos.
  - Nenhuma das anteriores.
- (CESCEM-73) Sejam  $G$ ,  $H$  e  $I$ , respectivamente, os pontos de encontro das medianas, alturas e bissetrizes do triângulo  $ABC$ . Quaisquer que sejam os comprimentos  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$  e  $\overline{OC}$ , podemos concluir que:
  - $P$  coincide com  $I$ .
  - $P$  coincide com  $H$ .
  - $P$  coincide com  $G$ .
  - $P$  não coincide com nenhum dos pontos  $G$ ,  $H$  e  $I$ .
  - $P$  é equidistante dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

4. (U.MACK.-73) Marque uma das alternativas:
- se existir um(a) e um(a) só
  - se existirem exatamente dois (duas) distinto(a)s
  - se existir um número finito porém maior que 2
  - se existirem infinito(a)s
  - se não existir nenhum(a)
- de modo que as afirmações que se seguem fiquem corretas:
- $1^\circ$  *reta* perpendicular a duas retas reversas.
  - $2^\circ$  *plano* paralelo a duas retas reversas.
  - $3^\circ$  dadas duas retas reversas e não ortogonais, *plano* contendo uma das retas e perpendicular à outra.
  - $4^\circ$  retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{CD}$  reversas, *plano* por  $\overleftrightarrow{CD}$  e equidistante dos pontos  $A$  e  $B$ .
5. (ITA-77) Seja  $p$  um plano. Sejam  $A, B, C$  e  $D$  pontos de  $p$  e  $M$  um ponto qualquer não pertencente a  $p$ . Então:
- se  $C$  dividir o segmento  $AB$  em partes iguais a  $\overline{MA} = \overline{MB}$ , então o segmento  $MC$  é perpendicular a  $p$ .
  - se  $ABC$  for um triângulo equilátero e  $D$  for equidistante de  $A, B$  e  $C$ , então o segmento  $MD$  é perpendicular a  $p$ .
  - se  $ABC$  for um triângulo equilátero e  $D$  for equidistante de  $A, B$  e  $C$ , então  $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$  implica que o segmento  $MD$  é perpendicular a  $p$ .
  - se  $ABC$  for um triângulo equilátero e o segmento  $MD$  for perpendicular a  $p$ , então  $D$  é equidistante de  $A, B$  e  $C$ .
  - Nenhuma das respostas anteriores.
6. (U.MACK.-79) Considere as afirmações:
- Se uma reta é paralela a dois planos, então estes planos são paralelos.
  - Se dois planos são paralelos, toda reta de um é paralela a uma reta do outro.
  - Se duas retas são reversas, então existe uma única perpendicular comum a elas.
- Então:
- todas são verdadeiras.
  - somente a II é verdadeira.
  - somente a III é verdadeira.
  - somente a I é verdadeira.
  - somente II e III são verdadeiras.
7. (U.MACK.-79) O triângulo  $MNP$  retângulo em  $N$  e o paralelogramo  $NPQR$  situam-se em planos distintos. Então, a afirmação " $MN$  e  $QR$  são segmentos ortogonais":
- é sempre verdadeira.
  - não pode ser analisada por falta de dados.
  - é verdadeira somente se  $MN = QR$ .
  - nunca é verdadeira.
  - é verdadeira somente se  $MN = 2QR$ .
8. (PUC-SP-80) Se  $r$  e  $s$  são retas reversas, então pode-se garantir que:
- todo plano que contém  $r$  também contém  $s$ .
  - existe um plano que contém  $r$  e é perpendicular a  $s$ .
  - existe um único plano que contém  $r$  e  $s$ .
  - existe um plano que contém  $r$  e é paralelo a  $s$ .
  - toda reta que encontra  $r$  encontra  $s$ .

9. (U.MACK-80) Considerando-se as afirmações abaixo, assinale a alternativa correta:
- I - Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.  
 II - Dadas duas retas reversas, sempre existe reta que se apóia em ambas.  
 III - Se um plano é perpendicular a dois planos secantes, então é perpendicular à interseção desses planos.
- a) Somente a afirmação I é verdadeira.  
 b) Somente a afirmação II é verdadeira.  
 c) São verdadeiras as afirmações II e III, apenas.  
 d) Todas as afirmações são verdadeiras.  
 e) Nenhuma afirmação é verdadeira.
10. (FUVEST-80) São dados cinco pontos não coplanares  $A, B, C, D, E$ . Sabe-se que  $ABCD$  é um retângulo,  $AE \perp AB$  e  $AE \perp AD$ . Pode-se concluir que são perpendiculares as retas:
- a) EA e EB      b) EC e CA      c) EB e BA      d) EA e AC      e) AC e BE
11. (PUC-SP-80) Assinale a afirmação verdadeira:
- a) Dois planos paralelos a uma reta são paralelos entre si.  
 b) Dois planos perpendiculares a uma reta são perpendiculares entre si.  
 c) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas entre si.  
 d) Duas retas paralelas a um plano são paralelas entre si.  
 e) Dois planos perpendiculares a um terceiro são perpendiculares entre si.
12. (PUC-SP-81) Dois planos  $\beta$  e  $\gamma$  se cortam na reta  $r$  e são perpendiculares a um plano  $\alpha$ . Então:
- a)  $\beta$  e  $\gamma$  são perpendiculares.      d) todo plano perpendicular a  $\alpha$  encontra  $r$ .  
 b)  $r$  é perpendicular a  $\alpha$ .      e) existe uma reta paralela a  $\alpha$  e a  $r$ .  
 c)  $r$  é paralela a  $\alpha$ .
13. (U.F.BA-81) Sendo  $\alpha$  e  $\beta$  dois planos e  $r_1$  e  $r_2$  duas retas, tais que  $\alpha \parallel \beta$ ,  $r_1 \perp \alpha$  e  $r_2 \parallel \beta$ , então  $r_1$  e  $r_2$  podem ser:
- a) paralelas a  $\alpha$ .      c) coincidentes.      e) ortogonais.  
 b) perpendiculares a  $\beta$ .      d) oblíquas.
14. (U.F.UBERLÂNDIA-82) Das alternativas abaixo
- I - Dois planos distintos perpendiculares a um terceiro são paralelos entre si.  
 II - Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um forma um ângulo reto com qualquer reta do outro.  
 III - Distância entre duas retas é a distância entre um ponto qualquer de uma e a outra.  
 IV - Se três retas são, duas a duas, reversas e não paralelas a um mesmo plano, então por qualquer ponto de uma passa reta que se apóia nas outras duas.
- pode-se afirmar que:
- a) todas as alternativas são verdadeiras.  
 b) todas as alternativas são falsas.  
 c) apenas a alternativa I é falsa.  
 d) apenas a alternativa I é verdadeira.  
 e) apenas as alternativas I, II e III são verdadeiras.
15. (FUVEST-82) Sejam  $r$  e  $s$  duas retas distintas. Podemos afirmar que sempre:
- a) existe uma reta perpendicular a  $r$  e a  $s$ .  
 b)  $r$  e  $s$  determinam um único plano.  
 c) existe um plano que contém  $s$  e não intercepta  $r$ .  
 d) existe uma reta que é paralela a  $r$  e a  $s$ .  
 e) existe um plano que contém  $r$  e um único ponto de  $s$ .

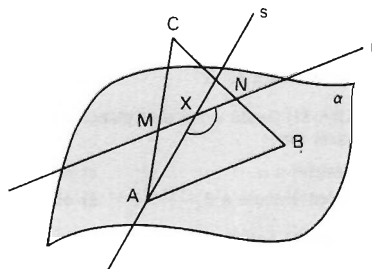
16. (U.MACK.-82) Considere as afirmações:

- I - Uma reta perpendicular a um plano é perpendicular a pelo menos uma reta do plano.
- II - Se uma reta é perpendicular a um plano, por ela passam infinitos planos perpendiculares ao plano considerado.
- III - Se duas retas quaisquer são paralelas a um plano, então elas são paralelas uma a outra.

Podemos afirmar que:

- a) todas as afirmações são corretas.
  - b) apenas a primeira afirmação é correta.
  - c) apenas a segunda afirmação é correta.
  - d) apenas a segunda e a terceira afirmações são corretas.
  - e) apenas a primeira e a segunda afirmações são corretas.
17. (PUC-SP-82) Um triângulo isósceles  $ABC$ , com  $AB = BC = 30$  e  $AC = 24$ , tem o lado  $AC$  contido em um plano  $\alpha$  e o vértice  $B$  a uma distância  $18$  de  $\alpha$ . A projeção ortogonal do triângulo  $ABC$  sobre o plano  $\alpha$  é um triângulo:
- a) retângulo.
  - b) obtusângulo.
  - c) equilátero.
  - d) isósceles, mas não equilátero.
  - e) semelhante ao triângulo  $ABC$ .

18. (F.C.M.STA.CASA-82) Na figura ao lado, tem-se o triângulo  $ABC$  tal que  $\overline{AB}$  está contido num plano  $\alpha$ ,  $C \notin \alpha$  e os ângulos de vértices  $B$  e  $C$  medem, respectivamente,  $70^\circ$  e  $60^\circ$ . Se  $r \parallel \alpha$ ,  $r \cap \overline{AC} = \{M\}$ ,  $r \cap \overline{BC} = \{N\}$ ,  $s$  contém a bissetriz do ângulo  $\widehat{CAB}$  e  $r \cap s = \{X\}$ , então a medida do ângulo  $\widehat{AXN}$ , assinalado, é:



- a)  $165^\circ$
  - b)  $155^\circ$
  - c)  $145^\circ$
  - d)  $130^\circ$
  - e)  $120^\circ$
19. (PUC-SP-83) Em relação ao plano  $\alpha$ , os pontos  $A$  e  $B$  estão no mesmo semi-espaco e os pontos  $A$  e  $C$  estão em semi-espacos opostos. Em relação ao plano  $\beta$ , os pontos  $A$  e  $B$  estão em semi-espacos opostos, bem como os pontos  $A$  e  $C$ . Pode-se concluir que o segmento  $BC$ :
- a) é paralelo a  $\alpha \cap \beta$ .
  - b) encontra  $\alpha$  e  $\beta$ .
  - c) encontra  $\alpha$ , mas não  $\beta$ .
  - d) encontra  $\beta$ , mas não  $\alpha$ .
  - e) não encontra  $\alpha$  nem  $\beta$ .
20. (F.SANTANA-83) Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois planos paralelos e seja  $r$  uma reta de  $\alpha$ . Assinale a sentença verdadeira:
- a) Toda reta de  $\beta$  é paralela a  $r$ .
  - b) Toda reta perpendicular a  $\beta$  é perpendicular a  $r$ .
  - c) Não existe em  $\beta$  uma reta paralela a  $r$ .
  - d) Se  $s$  é uma reta de  $\beta$ , não paralela a  $r$ , existe em  $\beta$  uma reta concorrente com  $s$  e paralela a  $r$ .
  - e) Se  $s$  é uma reta de  $\beta$ , não paralela a  $r$ , existe em  $\beta$  uma reta paralela a  $s$ , que é paralela a  $r$ .

21. (U.F.PE-83) Considere as seguintes sentenças:

- I - Se dois planos distintos têm um ponto comum, então terão também outro ponto comum, distinto do primeiro.
- II - Três pontos distintos determinam um único plano.
- III - A distância entre dois pontos de uma reta é um número real que depende da unidade da medida escolhida.

Assinale a alternativa correta:

- a) Apenas II é falsa.
- b) I e II são falsas.
- c) II e III são verdadeiras.
- d) I, II e III são falsas.
- e) Apenas I é verdadeira.

22. (U.F.PELOTAS-83) Assinale a afirmativa verdadeira:

- a) Por um ponto qualquer existe uma única reta perpendicular a um plano dado.
- b) Dadas duas retas reversas, qualquer plano que passa por uma encontra a outra.
- c) Se dois planos são paralelos, toda reta que tem um ponto comum com um deles, tem um ponto comum com o outro.

23. (FUVEST-83) Dados um plano  $\alpha$  e uma reta  $r$ , podemos afirmar que:

- a) existe um plano  $\beta$  que contém  $r$  e é perpendicular a  $\alpha$ .
- b) existe um único plano  $\beta$  que contém  $r$  e é perpendicular a  $\alpha$ .
- c) existe um plano  $\beta$  que contém  $r$  e é paralelo a  $\alpha$ .
- d) existe um único plano  $\beta$  que contém  $r$  e é paralelo a  $\alpha$ .
- e) qualquer plano  $\beta$  que contém  $r$  intercepta o plano  $\alpha$ .

24. (PUC-SP-83) Os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são paralelos. A reta  $r$  é perpendicular a  $\alpha$  e a reta  $s$  é perpendicular a  $\beta$ . Pode-se concluir que  $r$  e  $s$ :

- a) não têm ponto comum.
- b) são perpendiculares.
- c) são reversas.
- d) são ortogonais.
- e) são coplanares.

25. (U.F.GO-83) O lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de três pontos não colineares é:

- a) uma esfera.
- b) uma circunferência.
- c) um plano.
- d) uma reta.
- e) um ponto.

26. (U.F.SE-84) Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois planos paralelos e  $\gamma$  um plano oblíquo a eles. A interseção de  $\gamma$  com  $\alpha$  e  $\beta$  é constituída por:

- a) retas paralelas.
- b) retas ortogonais.
- c) um plano, paralelo a  $\alpha$  e  $\beta$ .
- d) retas reversas, não ortogonais.
- e) retas concorrentes, não perpendiculares.

27. (VUNESP-84) Seja  $\alpha$  um plano e  $b$  uma reta não perpendicular a  $\alpha$ . Então:

- a) não existe plano passando por  $b$  perpendicular a  $\alpha$ .
- b) existem, no mínimo, dois planos passando por  $b$  e perpendiculares a  $\alpha$ .
- c) existe um e um só plano passando por  $b$  e perpendicular a  $\alpha$ .
- d) existe uma infinidade de planos passando por  $b$  e perpendiculares a  $\alpha$ .
- e) todo plano passando por  $b$  não é perpendicular a  $\alpha$ .

28. (U.F.PE-84) Assinale a alternativa correta, considerando  $r$ ,  $s$  e  $t$  como sendo retas no espaço.
- $r$  e  $s$  são ambas perpendiculares a  $t$ , então  $r$  e  $s$  são paralelas.
  - Se  $r$  é perpendicular a  $s$  e  $s$  é perpendicular a  $t$ , então  $r$  é perpendicular a  $t$ .
  - Se  $r$  é perpendicular a  $s$  e  $s$  é perpendicular a  $t$ , então  $r$  e  $t$  são paralelas.
  - Se  $r$  é perpendicular a  $s$  e  $\alpha$  é um plano que contém  $s$ , então  $r$  é perpendicular a  $\alpha$ .
  - Se  $r$  e  $t$  são perpendiculares a  $s$  no mesmo ponto, então existe um plano que contém  $r$  e  $t$  e é perpendicular a  $s$ .
29. (CESESP-85) Uma e só uma das alternativas abaixo é falsa. Assinale-a.
- Por um ponto  $P$  de uma reta  $r$  no espaço passam infinitas retas perpendiculares a  $r$ .
  - Se no espaço duas retas se interceptam, elas determinam um único plano que as contém.
  - Dois retas no espaço determinam um plano se, e somente se, elas são concorrentes ou paralelas.
  - Se três retas não coplanares têm um único ponto comum, elas determinam três planos.
  - Cinco pontos não coplanares determinam, no máximo, três planos.
30. (PUC-SP-85) Qual das afirmações abaixo é verdadeira?
- Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.
  - Se duas retas concorrentes de um plano são, respectivamente, paralelas a duas retas de outro plano, então esses planos são paralelos.
  - Se uma reta é paralela a um plano, então essa reta é paralela a todas as retas do plano.

31. (VUNESP-85) Das afirmações abaixo:

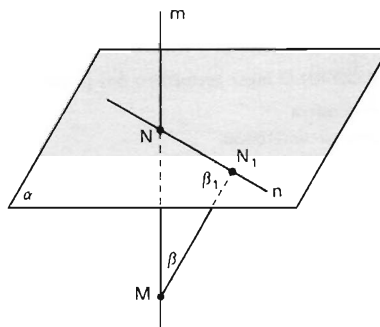
- Dois retas perpendiculares a um mesmo plano são coplanares.
- Dois retas paralelas a um mesmo plano são paralelas entre si.
- Se um plano intercepta dois outros planos em retas paralelas, então os dois planos são paralelos.

temos que:

- apenas uma é falsa.
- apenas uma é verdadeira.
- apenas duas são verdadeiras.
- todas são falsas.
- todas são verdadeiras.

32. (U.F.PR-85) Analisando a figura, na qual a reta  $m$  é perpendicular ao plano  $\alpha$  e  $n$  é uma reta deste mesmo plano, pode-se concluir corretamente que:

- $m$  é perpendicular a  $n$ .
- $m$  e  $n$  determinam um plano perpendicular a  $\alpha$ .
- $m$  pertence a  $\alpha$ .
- a soma dos ângulos  $\beta$  e  $\beta_1$  é igual a  $90^\circ$ .
- o triângulo  $MNN_1$  é equilátero.

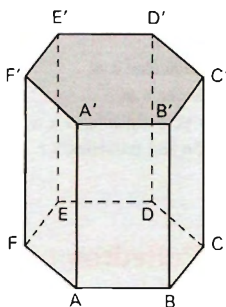


33. (PUC-SP-85) Um ângulo  $\alpha$  é reto. Seja  $\pi$  um plano. Quantas das quatro seguintes afirmações são corretas?

- A projeção ortogonal de  $\alpha$  sobre  $\pi$  é um ângulo reto.
- Se um lado de  $\alpha$  é paralelo a  $\pi$ , então a projeção ortogonal de  $\alpha$  sobre  $\pi$  é um ângulo reto.
- A projeção ortogonal de  $\alpha$  sobre  $\pi$  pode ser ângulo raso.
- A projeção ortogonal de  $\alpha$  sobre  $\pi$  não pode ser ângulo nulo.

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4

34. (CEESP-86) Assinale, dentre as proposições abaixo, aquela que é falsa.
- Se uma reta é perpendicular a dois planos, estes são paralelos entre si.
  - Se dois planos são paralelos, qualquer reta contida em um deles é paralela ao outro.
  - Se dois planos são paralelos, qualquer plano concorrente e não coincidente com um deles é concorrente com o outro.
  - Dado um plano  $\pi$  e uma reta  $r$  não contida nele tal que  $r$  é perpendicular a outra reta que, por sua vez, é perpendicular a  $\pi$ , então  $r$  é paralela a  $\pi$ .
  - Alguma das proposições  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ou  $D$  é falsa.
35. (U.F.R.PE-88) Considere um prisma regular de base hexagonal.



Assinale as proposições verdadeiras e as proposições falsas nos itens abaixo:

- Os segmentos  $\overline{AF}$  e  $\overline{A'F'}$  determinam retas paralelas.
  - O plano da face  $ABB'A'$  é perpendicular ao plano da base.
  - Os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{E'D'}$  não são coplanares.
  - Os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{AF}$  determinam um ângulo de  $50^\circ$ .
  - Os planos das faces  $AA'F'F$  e  $CC'D'D$  são paralelos.
36. (COVEST-89) Assinale as proposições verdadeiras e as proposições falsas, dentre os itens abaixo:
- Se duas retas distintas, no espaço, não são paralelas, então elas são concorrentes.
  - Se dois planos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela a qualquer reta do outro.
  - Se dois planos são secantes, então uma reta de um deles pode não interceptar o outro plano.
  - Se dois planos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela ao outro plano.
  - Se dois planos são perpendiculares, toda reta de um deles é perpendicular ao outro plano.
37. (FATEC-90) Se considerarmos as retas suportes das arestas de um cubo, então o número de pares de retas reversas que podemos formar é:
- 8
  - 16
  - 24
  - 32
  - 40
38. (FUVEST-90) Os segmentos  $\overline{VA}$ ,  $\overline{VB}$  e  $\overline{VC}$  são arestas de um cubo. Um plano  $\alpha$ , paralelo ao plano  $ABC$ , divide esse cubo em duas partes iguais. A interseção do plano  $\alpha$  com o cubo é um:
- triângulo.
  - quadrado.
  - retângulo.
  - pentágono.
  - hexágono.





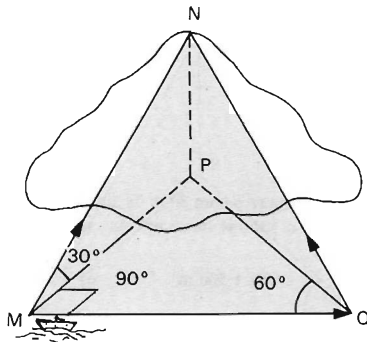
(PUC-SP-83) São dados três planos, dois a dois perpendiculares. Deseja-se construir uma esfera, de raio dado  $R$ , tangente aos três planos. Quantas soluções tem o problema?

- a) uma                      b) três                      c) quatro                      d) oito                      e) depende de  $R$

46. (CESGRANRIO-84) Um poliedro convexo é formado por 80 faces triangulares e 12 pentagonais. O número de vértices do poliedro é:

- a) 80                      b) 60                      c) 50                      d) 48                      e) 36

47. (CESESP-86) De um navio no ponto  $M$  (ver figura abaixo), pretende-se medir a altura  $NP$  de uma ilha. O ângulo  $NMP$  mede exatamente  $30^\circ$ . Deslocando-se  $1 \text{ km}$  numa direção  $MQ$ , perpendicular a  $MP$ , a nova visada do topo da ilha forma  $60^\circ$  com  $QM$ . Qual a medida, em quilômetros, mais aproximada da altura  $NP$ ?



- a) 1                      b)  $\sqrt{3}$                       c)  $\sqrt{3}/2$                       d)  $\sqrt{3}/3$                       e)  $\sqrt{2}$

48. (ESCOLA NÁVAL-88) Um poliedro convexo é formado por 10 faces triangulares e 10 faces pentagonais. O número de diagonais desse poliedro é:

- a) 60                      b) 81                      c) 100                      d) 121                      e) 141

49. (CESGRANRIO-89) Se um poliedro regular tem exatamente três diagonais, então o seu número de arestas é:

- a) 12                      b) 10                      c) 8                      d) 6                      e) 4

## Prisma

50. (PUC-SP-81) Quantas diagonais possui um prisma pentagonal?

- a) 5                      b) 10                      c) 15                      d) 18                      e) 24

51. (U.C.MG-81) O volume, em litros, de um cubo de  $5 \text{ cm}$  de aresta é de:

- a) 0,0125                      b) 0,1250                      c) 1,2500                      d) 12,500                      e) 125,00

52. (U.F.RS-81) Uma caixa tem  $1 \text{ m}$  de comprimento,  $2 \text{ m}$  de largura e  $3 \text{ m}$  de altura. Uma segunda caixa de mesmo volume tem comprimento  $x$  metros maior do que o da anterior, largura  $x$  metros maior do que a da anterior e altura  $x$  metros menor do que a da anterior. O valor de  $x$  é:

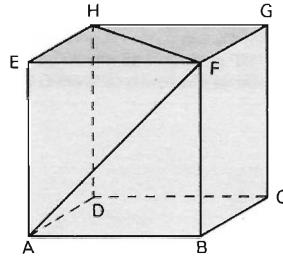
- a)  $\sqrt{2}$                       b)  $\sqrt{3}$                       c)  $\sqrt{5}$                       d)  $\sqrt{6}$                       e)  $\sqrt{7}$

53. (U.F.ES-82) Uma formiga mora na superfície de um cubo de aresta  $a$ . O menor caminho que ela deve seguir para ir de um vértice ao vértice oposto tem comprimento:

a)  $a\sqrt{2}$       b)  $a\sqrt{3}$       c)  $3a$       d)  $(1 + \sqrt{2})a$       e)  $a\sqrt{5}$

54. (CESGRANRIO-82) O ângulo  $\widehat{AFH}$  formado pelas diagonais  $AF$  e  $FH$  de faces de um cubo vale:

a)  $30^\circ$   
 b)  $45^\circ$   
 c)  $60^\circ$   
 d)  $90^\circ$   
 e)  $108^\circ$



55. (U.F.UBERLÂNDIA-82) Dá-se um prisma reto com  $20\text{ m}$  de altura, sendo a base um paralelogramo cujas dimensões são  $8\text{ m}$  e  $10\sqrt{2}\text{ m}$ . Qual é o volume desse prisma, sabendo-se que um dos ângulos da base mede  $135^\circ$ ?

a)  $1\ 800\text{ m}^3$       b)  $1\ 600\text{ m}^3$       c)  $1\ 500\text{ m}^3$       d)  $1\ 650\text{ m}^3$       e)  $1\ 750\text{ m}^3$

56. (F.C.M.STA.CASA-82) Dispondo-se de uma folha de cartolina, medindo  $50\text{ cm}$  de comprimento por  $30\text{ cm}$  de largura, pode-se construir uma caixa aberta, cortando-se um quadrado de  $8\text{ cm}$  de lado em cada canto da folha. O volume dessa caixa, em  $\text{cm}^3$ , será:

a) 1 244      b) 1 828      c) 2 324      d) 3 808      e) 12 000

57. (U.F.RS-83) Se  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são os centros das faces laterais de um cubo de volume 8, então a área do polígono cujos vértices são  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  é:

a) 2      b)  $\sqrt{2}$       c) 4      d)  $2\sqrt{2}$       e)  $8\sqrt{2}$

58. (U.F.GO-83) A aresta, a diagonal e o volume de um cubo estão, nesta ordem, em progressão geométrica. A área total deste cubo é:

a)  $6\sqrt{3}$       d) 12  
 b)  $6(2\sqrt{3} - 1)$       e) 18  
 c) 3

59. (U.F.PELOTAS-83) As dimensões de um paralelepípedo retângulo são inversamente proporcionais aos números 12, 6 e 4. Se sua área total é  $88\text{ cm}^2$ , o seu volume, em  $\text{cm}^3$ , é:

a) 288      b) 144      c) 128      d) 64      e) 48

60. (U.E.BA-84) As arestas de um paralelepípedo retângulo medem  $3\text{ cm}$ ,  $4\text{ cm}$  e  $5\text{ cm}$ . A medida da diagonal desse paralelepípedo, em  $\text{cm}$ , é:

a)  $5\sqrt{2}$       b)  $8\sqrt{2}$       c)  $10\sqrt{2}$       d)  $12\sqrt{2}$       e)  $15\sqrt{2}$

61. (U.F.PA-84) Qual a área total de um paralelepípedo reto cujas dimensões são 2, 3 e  $4\text{ cm}$ ?

a)  $24\text{ cm}^2$       b)  $26\text{ cm}^2$       c)  $30\text{ cm}^2$       d)  $40\text{ cm}^2$       e)  $52\text{ cm}^2$

62. (U.F.RN-84) Considere um paralelepípedo com  $12\text{ m}$  de comprimento,  $4\text{ m}$  de largura e  $3\text{ m}$  de altura. Se o seu volume for aumentado de  $624\text{ m}^3$ , então sua altura aumentará de:

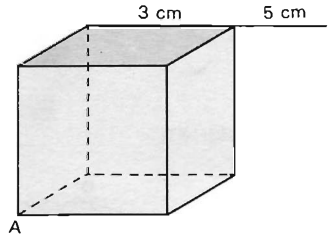
a) 7 m      b) 9 m      c) 11 m      d) 13 m      e) 12 m

63. (U.C.MG-85) A medida do cosseno do ângulo formado por uma diagonal de um cubo e cada uma das arestas concorrentes em um mesmo vértice é igual a:

a)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$       b)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$       c)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$       d)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       e)  $\frac{3}{\sqrt{2}}$

64. (CESGRANRIO-85) Na figura, cada aresta do cubo mede 3 cm. Prolongando-se uma delas de 5 cm, obtemos o ponto M. A distância, em centímetros, de M ao vértice A é:

a)  $2\sqrt{21}$   
 b)  $\sqrt{82}$   
 c)  $8\sqrt{3}$   
 d)  $8\sqrt{2}$   
 e) 9



65. (CESGRANRIO-85) Numa cozinha de 3 m de comprimento, 2 m de largura e de 2,80 m de altura, as portas e janelas ocupam uma área de 4 m<sup>2</sup>. Para azulejar as quatro paredes, o pedreiro aconselha a compra de 10% a mais da metragem a ladrilhar. A metragem de ladrilhos a comprar é:

a) 24,40 m<sup>2</sup>      b) 24,80 m<sup>2</sup>      c) 25,50 m<sup>2</sup>      d) 26,40 m<sup>2</sup>      e) 26,80 m<sup>2</sup>

66. (VUNESP-85) As faces de um paralelepípedo retangular têm por área 6 cm<sup>2</sup>, 9 cm<sup>2</sup> e 24 cm<sup>2</sup>. O volume deste paralelepípedo é:

a) 1 296 cm<sup>3</sup>      b) 48 cm<sup>3</sup>      c) 39 cm<sup>3</sup>      d) 36 cm<sup>3</sup>      e)  $6\sqrt{6}$  cm<sup>3</sup>

67. (U.F.BA-85) Um prisma hexagonal regular tem para altura a diagonal de um cubo de aresta a. Se o volume do cubo é igual ao do prisma, a aresta da base do prisma mede:

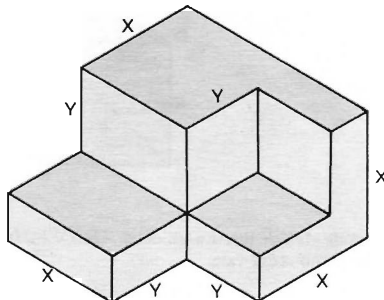
a)  $a\sqrt{3}$       b)  $a\sqrt{2}$       c)  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$       d)  $\frac{a\sqrt{2}}{3}$       e)  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

68. (PUC-SP-85) Se a área da base de um prisma diminui de 10% e a altura aumenta de 20%, o seu volume:

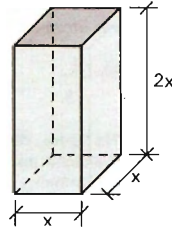
a) aumenta de 8%.      d) diminui de 8%.  
 b) aumenta de 15%.      e) não se altera.  
 c) aumenta de 108%.

69. (CESESP-86) Assinale a única alternativa cuja expressão algébrica correspondente é o volume do sólido da figura abaixo.

a)  $(x + y)(x - y)x$   
 b)  $x^3 + 2x^2y + xy^2$   
 c)  $x^2 - xy + y^2$   
 d)  $x^3 + x^2y - xy^3$   
 e)  $x^3 + 2x^2 - xy^2 - y^3$



70. (FATEC-87) Na figura ao lado, tem-se um prisma reto cuja diagonal principal mede  $3a\sqrt{2}$ . A área total desse prisma é:
- $30a^2$
  - $24a^2$
  - $18a^2$
  - $12a^2$
  - $6a^2$



71. (CESGRANRIO-87)

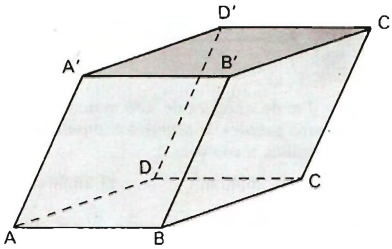


Fig. I

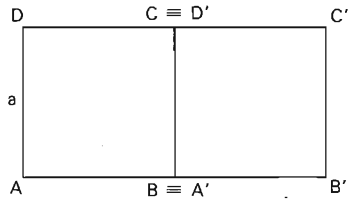
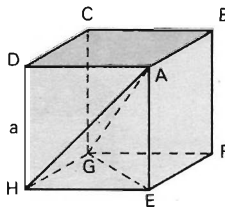


Fig. II

Seja  $ABCD A'B'C'D'$  um prisma oblíquo de bases quadradas, mostrado em perspectiva na figura I. Na figura II o prisma é visto de cima sobre a base  $ABCD$ . O lado da base mede  $a$  e cada aresta lateral faz ângulo de  $45^\circ$  com os planos das bases. Então o perímetro da secção reta do prisma é:

- $a(2 + \sqrt{2})$
  - $2a(1 + \sqrt{2})$
  - $2a\sqrt{2}$
  - $3a$
  - $4a$
72. (FUVEST-87) Qual é a distância entre os centros de duas faces adjacentes de um cubo de aresta 4?
- 2
  - $2\sqrt{2}$
  - 4
  - $4\sqrt{2}$
  - 8
73. (CESGRANRIO-87)

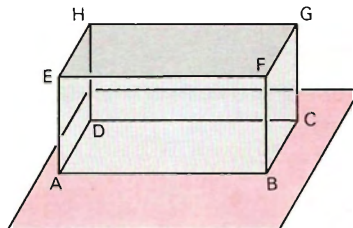


Considere a pirâmide  $AEGH$  inscrita no cubo  $ABCDEFGH$  de aresta  $a$ , como se vê na figura. Então a distância de  $H$  ao plano  $AEG$  vale:

- $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
- $\frac{2a}{3}$
- $\frac{a\sqrt{2}}{2}$
- $\frac{a\sqrt{3}}{3}$
- $\frac{a}{2}$



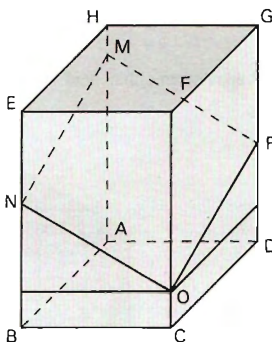
79. (U.F.R.PE-90) Uma armação de arame na forma de um prisma reto de base retangular está apoiada no assoalho horizontal. Uma lâmpada situada acima do objeto projeta sua sombra no assoalho. Independentemente da posição da lâmpada, sempre acima do objeto, que afirmações são verdadeiras e que afirmações são falsas?



- A sombra do retângulo  $EFGH$  é um retângulo.
- A sombra do retângulo  $BCGF$  é um retângulo.
- A sombra do retângulo  $EFGH$  pode coincidir com  $ABCD$ .
- A sombra do retângulo  $ABFE$  é um trapézio.
- Os comprimentos das arestas  $\overline{EF}$  e  $\overline{FG}$  são proporcionais aos comprimentos de suas sombras.

80. (U.F.VIÇOSA-90) A figura abaixo é um paralelepípedo de base quadrada e de vértices  $A, B, C, D, E, F, G$  e  $H$ . Sabe-se que um plano intercepta o paralelepípedo, como na figura. Dessa interseção resulta o quadrilátero  $MNOP$ , cujos lados  $ON$  e  $OP$  formam ângulos de  $30^\circ$  com a face  $ABCD$ . Se a área da base do paralelepípedo vale 3, então o perímetro de  $MNOP$  vale:

- 8
- 4
- 6
- 10
- 12



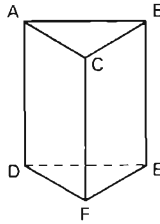
81. (ITA-90) Considere um prisma triangular regular cuja aresta da base mede  $x$  cm. Sua altura é igual ao menor lado de um triângulo  $ABC$  inscrito num círculo de raio  $x$  cm. Sabendo-se que o triângulo  $ABC$  é semelhante ao triângulo de lados 3 cm, 4 cm e 5 cm, o volume do prisma em  $\text{cm}^3$  é:

- $\frac{\sqrt{2}}{3} x^3$
- $\frac{2\sqrt{2}}{5} x^3$
- $\frac{3\sqrt{3}}{10} x^3$
- $\frac{\sqrt{3}}{10} x^3$
- n.d.a.

82. (CESGRANRIO-91) Se a diagonal de uma face de um cubo mede  $5\sqrt{2}$ , então o volume desse cubo é:

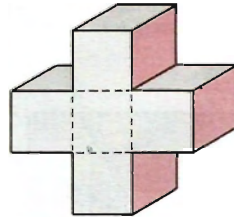
- 600,  $\sqrt{3}$
- 625
- 225
- 125
- 100,  $\sqrt{3}$

83. (U.C.SALVADOR-91) No prisma reto de base triangular, da figura, todas as arestas medem  $2\text{ m}$ .



O volume desse prisma, em metros cúbicos, é:

- a)  $2\sqrt{2}$       b)  $2\sqrt{3}$       c) 4      d)  $4\sqrt{2}$       e)  $4\sqrt{3}$
84. (U.F.CE-91) Os cinco cubos idênticos e justapostos formam uma cruz, como mostra a figura. Se a área total da cruz é  $198\text{ cm}^2$ , então o volume, em  $\text{cm}^3$ , de cada cubo é igual a:

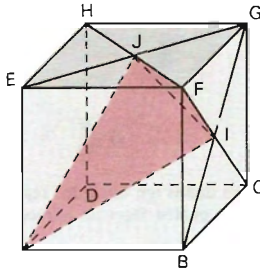


- a)  $2\sqrt{2}$       c) 8      e) 64  
b) 3,3      d) 27

85. (FUVEST-FGV-91) Na figura a seguir  $I$  e  $J$  são os centros das faces  $BCGF$  e  $EFGH$  do cubo  $ABCDEFGH$  de aresta  $a$ .

Os comprimentos dos segmentos  $\overline{AI}$  e  $\overline{AJ}$  são respectivamente:

- a)  $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ ,  $a\sqrt{2}$   
b)  $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ ,  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$   
c)  $a\sqrt{6}$ ,  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$   
d)  $a\sqrt{6}$ ,  $a\sqrt{2}$   
e)  $2a$ ,  $\frac{a}{2}$



86. (U.F.CE-92) As dimensões da base de um paralelepípedo retângulo  $P$  são  $3\text{ m}$  e  $5\text{ m}$ , respectivamente, e seu volume é  $60\text{ m}^3$ . O comprimento, em metros, do maior segmento de reta que une dois pontos de  $P$  é igual a:

- a)  $2\sqrt{5}$       b)  $3\sqrt{5}$       c)  $4\sqrt{5}$       d)  $5\sqrt{2}$       e)  $6\sqrt{2}$

87. (U.F.MG-92) Um depósito em forma de paralelepípedo retângulo (em as seguintes dimensões internas:  $14\text{ m}$ ,  $22\text{ m}$  e  $6\text{ m}$ ). Pretende-se encher totalmente esse depósito com caixas cúbicas de mesmo volume e de dimensões inteiras.

O número mínimo de caixas desse tipo que enchem totalmente o depósito é:

- a) 231      b) 308      c) 616      d) 1 078      e) 1 848

## Pirâmide

88. (PUC-RS-80) Se “ $\ell$ ” é a medida da aresta de um tetraedro regular, então sua altura mede:

- a)  $\frac{\ell\sqrt{2}}{3}$       b)  $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$       c)  $\frac{\ell\sqrt{3}}{4}$       d)  $\frac{\ell\sqrt{6}}{3}$       e)  $\frac{\ell\sqrt{6}}{9}$

89. (U.F.PR-80) Calculando a distância de um ponto do espaço ao plano de um triângulo equilátero de 6 unidades de comprimento de lado, sabendo que o ponto equidista 4 unidades dos vértices do triângulo, obtêm-se:

- a) 6 unidades.  
b) 5 unidades.  
c) 4 unidades.  
d) 3 unidades.  
e) 2 unidades.

90. (CESGRANRIO-80) Para fazer o telhado de uma casa de cartolina, um quadrado de centro O e de lado  $2\ell$  é recortado, como mostra a figura I. Os lados  $AB = CD = EF = GH$  medem  $\ell\sqrt{3}$ . Montado o telhado (figura II), sua altura  $h$  é:

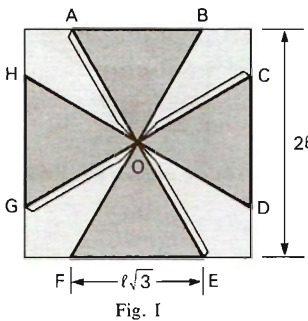


Fig. I

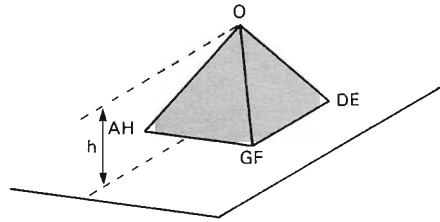


Fig. II

- a)  $\frac{\ell}{2}$       b)  $\frac{2\ell}{5}$       c)  $\frac{3\ell}{10}$       d)  $(2 - \sqrt{3})\ell$       e)  $\frac{\ell\sqrt{3}}{5}$

91. (F.C.M.STA.CASA-80) Sejam dados um tetraedro regular e um ponto interno qualquer. Sejam  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $t$  as distâncias desse ponto às quatro faces do tetraedro. Podemos então afirmar que:

- a) seu volume  $V = \frac{1}{3} S (x + y + z + t)^2$  (com  $S$ : área de uma face).  
b) sua altura  $h = x + y + z + t$ .  
c) sua área total  $A = h^2 (x + y + z + t)$ .  
d) a área de uma face  $S = \frac{1}{3} (x + y) (z + t) + x$ .  
e) n.d.a.

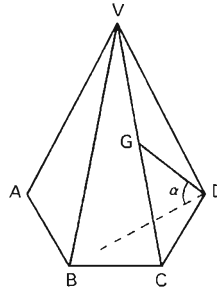
92. (PUC-SP-80) Os triângulos equiláteros  $ABC$  e  $DEF$  possuem lados iguais a 2 e estão em planos paralelos, cuja distância é 2. As retas  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$  são paralelas entre si. O volume do tetraedro  $ACDE$  é:

- a)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$       b)  $\frac{\sqrt{2}}{6}$       c)  $\frac{6}{\sqrt{3}}$       d)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$       e)  $\frac{\sqrt{3}}{8}$



93. (CESGRANRIO-80) Considere uma pirâmide hexagonal regular de altura  $h$  e lado da base  $l$ , como mostrada na figura. Traça-se o segmento  $GD$  ligando o vértice  $D$  ao ponto  $G$  que divide a aresta  $VC$  ao meio. Se  $\alpha$  é o ângulo agudo formado por  $GD$  e sua projeção na base da pirâmide, então  $\operatorname{tg} \alpha$  é:

- a)  $\frac{h\sqrt{3}}{3l}$                       d)  $\frac{h\sqrt{3}}{2l}$   
 b)  $\frac{h}{2l}$                               e)  $\frac{h\sqrt{3}}{l}$   
 c)  $\frac{h\sqrt{2}}{l}$

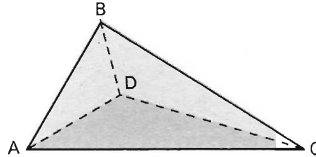


94. (F.C.M.STA.CASA-81) No tetraedro representado na figura abaixo, têm-se  $\overline{AD} \perp \overline{BD}$ ;  $\overline{AD} \perp \overline{DC}$ ;  $\sphericalangle (B\hat{A}D) \sphericalangle (C\hat{A}D)$ . Então, pode-se concluir que:

- a)  $BD = DC$   
 b)  $AD = DC$   
 c)  $AB < BC$   
 d)  $AC < BD$   
 e)  $AD < DB$

95. (U.F.RS-81) Uma barraca piramidal é sustentada por 6 hastas metálicas de 4 m de comprimento, cujas extremidades são o vértice da pirâmide e os 6 vértices da base respectivamente. A base é um polígono horizontal, inscrivível, cujos lados têm todos o mesmo comprimento 2,4 m. A altura da barraca, em metros, é:

- a) 2,2  
 b) 2,5  
 c) 2,7  
 d) 3,0  
 e) 3,2



96. (U.F.ES-82) Considere um cubo de aresta igual a 1 cm. Sejam  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  duas faces opostas desse cubo. Podemos obter uma pirâmide tomando o quadrado  $ABCD$  como base e  $A'$  como vértice. A área lateral dessa pirâmide mede:

- a)  $(1 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2$                       d)  $2(2 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2$   
 b)  $2(1 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2$                       e)  $(2 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2$   
 c)  $(3 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2$

97. (ITA-83) Consideremos uma pirâmide regular cuja base quadrada tem área que mede  $64 \text{ cm}^2$ . Numa seção paralela à base que dista 30 mm desta, inscreve-se um círculo. Se a área deste círculo mede  $4\pi \text{ cm}^2$ , então a altura desta pirâmide mede:

- a) 1 cm                      b) 2 cm                      c) 4 cm                      d) 6 cm                      e) 60 cm

98. (U.F.PA-84) O volume de uma pirâmide regular quadrangular cujas faces laterais são triângulos equiláteros de lado 4 cm vale:

- a)  $\frac{16\sqrt{2}}{3}$                       b)  $\frac{32\sqrt{2}}{3}$                       c)  $16\sqrt{2}$                       d)  $\frac{20\sqrt{2}}{3}$                       e)  $32\sqrt{2}$

99. (U.F.SE-84) A base de uma pirâmide regular é um triângulo equilátero cujo lado mede 8 cm. Se a altura dessa pirâmide mede  $5\sqrt{3} \text{ cm}$ , o seu volume, em  $\text{cm}^3$ , é:

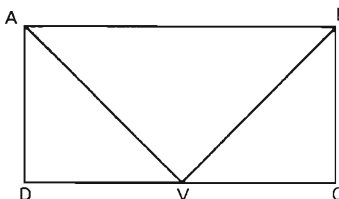
- a)  $18\sqrt{3}$                       b) 36                      c)  $36\sqrt{3}$                       d) 72                      e) 80

100. (CESGRANRIO-84) Em um tetraedro  $OABC$ , os ângulos entre as arestas que concorrem em  $O$  são todos iguais a  $90^\circ$ . Se  $OA = 3$ ,  $OB = 5$  e  $OC = 12$ , o comprimento da maior aresta do tetraedro é:

- a) 20                      b) 15                      c) 13                      d)  $\frac{25}{2}$                       e) 12

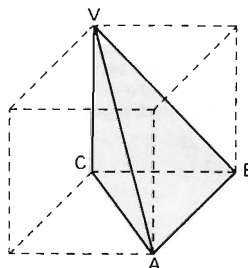
101. (CESGRANRIO-84) A figura mostra a vista de cima de uma pirâmide  $VABCD$  de base retangular  $ABCD$ . A projeção ortogonal do vértice  $V$ , sobre o plano da base, divide a aresta  $CD$  ao meio. Se  $AB = 10$ ,  $BC = 5$  e a altura da pirâmide é 5, então o comprimento da aresta  $VB$  é:

- a)  $\frac{20}{3}$                       d)  $5\sqrt{2}$   
 b)  $\frac{15}{2}$                       e)  $5\sqrt{3}$   
 c)  $\frac{5\sqrt{5}}{2}$



102. (CESGRANRIO-84) Em um cubo de aresta  $\sqrt[3]{6}$ , considera-se o tetraedro  $VABC$ , como indicado na figura. O volume do tetraedro é:

- a) 2                      d)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$   
 b)  $\sqrt{2}$                       e) 1  
 c)  $\sqrt[3]{3}$



103. (VUNESP-84) Seja  $V$  o volume do cubo de aresta  $a$  e  $W$  o volume do tetraedro regular de aresta  $a$ . Então  $V = kW$ , onde:

- a)  $5 < k < 6$                       b)  $6 < k < 7$                       c)  $7 < k < 8$                       d)  $8 < k < 9$                       e)  $9 < k < 10$

104. (U.F.PA-85) O perímetro da base de uma pirâmide hexagonal regular é  $24\text{ m}$ ; e a altura  $6\text{ m}$ . O volume dessa pirâmide mede:

- a)  $12\sqrt{3}\text{ m}^3$                       b)  $26\sqrt{3}\text{ m}^3$                       c)  $39\sqrt{3}\text{ m}^3$                       d)  $48\sqrt{3}\text{ m}^3$                       e)  $60\sqrt{3}\text{ m}^3$

105. (U.F.PA-85) Uma pirâmide quadrangular regular tem todas as arestas iguais. Se a diagonal da base mede  $3\text{ cm}$ , então o volume mede, em unidades cúbicas:

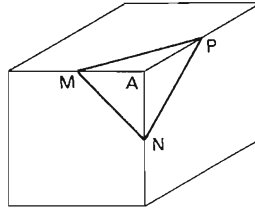
- a)  $\frac{27}{8}$                       b)  $\frac{27}{4}$                       c)  $\frac{27\sqrt{3}}{2}$                       d)  $\frac{9\sqrt{3}}{2}$                       e)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

106. (CEESP-85) Assinale, dentre as alternativas abaixo, a única que completa corretamente a sentença. "Unindo-se, dois a dois, os pontos médios das arestas contíguas de um tetraedro regular obtém-se..."

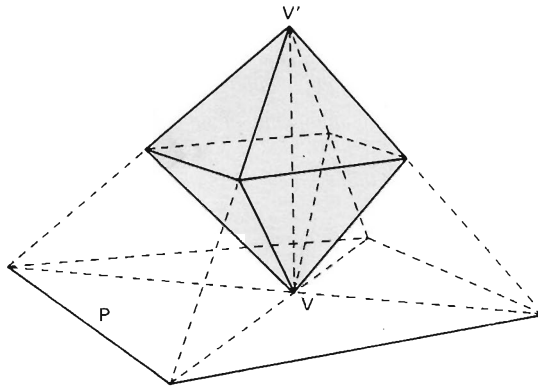
- a) ainda um tetraedro regular."  
 b) um hexaedro regular."  
 c) um octaedro regular."  
 d) um icosaedro regular."  
 e) um dodecaedro regular."

107. (VUNESP-85) Em cada um dos vértices de um cubo de madeira se recorta uma pirâmide  $AMNP$ , onde  $M$ ,  $N$  e  $P$  são os pontos médios das arestas, como se mostra na figura. Se  $V$  é o volume do cubo, o volume do poliedro que resta ao retirar as 8 pirâmides é igual a:

- a)  $\frac{1}{2} V$                       d)  $\frac{5}{6} V$   
 b)  $\frac{3}{4} V$                       e)  $\frac{3}{8} V$   
 c)  $\frac{2}{3} V$



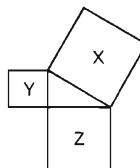
108. (CEESP-85) Considere um octaedro regular, cuja aresta mede  $6\text{ cm}$  e um de seus vértices  $V$  repousa sobre um plano  $P$  perpendicular ao eixo que contém  $V$  (ver figura). Prolongando-se as quatro arestas que partem do outro vértice  $V'$ , que está na perpendicular a  $P$  em  $V'$ , até interceptar o plano  $P$ , forma-se uma pirâmide regular de base quadrangular.



Assinale, então, dentre as alternativas abaixo, a única que corresponde à área total dessa pirâmide assim construída.

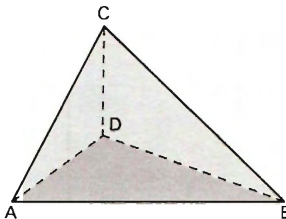
- a)  $9\sqrt{3}\text{ cm}^2$                       d)  $144\sqrt{3}\text{ cm}^2$   
 b)  $36\sqrt{3}\text{ cm}^2$                       e)  $108\sqrt{3}\text{ cm}^2$   
 c)  $144(\sqrt{3} + 1)\text{ cm}^2$
109. (CEESP-86) Três buracos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , abertos em um terreno plano, têm suas bocas em forma de quadrado, na disposição da figura. A área do quadrado  $Z$  é o dobro da área do quadrado  $Y$ . Os buracos  $Y$  e  $Z$  têm forma de prisma e  $X$  tem forma de pirâmide. A profundidade é a mesma para os três buracos. (Ver figura.) Assinale a alternativa que define a relação verdadeira entre os volumes de  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ .

- a)  $V_x = V_y + V_z$   
 b)  $V_y = V_x + V_z$   
 c)  $V_x = V_z$   
 d)  $V_x + V_y = V_z$   
 e)  $V_y = V_z$



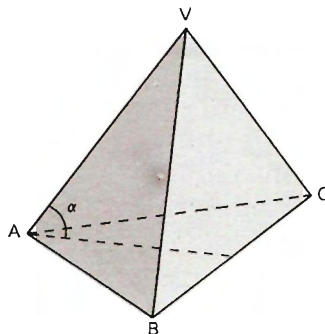
110. (U.F.MG-87) Sabe-se que, no tetraedro da figura,  $AB = 4\text{ m}$ ,  $BD = 5\text{ m}$ ,  $AD = 3\text{ m}$  e  $\widehat{DAC} = 60^\circ$ . Se  $CD$  é perpendicular ao plano de  $ABD$ , então o volume do tetraedro, em  $\text{m}^3$ , é:

- a)  $6\sqrt{3}$   
 b)  $3\sqrt{3}$   
 c)  $2\sqrt{3}$   
 d)  $18\sqrt{3}$   
 e)  $4\sqrt{3}$



111. (CESGRANRIO-87) Seja  $VABC$  um tetraedro regular. O cosseno do ângulo  $\alpha$  que a aresta  $VA$  faz com o plano  $ABC$  é:

- a)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$   
 b)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 c)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 d)  $\frac{1}{2}$   
 e)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$



112. (ESCOLA NAVAL-88) Numa pirâmide triangular  $V-ABC$ , a base  $ABC$  é um triângulo equilátero e as arestas  $VA$ ,  $VB$ ,  $VC$  formam um triedro tri-retângulo. A tangente do ângulo diedro formado por uma face lateral com a base é igual a:

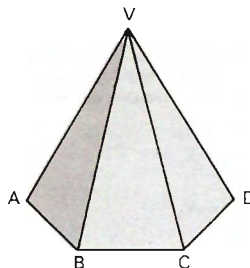
- a)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$   
 b)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 c) 1  
 d)  $\sqrt{2}$   
 e)  $\sqrt{3}$

113. (FUVEST-88) Qual a altura de uma pirâmide quadrangular que tem as oito arestas iguais a  $\sqrt{2}$ ?

- a)  $\sqrt{1}$   
 b)  $\sqrt{1,5}$   
 c)  $\sqrt{2}$   
 d)  $\sqrt{2,5}$   
 e)  $\sqrt{3}$

114. (CESGRANRIO-88) Numa pirâmide  $VABCDEF$  regular hexagonal, uma aresta lateral é o dobro de uma aresta da base (veja figura). O ângulo  $A\widehat{V}D$ , formado por duas arestas laterais opostas, mede:

- a)  $30^\circ$   
 b)  $45^\circ$   
 c)  $60^\circ$   
 d)  $75^\circ$   
 e)  $90^\circ$





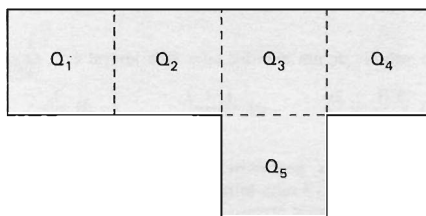
- 120.** (U.E.CE-92) O perímetro da base de uma pirâmide hexagonal regular é  $6\text{ cm}$  e sua altura  $8\text{ cm}$ . O volume dessa pirâmide, em  $\text{cm}^3$ , é:
- a)  $4\sqrt{3}$                       b)  $5\sqrt{3}$                       c)  $6\sqrt{3}$                       d)  $7\sqrt{3}$
- 121.** (U.E.RJ-92)  $ABCD$  é um tetraedro no qual  $ABC$  é um triângulo equilátero de lado  $a$  e a aresta  $AD$  é perpendicular ao plano  $ABC$ . Sabendo-se que o ângulo diedro das faces  $ABC$  e  $DBC$  é  $45^\circ$ , o volume do tetraedro é:
- a)  $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$                       b)  $\frac{a^3}{8}$                       c)  $\frac{a^3}{6}$                       d)  $\frac{a^3}{4}$                       e)  $\frac{a^3}{2}$

## Cilindro

- 122.** (ITA-72) Dado um cilindro de revolução de raio  $r$  e altura  $h$ , sabe-se que a média harmônica entre o raio  $r$  e a altura é  $4$  e que sua área total é  $2\pi$  u.a. O raio  $r$  deve satisfazer a relação:
- a)  $r^3 - r + 2 = 0$                       d)  $r^3 - 3r - 2 = 0$   
 b)  $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0$                       e) nenhuma das respostas anteriores  
 c)  $r^3 - r^2 - r + 1 = 0$
- 123.** (CESCEM-77) O líquido contido em uma lata cilíndrica deve ser distribuído em potes também cilíndricos cuja altura é  $\frac{1}{4}$  da altura da lata cujo diâmetro da base é  $\frac{1}{3}$  do diâmetro da base da lata. O número de potes necessários é:
- a) 6                      b) 12                      c) 18                      d) 24                      e) 36
- 124.** (ITA-77) Se  $S$  é a área total de um cilindro reto de altura  $h$ , e se  $m$  é a razão direta entre a área lateral e a soma das áreas das bases, então o valor de  $h$  é dado por:
- a)  $h = \frac{m}{\sqrt{2\pi(m+1)}}$                       d)  $h = \frac{m}{\sqrt{4\pi(m+1)}}$   
 b)  $h = \frac{m}{\sqrt{4\pi(m+2)}}$                       e) nenhuma das alternativas anteriores  
 c)  $h = \frac{m}{\sqrt{2\pi(m+2)}}$
- 125.** (PUC-SP-80) Quantos litros comporta, aproximadamente, uma caixa d'água cilíndrica com 2 metros de diâmetro e  $70\text{ cm}$  de altura?
- a) 1 250                      b) 2 200                      c) 2 450                      d) 3 140                      e) 3 700
- 126.** (PUC-RS-80) Dois cilindros, um de altura  $4$  e outro de altura  $6$ , têm para perímetro de suas bases  $6$  e  $4$ , respectivamente. Se  $V_1$  é o volume do primeiro e  $V_2$ , o volume do segundo, então:
- a)  $V_1 = V_2$                       b)  $V_1 = 2V_2$                       c)  $V_1 = 3V_2$                       d)  $2V_1 = 3V_2$                       e)  $2V_1 = V_2$
- 127.** (U.F.GO-80) Para encher um reservatório de água que tem a forma de um cilindro circular reto, são necessárias 5 horas. Se o raio da base é  $3\text{ m}$  e a altura  $10\text{ m}$ , o reservatório recebe água à razão de:
- a)  $18\pi\text{ m}^3$  por hora.                      d)  $20\pi\text{ m}^3$  por hora.  
 b)  $30\pi\text{ m}^3$  por hora.                      e)  $10\pi\text{ m}^3$  por hora.  
 c)  $6\pi\text{ m}^3$  por hora.

128. (F.C.M.STA.CASA-80) Um cilindro com eixo horizontal de  $15\text{ m}$  de comprimento e diâmetro interno de  $8\text{ m}$  contém álcool. A superfície livre do álcool determina um retângulo de área  $90\text{ m}^2$ . Qual o desnível entre essa superfície e a geratriz de apoio do cilindro?
- a)  $6\text{ m}$   
 b)  $\sqrt{7}\text{ m}$   
 c)  $(4 - \sqrt{7})\text{ m}$   
 d)  $(4 + \sqrt{7})\text{ m}$   
 e)  $(4 - \sqrt{7})\text{ m}$  ou  $(4 + \sqrt{7})\text{ m}$
129. (PUC-SP-81) Quantos mililitros de tinta podem ser acondicionados no reservatório cilíndrico de uma caneta esferográfica, sabendo que seu diâmetro é  $2\text{ mm}$  e seu comprimento é  $12\text{ cm}$ ?
- a)  $0,3768$                       b)  $3,768$                       c)  $0,03768$                       d)  $37,68$                       e)  $0,003768$
130. (U.F.BA-81)  $L + 2$  é o volume de um cilindro cuja área lateral é  $L$ . O raio do cilindro é igual a:
- a)  $2(L + 1)$                       b)  $\frac{2(L + 2)}{L}$                       c)  $\frac{L + 2}{2}$                       d)  $\frac{L}{2}$                       e)  $4$
131. (U.C.PR-82) Temos dois vasilhames, geometricamente semelhantes. O primeiro é uma garrafa das de vinho, cuja altura é  $27\text{ cm}$ . O segundo é uma miniatura do primeiro, usado como propaganda do produto, e cuja altura é  $9\text{ cm}$ . Quantas vezes seria preciso esvaziar o conteúdo da miniatura na garrafa comum, para enchê-la completamente?
- a) 3 vezes                      b) 9 vezes                      c) 18 vezes                      d) 27 vezes                      e) 36 vezes
132. (CESGRANRIO-83) Um tonel cilíndrico, sem tampa e cheio de água, tem  $10\text{ dm}$  de altura e  $5\text{ dm}$  de raio da base. Inclinando-se o tonel de  $45^\circ$ , o volume da água derramada é, aproximadamente:
- a)  $145\text{ dm}^3$                       b)  $155\text{ dm}^3$                       c)  $263\text{ dm}^3$                       d)  $353\text{ dm}^3$                       e)  $392\text{ dm}^3$
133. (U.F.RN-84) Se um cilindro reto tem área lateral e volume, respectivamente, iguais a  $2\pi\text{ m}^2$  e  $\pi\text{ m}^3$ , então sua altura vale:
- a)  $1\text{ m}$                       b)  $2\text{ m}$                       c)  $3\text{ m}$                       d)  $4\text{ m}$                       e)  $5\text{ m}$
134. (U.F.GO-84) Um pedaço de cano, de  $30\text{ cm}$  de comprimento e  $10\text{ cm}$  de diâmetro interno, encontra-se na posição vertical e possui a parte inferior vedada. Colocando-se dois litros de água em seu interior, a água:
- a) ultrapassa o meio do cano.                      d) enche o cano até a borda.  
 b) transborda.                      e) atinge exatamente o meio do cano.  
 c) não chega ao meio do cano.
135. (U.F.PA-84) Dois cilindros equiláteros  $A$  e  $B$  têm os raios da base iguais a  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente. A razão entre os raios  $\frac{r_1}{r_2}$  é igual a  $\frac{1}{2}$ . Então, a razão entre os volumes de  $A$  e  $B$  é:
- a)  $\frac{1}{16}$                       c)  $\frac{1}{8}$                       e)  $\frac{1}{12}$   
 b)  $\frac{1}{2}$                       d)  $\frac{1}{4}$
136. (U.F.PA-85) Um cilindro circular reto tem o raio igual a  $2\text{ cm}$  e altura  $3\text{ cm}$ . Sua superfície lateral mede:
- a)  $6\pi\text{ cm}^2$                       b)  $9\pi\text{ cm}^2$                       c)  $12\pi\text{ cm}^2$                       d)  $15\pi\text{ cm}^2$                       e)  $16\pi\text{ cm}^2$
137. (U.F.PA-85) A área lateral de um cilindro de revolução é metade da área da base. Se o perímetro de sua seção meridiana é  $18\text{ m}$ , o volume vale:
- a)  $8\pi\text{ m}^3$                       b)  $10\pi\text{ m}^3$                       c)  $12\pi\text{ m}^3$                       d)  $16\pi\text{ m}^3$                       e)  $20\pi\text{ m}^3$

138. (U.MACK.-75) A altura de um cilindro é 20. Aumentando-se o raio desse cilindro de 5, a área lateral do novo cilindro fica igual à área total do primeiro. O raio do primeiro cilindro é igual a:
- a) 10                      b) 8                      c) 12                      d) 5                      e) 6
139. (CESESP-86) Cid possui um aquário em acrílico, de forma cúbica, cuja aresta mede 20 cm e, desejando modificar-lhe a forma para a de um cilindro reto de mesma altura que o cubo, descolou as partes soldadas e desfez as dobras, observando então que o mesmo, quando planificado, apresentava-se como uma peça inteiriça conforme a figura abaixo.



Para obter a nova forma, pretende recortar do quadrado  $Q_5$  um círculo de área máxima, que servirá de base ao aquário. O comprimento do retângulo formado pelos quadrados  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  e  $Q_4$  deverá ser encurtado para formar a superfície lateral do cilindro.

Tomando  $\pi = 3,14$ , assinale a alternativa correspondente ao percentual de redução do volume do novo aquário em relação ao original.

- a) 78,2%                      b) 21,5%                      c) 7,85%                      d) 2,15%                      e)  $\sqrt{20}\%$
140. (FUVEST-89) Um recipiente cilíndrico cujo raio da base é 6 cm contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é colocada no interior do recipiente ficando totalmente submersa. Se a altura da água subiu 1 cm, então o raio da esfera é:
- a) 1 cm                      b) 2 cm                      c) 3 cm                      d) 4 cm                      e) 5 cm
141. (U.F.MG-90) As áreas das superfícies laterais de dois cilindros retos  $V_1$  e  $V_2$ , de bases circulares, são iguais. Se as alturas e os raios das bases dos dois cilindros são, respectivamente,  $H_1$ ,  $R_1$ ,  $H_2$ ,  $R_2$ , pode-se afirmar que a razão entre os volumes de  $V_1$  e  $V_2$ , nessa ordem, é:

a)  $\frac{H_1}{H_2}$                       b)  $\frac{R_1}{R_2}$                       c)  $\frac{H_1^2}{H_2^2}$                       d)  $\frac{R_1 H_1}{R_2 H_2}$                       e)  $\frac{R_1^2}{R_2^2}$

142. (U.F.MG-90) Num cilindro reto, cuja altura é igual ao diâmetro da base, a área de uma seção perpendicular às bases, contendo os centros dessas, é  $64 \text{ m}^2$ . Então, a área lateral desse cilindro, em  $\text{m}^2$ , é:
- a)  $8\pi$                       b)  $16\pi$                       c)  $32\pi$                       d)  $64\pi$                       e)  $128\pi$



- 143.** (FATEC-90) Seja  $V$  o volume de um cilindro reto. Se a área da seção transversal reta deste cilindro diminui de 20% e a altura aumenta de 50%, então o volume do novo cilindro é:
- a) 0,20  $V$       b) 0,50  $V$       c) 0,80  $V$       d)  $V$       e) 1,20  $V$
- 144.** (FUVEST-91) A uma caixa d'água de forma cúbica com 1 metro de lado está acoplado um cano cilíndrico com 4 cm de diâmetro e 50 m de comprimento. Num certo instante, a caixa está cheia de água e o cano vazio. Solta-se a água pelo cano até que fique cheio. Qual o valor aproximado da altura da água na caixa no instante em que o cano ficou cheio?
- a) 90 cm      b) 92 cm      c) 94 cm      d) 96 cm      e) 98 cm
- 145.** (U.C.SALVADOR-91) Você tem um copo, com a forma de um cilindro circular reto, e, para colocar água nele, você dispõe de um recipiente com a forma de um cone reto. Se o raio da base e a altura do copo são, respectivamente, o dobro do raio da base e o dobro da altura do recipiente, quantas vezes você precisará encher totalmente o recipiente e derramar a água no copo para enchê-lo completamente?
- a) 4      b) 8      c) 12      d) 16      e) 24
- 146.** (U.F.MG-92) Dois cilindros têm áreas laterais iguais. O raio do primeiro é igual a um terço do raio do segundo. O volume do primeiro é  $V_1$ . O volume do segundo cilindro, em função de  $V_1$ , é igual a:
- a)  $\frac{1}{3} V_1$       b)  $V_1$       c)  $\frac{3}{2} V_1$       d)  $2 V_1$       e)  $3 V_1$
- 147.** (U.C.SALVADOR-92) Um recipiente tem a forma de um cilindro reto cujo raio da base mede 20 cm. Se, ao colocar-se uma pedra nesse tanque, o nível da água subir 0,8 mm, o volume dessa pedra será de, aproximadamente:
- a) 101,5 cm<sup>3</sup>      b) 100,5 cm<sup>3</sup>      c) 97,5 cm<sup>3</sup>      d) 95,8 cm<sup>3</sup>      e) 94,6 cm<sup>3</sup>

## Cone

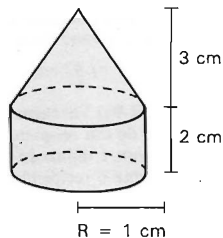
- 148.** (U.F.PR-80) A geratriz de um cone mede 13 cm e o diâmetro da sua base 10 cm. O volume do cone é:
- a)  $100\pi$  cm<sup>3</sup>      d)  $\frac{325\pi}{3}$  cm<sup>3</sup>  
 b)  $200\pi$  cm<sup>3</sup>      e)  $\frac{1\ 300\pi}{3}$  cm<sup>3</sup>  
 c)  $400\pi$  cm<sup>3</sup>
- 149.** (U.MACK.-80) Um cone e um prisma quadrangular regular retos têm bases de mesma área. O prisma tem altura 12 e volume igual ao dobro do volume do cone. Então, a altura do cone vale:
- a) 18      b)  $\frac{16}{3}\pi$       c) 36      d) 24      e)  $8\pi$
- 150.** (F.C.M.STA.CASA-81) Se o raio da base, a altura e a geratriz de um cone circular reto constituem, nessa ordem, uma P.A. de razão igual a 1, o volume desse cone é, em unidades de volume:
- a)  $\frac{2\pi}{3}$       b)  $(\sqrt{3} + 1)\pi$       c)  $12\pi$       d)  $16\pi$       e)  $\frac{80\pi}{3}$

151. (U.F.MG-81) Um cone circular reto tem raio da base igual a 3 e altura igual a 6. A razão entre o volume e a área da base é:

- a)  $\sqrt{2}$                       b) 1,5                      c) 2                      d) 4                      e) 6

152. (U.C.MG-81) O volume, em  $cm^3$ , da figura formada por um cone e um cilindro circulares retos, é:

- a)  $\pi$   
b)  $2\pi$   
c)  $3\pi$   
d)  $4\pi$   
e)  $5\pi$



153. (U.C.MG-81) O raio da base de um cone de revolução é 10 cm, e a altura 30 cm. Se o raio aumentar 1 cm e a altura diminuir 3 cm, a razão entre o segundo volume e o primeiro é de:

- a) 0,333                      b) 1,089                      c) 1,321                      d) 2,021                      e) 3,000

154. (ITA-81) Qual o volume de um cone circular reto, se a área de sua superfície lateral é de  $24\pi \text{ cm}^2$  e o raio de sua base mede 4 cm?

- a)  $\frac{16}{3} \sqrt{20\pi} \text{ cm}^3$                       c)  $\frac{\sqrt{24}}{3} \pi \text{ cm}^3$                       e)  $\frac{1}{3} \sqrt{20\pi} \text{ cm}^3$   
b)  $\frac{\sqrt{24}}{4} \pi \text{ cm}^3$                       d)  $\frac{8}{3} \sqrt{24\pi} \text{ cm}^3$

155. (U.F.PA-84) Num cone reto, a altura mede 3 m e o diâmetro da base é 8 m. Então, a área total vale:

- a)  $52\pi$                       b)  $36\pi$                       c)  $20\pi$                       d)  $16\pi$                       e)  $12\pi$

156. (U.E.LONDRINA-84) A altura de um cone circular reto é 12 cm e seu volume é  $64\pi \text{ cm}^3$ . A geratriz desse cone mede, em cm:

- a)  $2\sqrt{10}$                       b)  $4\sqrt{10}$                       c)  $6\sqrt{10}$                       d)  $8\sqrt{10}$                       e)  $10\sqrt{10}$

157. (U.E.BA-84) Um cone circular reto tem altura 3,75 cm e raio da base 5 cm. Esse cone é cortado por um plano paralelo a sua base, distando dela 0,75 cm. A área total do cone obtido com essa secção, em  $cm^2$ , é:

- a)  $16\pi$                       b)  $20\pi$                       c)  $28\pi$                       d)  $36\pi$                       e)  $40\pi$

158. (CESGRANRIO-84) Um recipiente cônico, com altura 2 e raio da base 1, contém água até a metade de sua altura (Fig. I). Inverte-se a posição do recipiente, como mostra a Fig. II. A distância do nível da água ao vértice, na situação da Fig. II, é:

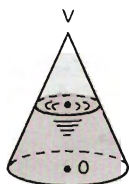


Fig. I



Fig. II

- a)  $\frac{3}{2}$                       b)  $\frac{4}{3}$                       c)  $\sqrt{3}$                       d)  $\sqrt[3]{7}$                       e)  $\sqrt[3]{6}$

159. (CEESP-85) Considere as proposições:

- I - A curva resultante da interseção de um cone reto com um plano não paralelo à sua base é sempre uma elipse.
- II - A curva resultante da interseção de um cone reto com um plano é necessariamente uma hipérbole, ou uma elipse, ou uma parábola.
- III - A interseção, não vazia, de um cone com um plano é dada por uma equação do 2º grau que não define um par de retas.

Assinale, então, a única alternativa correta:

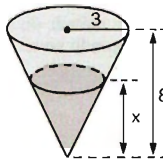
- a) Apenas as proposições I e II são verdadeiras.
- b) Apenas a proposição II é falsa.
- c) As proposições I, II e III são verdadeiras.
- d) As proposições I, II e III são falsas.
- e) Apenas a proposição I é verdadeira.

160. (U.F.PA-85) Um cone equilátero tem área de base  $4\pi \text{ cm}^2$ . Qual sua área lateral?

- a)  $2\pi \text{ cm}$
- b)  $4\pi \text{ cm}$
- c)  $8\pi \text{ cm}$
- d)  $16\pi \text{ cm}$
- e)  $32\pi \text{ cm}$

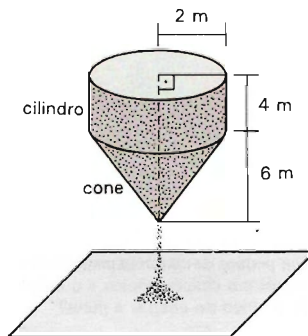
161. (FUVEST-92) Um copo tem a forma de um cone com altura  $8 \text{ cm}$  e raio de base  $3 \text{ cm}$ . Queremos enchê-lo com quantidades iguais de suco e de água. Para que isso seja possível a altura  $x$  atingida pelo primeiro líquido colocado deve ser:

- a)  $\frac{8}{3} \text{ cm}$
- b)  $6 \text{ cm}$
- c)  $4 \text{ cm}$
- d)  $4\sqrt{3} \text{ cm}$
- e)  $4\sqrt[3]{4} \text{ cm}$



162. (FATEC-88) A fim de que não haja desperdício de ração e seus animais estejam sempre bem nutridos, um fazendeiro construiu um recipiente com uma pequena abertura na parte inferior, que permite a reposição automática da alimentação, conforme mostra a figura abaixo. A capacidade total de armazenagem do recipiente, em metros cúbicos, é:

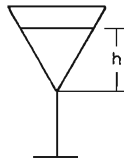
- a)  $8\pi + \frac{40}{3}\pi$
- b)  $24\pi$
- c)  $28\pi$
- d)  $48\pi$
- e) impossível de ser determinada, pois faltam informações.



163. (COVEST-U.F.PE-U.F.R.PE-88) Considere uma taça de vinho de forma cônica, conforme a figura.

Assinale as proposições verdadeiras e as proposições falsas nos itens abaixo:

- a) O volume de vinho na taça aumenta quando a altura  $h$  aumenta.  
 b) O volume do vinho na taça é diretamente proporcional à altura  $h$ .  
 c) O volume do vinho é inversamente proporcional à altura  $h$ .  
 d) Sabendo-se as alturas  $h_1$ ,  $h_2$  e o volume  $V_1$  correspondente a  $h_1$ , o volume  $V_2$  correspondente a  $h_2$  pode ser calculado através de uma regra de três direta.  
 e) O volume do vinho não é diretamente proporcional, nem inversamente proporcional à altura  $h$ .



164. (ITA-88) A geratriz de um cone circular reto forma com o eixo deste cone um ângulo de  $45^\circ$ . Sabendo-se que o perímetro de sua secção meridiana mede  $2\text{ cm}$ , podemos afirmar que a área total deste cone vale:

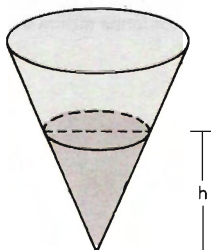
- a)  $\frac{\pi}{3} (2\sqrt{2} - 2)\text{ cm}^2$   
 b)  $\pi (\sqrt{2} - 1)\text{ cm}^2$   
 c)  $\pi (\sqrt{3} - 1)\text{ cm}^2$   
 d)  $\frac{\pi}{2} (\sqrt{2} - 1)\text{ cm}^2$   
 e)  $\pi (\sqrt{5} - 1)\text{ cm}^2$

165. (FATEC-89) Suponham-se dois cones retos, de modo que a altura do primeiro é quatro vezes a altura do segundo e o raio da base do primeiro é a metade do raio da base do segundo. Se  $V_1$  e  $V_2$  são, respectivamente, os volumes do primeiro e do segundo cone:

- a)  $V_1 = V_2$   
 b)  $V_1 = 2V_2$   
 c)  $2V_1 = 3V_2$   
 d)  $3V_1 = 2V_2$   
 e)  $2V_1 = V_2$

166. (U.F.MG-89) Um tanque de água tem a forma de um cone circular reto, com seu vértice apontando para baixo. O raio do topo é igual a  $9\text{ m}$  e a altura do tanque é de  $27\text{ m}$ . Pode-se afirmar que o volume  $V$  da água no tanque, como função da altura  $h$  da água, é:

- a)  $V = \frac{\pi h^3}{27}$   
 b)  $V = \frac{\pi h^3}{9}$   
 c)  $V = \frac{\pi h^3}{3}$   
 d)  $V = 3\pi h^3$   
 e)  $V = 9\pi h^3$



167. (FUVEST-90) Um pedaço de cartolina possui a forma de um semicírculo de raio  $20\text{ cm}$ . Com essa cartolina um menino constrói um chapéu cônico e o coloca com a base apoiada sobre uma mesa.

Qual a distância do bico do chapéu à mesa?

- a)  $10\sqrt{3}\text{ cm}$   
 b)  $3\sqrt{10}\text{ cm}$   
 c)  $20\sqrt{2}\text{ cm}$   
 d)  $20\text{ cm}$   
 e)  $10\text{ cm}$

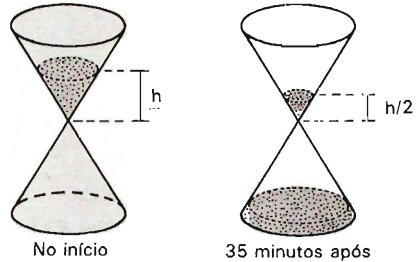
168. (CESGRANRIO-90) Um tanque cônico, de eixo vertical e vértice para baixo, tem água até a metade de sua altura. Se a capacidade do tanque é de 1 200 ℓ, então a quantidade de água nele existente é de:

- a) 600 ℓ      b) 450 ℓ      c) 300 ℓ      d) 200 ℓ      e) 150 ℓ

169. (U.E.CE-91) Um cone circular reto de volume  $\frac{8}{3} \pi \text{ cm}^3$  tem altura igual ao raio da base. Então, a geratriz desse cone, em cm, mede:

- a)  $2\sqrt{2}$       b)  $2\sqrt{3}$       c)  $3\sqrt{2}$       d)  $3\sqrt{3}$

170. (CESGRANRIO-91) Uma ampulheta é formada por dois cones de revolução iguais, com eixos verticais e justapostos pelo vértice, o qual tem um pequeno orifício que permite a passagem de areia da parte de cima para a parte de baixo. Ao ser colocada para marcar um intervalo de tempo, toda a areia está na parte de cima e, 35 minutos após, a altura da areia na parte de cima reduziu-se à metade, como mostra a figura. Supondo que em cada minuto a quantidade de areia que passa do cone de cima para o de baixo é constante, em quanto tempo mais toda a areia terá passado para a parte de baixo?



- a) 5 minutos      d) 20 minutos  
b) 10 minutos      e) 30 minutos  
c) 15 minutos

171. (U.F.MG-92) Considerem-se dois cones. A altura do primeiro é o dobro da altura do segundo; o raio da base do primeiro é a metade do raio da base do segundo.

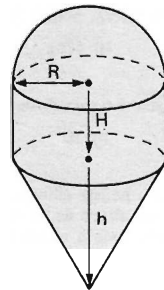
O volume do segundo é de  $96\pi$ .

O volume do primeiro é:

- a)  $48\pi$       b)  $64\pi$       c)  $128\pi$       d)  $144\pi$       e)  $192\pi$

## Esfera

172. (CESESP-86) Pretende-se construir um tanque com a forma e dimensões da figura ao lado. Sabendo-se que o hemisfério, o cilindro circular reto e o cone circular reto, que constituem o referido tanque, têm igual volume, assinale, dentre as alternativas abaixo, a única que corresponde às relações existentes entre as dimensões indicadas.



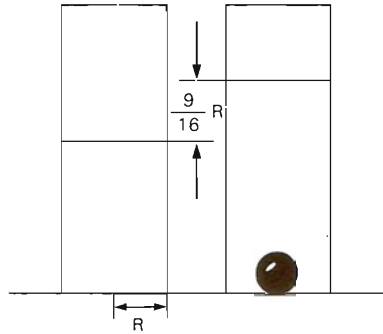
- a)  $R = h = H$   
b)  $3R = h = 3H$   
c)  $4R = h = 3H$   
d)  $2R = h = 3H$   
e)  $h = 3R = H$

173. (CESGRANRIO-77) Uma laranja pode ser considerada uma esfera de raio  $R$ , composta por 12 gomos exatamente iguais. A superfície total de cada gomo mede:

- a)  $2\pi R^2$       d)  $3\pi R^2$   
b)  $4\pi R^2$       e)  $\frac{4}{3} \pi R^2$   
c)  $\frac{3\pi}{4} R^2$



174. (CESGRANRIO-80) Um tanque cilíndrico com água tem raio da base  $R$ . Mergulha-se nesse tanque uma esfera de aço e o nível da água sobe  $\frac{9}{16}R$  (vide figura). O raio da esfera é:



- a)  $\frac{3R}{4}$                       d)  $\frac{R}{2}$   
 b)  $\frac{9R}{16}$                       e)  $\frac{2R}{3}$   
 c)  $\frac{3R}{5}$

175. (F.M.ABC-80) Assinale a verdadeira:

- a) A área da coroa circular de raios  $R$  e  $r$  ( $R > r > 0$ ) é  $S = \pi(R - r)^2$ .  
 b) A área do triângulo de lados  $a$ ,  $b$ ,  $c$  é  $S = \frac{abc}{2}$ .  
 c) Numericamente, o volume de qualquer esfera é maior do que a respectiva área.  
 d) Num cubo de aresta  $l$ , a soma da diagonal interna com a diagonal da base é aproximadamente  $\pi$ .  
 e) O volume do tetraedro regular de aresta  $a$  é  $\frac{a^3}{3}$ .

176. (V.UNIF.RS-80) Um plano secciona uma esfera determinando um círculo de raio igual à distância do plano ao centro da esfera. Sendo  $36\pi$  a área do círculo, o volume da esfera é:

- a)  $192\sqrt{2}\pi$               b)  $576\pi$               c)  $576\sqrt{2}\pi$               d)  $1\ 296\pi$               e)  $7\ 776\pi$

177. (PUC-SP-81) Qual é o raio de uma esfera 1 milhão de vezes maior (em volume) que uma esfera de raio 1?

- a) 100 000              b) 10              c) 10 000              d) 1 000              e) 100

178. (U.F.RS-81) Uma panela cilíndrica de 20 cm de diâmetro está completamente cheia de massa para doce, sem exceder a sua altura de 16 cm. O número de doces em formato de bolinhas de 2 cm de raio que se podem obter com toda a massa é:

- a) 300              b) 250              c) 200              d) 150              e) 100

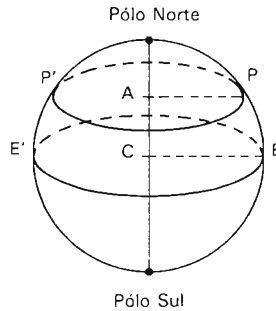
179. (U.F.MG-82) Duas bolas metálicas, cujos raios medem 1 cm e 2 cm, são fundidas e moldadas em forma de um cilindro circular cuja altura mede 3 cm. O raio do cilindro, em cm, é:

- a)  $\frac{3}{2}$               b) 2              c) 6              d)  $2\sqrt{\frac{5}{3}}$               e)  $2\sqrt{3}$

180. (CESCEM-72) Supondo a Terra esférica com circunferência meridiana de 40 000 km, a área de um fuso horário é de:

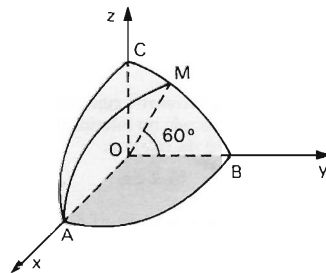
- a)  $\frac{32}{3\pi^2} 10^{12} \text{ km}^2$               c)  $\frac{2}{3\pi} 10^8 \text{ km}^2$               e)  $\frac{4}{3} \pi^2 \text{ km}^2$   
 b)  $\frac{4}{9\pi^2} 10^{12} \text{ km}^2$               d)  $\frac{4}{3} \pi 10^8 \text{ km}^2$

181. (CESGRANRIO-83) Supondo a Terra esférica de centro  $C$ , o comprimento do paralelo  $PP'$  mostrado na figura é a metade do Equador  $EE'$ . A latitude de  $(PCE)$  do paralelo é:



- a)  $30^\circ$   
 b)  $40^\circ$   
 c)  $45^\circ$   
 d)  $60^\circ$   
 e)  $70^\circ$

182. (CESGRANRIO-83)  $ABC$  é um octante de superfície esférica de raio 6 centrada na origem  $O$ , como se vê na figura. O segmento  $OM$ , do plano  $yOz$ , faz ângulo de  $60^\circ$  com  $Oy$ . Se o plano  $AOM$  corta o octante segundo o arco  $\widehat{AM}$ , então o comprimento de  $\widehat{AM}$  é:



- a)  $3\pi$   
 b)  $\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}$   
 c)  $2\pi\sqrt{3}$   
 d)  $\frac{8\pi}{3}$   
 e)  $6\pi$

183. (U.F.PE-83) Uma esfera de centro  $O$  e raio igual a  $5\text{ cm}$  é cortada por um plano  $P$ , resultando desta interseção uma circunferência de raio igual a  $4\text{ cm}$ . Assinale, então, a alternativa que fornece a distância de  $O$  a  $P$ .

- a) 10 cm      b) 5 cm      c) 2 cm      d) 1 cm      e) 3 cm

184. (U.F.RS-84) Duas bolas concêntricas têm raios medindo  $\sqrt{2}$  e  $\sqrt{6}$ . A interseção da bola maior com um plano tangente à bola menor determina uma região plana de área:

- a)  $\pi$       b)  $2\pi$       c)  $4\pi$       d)  $6\pi$       e)  $8\pi$

185. (U.E.LONDRINA-84) Um cilindro circular reto e uma esfera são equivalentes. Se o raio da esfera e o raio da base do cilindro têm medida  $l$ , a área lateral desse cilindro é:

- a)  $\frac{14}{3}\pi$       b)  $\frac{11}{3}\pi$       c)  $\frac{11}{4}\pi$       d)  $\frac{8}{3}\pi$       e)  $\frac{5}{4}\pi$

186. (U.F.PA-84) Um plano secciona uma esfera determinando um círculo de raio igual à distância do plano ao centro da esfera. Sendo  $25\pi$  a área do círculo, o volume da esfera é:

- a)  $\frac{100\sqrt{2}}{3}\pi$       b)  $500\sqrt{2}\pi$       c)  $\frac{500\sqrt{2}}{3}\pi$       d)  $\frac{1\,000\sqrt{2}}{3}\pi$       e)  $\frac{1\,000\pi}{3}$

187. (U.F.PA-85) O círculo máximo de uma esfera mede  $6\pi\text{ cm}$ . Qual o volume da esfera?

- a)  $12\pi\text{ cm}^3$       b)  $24\pi\text{ cm}^3$       c)  $36\pi\text{ cm}^3$       d)  $72\pi\text{ cm}^3$       e)  $144\pi\text{ cm}^3$

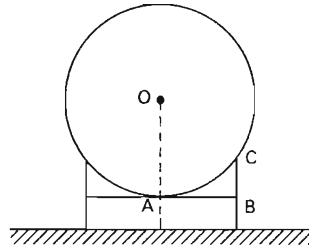
188. (CEESP-85) Uma sonda espacial, em forma de um cone circular reto de volume igual a  $16\pi \text{ m}^3$  cuja altura é seis vezes o raio da base, colidiu com um asteróide de forma esférica e, por ter este uma baixa densidade, penetrou-lhe de tal modo que o terço médio de seu eixo (altura do cone) coincidiu com o diâmetro do asteróide.

Assinale, então, qual, dentre as alternativas abaixo, corresponde ao volume do asteróide antes da colisão.

- a)  $32\pi/3 \text{ m}^3$       b)  $256\pi/3 \text{ m}^3$       c)  $32\sqrt{2}\pi/3 \text{ m}^3$       d)  $96\pi \text{ m}^3$       e)  $16\pi/3 \text{ m}^3$

189. (U.F.R.PE-87) Um reservatório de gás combustível de forma esférica está apoiado numa estrutura metálica conforme indicado na figura ao lado. Sabendo que a distância de  $A$  a  $B$  é de  $4 \text{ m}$  e de  $2 \text{ m}$  do ponto  $B$  ao ponto  $C$ , indique o valor aproximado do volume do reservatório, entre as alternativas abaixo.

- a)  $580 \text{ m}^3$       d)  $512 \text{ m}^3$   
 b)  $545 \text{ m}^3$       e)  $505 \text{ m}^3$   
 c)  $523 \text{ m}^3$



190. (FUVEST-89) Um recipiente cilíndrico cujo raio da base é  $6 \text{ cm}$  contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é colocada no interior do recipiente ficando totalmente submersa. Se a altura da água subiu  $1 \text{ cm}$ , então o raio da esfera é:

- a)  $1 \text{ cm}$       b)  $2 \text{ cm}$       c)  $3 \text{ cm}$       d)  $4 \text{ cm}$       e)  $5 \text{ cm}$

191. (ITA-89) Justapondo-se as bases de dois cones retos e idênticos de altura  $H$ , forma-se um sólido de volume  $v$ . Admitindo-se que a área da superfície deste sólido é igual à área da superfície de uma esfera de raio  $H$  e volume  $V$ , a razão  $v/V$  vale:

- a)  $\frac{\sqrt{11} - 1}{4}$       d)  $\frac{\sqrt{17} - 1}{4}$   
 b)  $\frac{\sqrt{13} - 1}{4}$       e)  $\frac{\sqrt{19} - 1}{4}$   
 c)  $\frac{\sqrt{15} - 1}{4}$

192. (COVEST-89) Num tanque aberto, em forma de cubo, existem  $510 \text{ m}^3$  de álcool. No interior do referido tanque é colocada uma esfera, que se ajusta perfeitamente ao tanque, ou seja, a esfera fica inscrita no cubo. Se a aresta do cubo mede  $10 \text{ m}$ , assinale dentre os itens abaixo as proposições verdadeiras e as proposições falsas.

- a) Não haverá derramamento de álcool.  
 b) O volume da esfera é menor que o volume de álcool.  
 c) O derramamento de álcool é de aproximadamente  $34 \text{ m}^3$ .  
 d) O volume da esfera é maior que o volume de álcool.  
 e) O derramamento de álcool é de aproximadamente  $100 \text{ m}^3$ .

193. (VUNESP-92) Considere uma circunferência  $C$  de raio  $r$  num plano  $\alpha$  e aponte a única alternativa *falsa*.

- a) Existem superfícies esféricas cuja interseção com  $\alpha$  é  $C$ .  
 b) Existe apenas uma superfície esférica de raio  $r$  cuja interseção com  $\alpha$  é  $C$ .  
 c) Dentre as superfícies esféricas que interceptam  $\alpha$  segundo  $C$ , há uma de raio menor.  
 d) Dentre as superfícies esféricas que interceptam  $\alpha$  segundo  $C$ , há uma de raio maior.  
 e) Se  $t > r$ , há duas, e apenas duas, superfícies esféricas de raio  $t$  cuja interseção com  $\alpha$  é  $C$ .





198. (ITA-73) Seja  $S$  uma semi-esfera de raio  $R$  dado. Sejam  $p$  e  $q$  dois planos paralelos e distantes entre si  $\frac{R}{2}$  e tais que interceptam  $S$  paralelamente à sua base. Seja  $T$  o tronco de cone com bases  $b$  e  $c$ , onde  $b$  e  $c$  são as interseções de  $p$  e  $q$  com  $S$ . Seja  $x$  o valor da menor das distâncias  $d$  e  $D$ , onde  $d$  é a distância entre  $p$  e a base de  $S$ , e  $D$  é a distância entre  $q$  e a base de  $S$ .

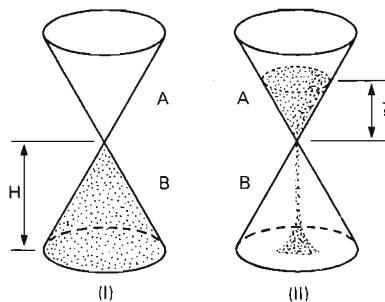
$$\text{Seja } K = \left[ (R^2 - x^2) \left( R^2 - \left( x + \frac{R}{2} \right)^2 \right) \right]^{1/2}$$

Então o volume de  $T$ , como função de  $x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{R}{2}$ , vale:

- a)  $\frac{\pi R}{6} \left( \frac{7}{4} R^2 - 2x^2 - Rx + K \right)$       d)  $\frac{\pi R}{6} \left( \frac{7}{4} R^2 - 2x^2 - Rx - K \right)$   
 b)  $\frac{\pi R}{12} \left( \frac{7}{4} R^2 - 2x^2 - Rx + K \right)$       e) n.d.a.  
 c)  $\frac{\pi R}{12} \left( \frac{7}{4} R^2 - 2x^2 - Rx - K \right)$

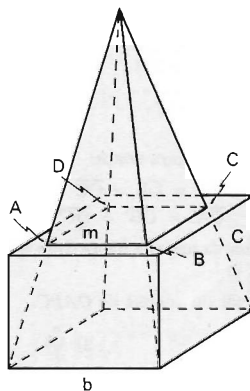
199. (CESGRANRIO-77) Uma ampulheta repousa numa mesa como mostra a figura (I) (o cone  $B$  completamente cheio de areia). A posição da ampulheta é invertida. A figura (II) mostra o instante em que cada cone contém metade da areia. Nesse instante, a areia no cone  $B$  forma um cone de altura:

- a)  $\frac{H}{\sqrt{3}}$       d)  $\frac{H}{\sqrt[3]{3}}$   
 b)  $\frac{H}{2}$       e)  $\frac{H}{4}$   
 c)  $\frac{H}{\sqrt[3]{2}}$



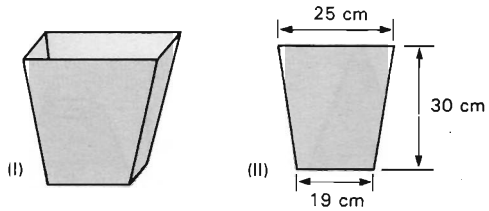
200. (U.MACK.-77) Na figura ao lado,  $b$  é a medida da aresta de um cubo e aresta da base de uma pirâmide de altura  $h$ ;  $m$  é a medida do lado do quadrado  $ABCD$ . Então existe  $b$ :

- a) se  $h = 2m$ .  
 b) se  $h = 3m$ .  
 c) se  $h = 4m$ .  
 d) quaisquer que sejam  $h$  e  $m$ .  
 e) Não sei.



201. (CESGRANRIO-79) Uma cesta de lixo (Figura I) tem por faces laterais trapézios: isósceles (Figura II) e por fundo um quadrado de  $19\text{ cm}$  de lado (estamos desprezando a espessura do material de que é feita a cesta). A altura da cesta em  $\text{cm}$  é:

- a)  $30 \times \frac{19}{25}$       d)  $5\sqrt{13}$   
 b)  $9\sqrt{11}$       e)  $30\sqrt{\frac{19}{25}}$   
 c)  $7\sqrt{19}$



202. (V.UNIF.RS-80) Uma pirâmide de altura  $6$  e área da base  $27$  é interceptada por um plano cuja distância ao vértice é  $2$  e que é paralelo ao plano da base. O volume do tronco de pirâmide assim determinado é:  
 a) 44      b) 46      c) 48      d) 50      e) 52

203. (U.F.GO-80) O volume de um tronco de cone circular reto com base de raio  $R$ , cuja altura é a quarta parte da altura  $h$  do cone correspondente, é:

- a)  $\frac{\pi R^2 h}{4}$       b)  $\frac{\pi R^2 h}{12}$       c)  $\frac{55\pi R^2 h}{192}$       d)  $\frac{37\pi R^2 h}{192}$       e)  $\frac{3\pi R^2 h}{4}$

204. (PUC-SP-81) O volume de um tronco de pirâmide de bases paralelas e altura  $h$  é dado por  $V = \frac{h}{3} (S + S' + \sqrt{S \cdot S'})$ , onde  $S$  e  $S'$  são as áreas das bases. Se as bases de um tronco de pirâmide são quadrados de lados  $3$  e  $4$  e se a altura é  $5$ , então o seu volume é:

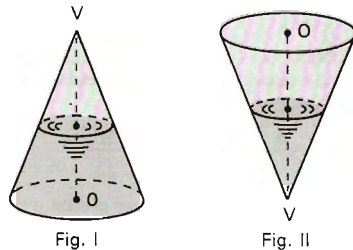
- a)  $\frac{175\sqrt{3}}{3}$       b) 73      c)  $\sqrt{12}$       d)  $25 + \sqrt{3}$       e)  $\frac{185}{3}$

205. (VUNESP-84) Seja  $P_1$  uma pirâmide regular, cuja base é um quadrado de lado  $a$ . Cortamos  $P_1$  por um plano paralelo à base e que dista da base de metade da altura  $h$  de  $P_1$ . Seja  $P_2$  a pirâmide menor resultante desse corte,  $V_1$  o volume de  $P_1$  e  $V_2$  o volume de  $P_2$ . Então:

- a) não dá para comparar os volumes  $V_1$  e  $V_2$ .      d)  $\frac{V_1}{9} < V_2 < \frac{V_1}{8}$   
 b)  $V_2 = \frac{V_1}{9}$       e)  $\frac{V_1}{8} < V_2 < \frac{V_1}{7}$   
 c)  $V_1$  é igual a 8 vezes  $V_2$

206. (CESGRANRIO-84) Um recipiente cônico, com altura  $2$  e raio da base  $1$ , contém água até a metade de sua altura (Fig. I). Inverte-se a posição do recipiente, como mostra a Fig. II. A distância do nível da água ao vértice, na situação da Fig. II, é:

- a)  $\frac{3}{2}$   
 b)  $\frac{4}{3}$   
 c)  $\sqrt{3}$   
 d)  $\sqrt[3]{7}$   
 e)  $\sqrt[3]{6}$



- 207.** (CESGRANRIO-85) De um cone de centro da base  $O$  e de altura  $H$  (Fig. I), obtém-se um tronco de cone de altura  $H/2$  (Fig. II). Neste tronco, faz-se um furo cônico com vértice  $O$ , como indicado na Fig. III. Se o volume do cone da Fig. I é  $V$ , então o volume do sólido da Fig. III é:

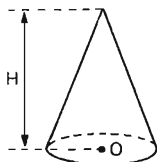


Fig. I

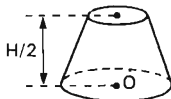


Fig. II



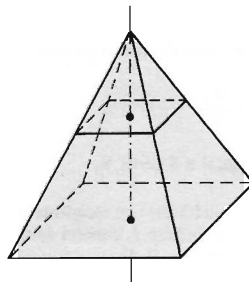
Fig. III

- a)  $\frac{3V}{4}$       b)  $\frac{V}{2}$       c)  $\frac{5V}{8}$       d)  $\frac{2V}{3}$       e)  $\frac{4V}{7}$
- 208.** (CESGRANRIO-88) Um cone circular reto é cortado em duas partes por um plano paralelo à sua base e que passa pelo ponto médio da sua altura. Se  $v$  e  $V$  são os volumes da menor e da maior dessas partes, respectivamente, então  $\frac{v}{V}$  vale:
- a)  $\frac{1}{9}$       b)  $\frac{1}{8}$       c)  $\frac{1}{7}$       d)  $\frac{2}{7}$       e)  $\frac{2}{9}$
- 209.** (ITA-88) A geratriz de um cone circular reto forma com o eixo deste cone um ângulo de  $45^\circ$ . Sabendo-se que o perímetro de sua secção meridiana mede  $2\text{ cm}$ , podemos afirmar que a área total deste cone vale:

- a)  $\frac{\pi}{3} (2\sqrt{2} - 2)\text{ cm}^2$       d)  $\frac{\pi}{2} (\sqrt{2} - 1)\text{ cm}^2$   
 b)  $\pi(\sqrt{2} - 1)\text{ cm}^2$       e)  $\pi(\sqrt{5} - 1)\text{ cm}^2$   
 c)  $\pi(\sqrt{3} - 1)\text{ cm}^2$

- 210.** (U.F.MG-89) Corta-se uma pirâmide regular de base quadrangular e altura  $4\text{ cm}$  por um plano paralelo ao plano da base, de maneira que os volumes dos dois sólidos obtidos sejam iguais. A altura do tronco de pirâmide obtido é, em centímetros:

- a) 1  
 b)  $4 - 2\sqrt[3]{4}$   
 c) 2  
 d)  $4 - \sqrt{2}$   
 e)  $4 - \sqrt[3]{2}$



- 211.** (VUNESP-90) Um cone reto tem raio da base  $R$  e altura  $H$ . Secciona-se esse cone por um plano paralelo à base e distante  $h$  do vértice, obtendo-se um cone menor e um tronco de cone, ambos de mesmo volume. Então:

- a)  $h = \frac{H\sqrt[3]{4}}{2}$       b)  $h = \frac{H}{\sqrt{2}}$       c)  $h = \frac{H\sqrt[3]{2}}{2}$       d)  $3h = H\sqrt[3]{4}$       e)  $h = \frac{H\sqrt[3]{3}}{3}$

- 212.** (ITA-92) Uma seção plana que contém o eixo de um tronco de cilindro é um trapézio cujas bases menor e maior medem, respectivamente,  $h\text{ cm}$  e  $H\text{ cm}$ . Duplicando-se a base menor, o volume sofre um acréscimo de  $\frac{1}{3}$  em relação ao seu volume original. Deste modo:

- a)  $2H = 3h$       b)  $H = 2h$       c)  $H = 3h$       d)  $2H = 5h$       e) n.d.a.

**213.** (ITA-92) Num cone de revolução, o perímetro da seção meridiana mede  $18 \text{ cm}$  e o ângulo do setor circular mede  $288^\circ$ . Considerando-se o tronco de cone cuja razão entre as áreas das bases é  $\frac{4}{9}$ , então sua área total mede:

- a)  $16\pi \text{ cm}^2$       b)  $\frac{308\pi}{9} \text{ cm}^2$       c)  $\frac{160\pi}{3} \text{ cm}^2$       d)  $\frac{100\pi}{9} \text{ cm}^2$       e) n.d.a.

## Inscrição e circunscrição de sólidos

**214.** (ITA-70) Um bloco de madeira tem a forma de um paralelepípedo reto, com base quadrada de lado  $5 \text{ cm}$  e com altura  $1 \text{ m}$ . Tal bloco tem uma cavidade cilíndrica, sendo que o eixo do cilindro que determina a cavidade passa pelo centro do paralelepípedo e faz com o plano da base um ângulo de  $45$  graus. O cilindro corta ambas as faces do paralelepípedo seguindo uma circunferência de raio  $1 \text{ m}$ . Qual é o volume do bloco?

- a)  $(75 - \pi) \text{ m}^3$       d)  $\left(25 + \frac{\sqrt{2}}{2} \pi\right) \text{ m}^3$   
 b)  $(25 - 2\pi) \text{ m}^3$       e) nenhum dos resultados acima é válido  
 c)  $\left(25 - \frac{\sqrt{2}}{2} \pi\right) \text{ m}^3$

**215.** (PUC-SP-72) Num cubo de aresta  $a$ , inscreve-se uma esfera, depois um cubo nesta esfera, neste último cubo, e assim indefinidamente. O limite da soma dos volumes de todos os cubos será:

- a)  $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+1} a^3$       d)  $\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+2} a^3$   
 b)  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} a^3$       e) nenhuma das anteriores  
 c)  $\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1} a^3$

**216.** (CESCEM-73) Em uma caixa cúbica de aresta  $l$  são colocadas  $N^3$  esferas maciças, cada uma delas com diâmetro  $\frac{l}{N}$ ,  $N$  inteiro, estritamente positivo. A diferença entre o volume do cubo e o volume ocupado pelas esferas é:

- a) igual a  $l - \frac{\pi}{3}$  .      d) estritamente crescente com  $N$ .  
 b) igual a  $l - \frac{\pi}{6}$  .      e) estritamente decrescente com  $N$ .  
 c) igual a  $l - \frac{4\pi}{3}$  .

**217.** (ITA-73) Seja  $L$  o comprimento do eixo de uma caldeira cilíndrica terminada por duas semi-esferas. Sabe-se que a área da superfície total da caldeira é  $4\pi k^2$ , com  $0 < k < \frac{L}{2}$ . As dimensões da parte cilíndrica da caldeira valem:

- a)  $\frac{k^2}{L}$  e  $L + \frac{3k^2}{L}$       c)  $\frac{2k^2}{L}$  e  $L - \frac{4k^2}{L}$       e) n.d.a.  
 b)  $\frac{k^2}{L}$  e  $k + \left(\frac{3}{4}\right)L$       d)  $\frac{k^2}{2L}$  e  $L + \left(\frac{4}{3}\right)k^2$

- 218.** (ITA-73) Consideremos um cone de revolução de altura  $h$ , e um cilindro nele inscrito. Seja  $d$  a distância do vértice do cone à base superior do cilindro. A altura  $H$  de um segundo cilindro inscrito neste cone (diferente do primeiro) e de mesmo volume do primeiro é dada por:

a)  $H = \frac{(h - \sqrt{h-d})}{3}$

d)  $H = \frac{(h + d - \sqrt{(h-d)(h+3d)})}{2}$

b)  $H = \frac{(h \pm \sqrt{h^2 - d^2})}{3}$

e) n.d.a.

c)  $H = \frac{(h - d + h\sqrt{h^2 - d^2})}{2}$

- 219.** (ITA-73) Um octaedro regular é inscrito num cubo, que está inscrito numa esfera, e que está inscrita num tetraedro regular. Se o comprimento da aresta do tetraedro é  $l$ , qual é o comprimento da aresta do octaedro?

a)  $\sqrt{\frac{2}{27}}$

b)  $\sqrt{\frac{3}{4}}$

c)  $\sqrt{\frac{2}{4}}$

d)  $\frac{1}{6}$

e) n.d.a.

- 220.** (CESCEM-74) Duas esferas de raios  $3\text{ m}$  e  $4\text{ m}$  têm centro no eixo do cone da figura, são tangentes entre si e ao cone. A altura  $h$  do cone mede:

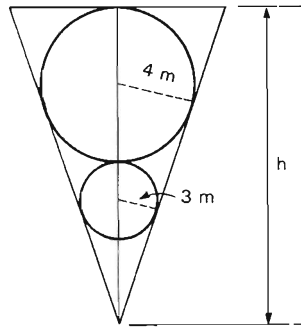
a)  $512 \frac{\sqrt{3}}{7}\text{ m}$

b)  $32 \sqrt{\frac{6}{7}}\text{ m}$

c)  $32 \left( \sqrt{\frac{6}{7}} + \sqrt{\frac{1}{42}} \right)\text{ m}$

d)  $32\text{ m}$

e)  $21\text{ m}$



- 221.** (FUVEST-77) Um tetraedro tem um triedro tri-retângulo de arestas  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e está circunscrito a uma esfera de raio  $r$  que tangencia as faces do citado triedro em  $P$ ,  $Q$  e  $R$ . Os lados do triângulo  $PQR$  são:

a) proporcionais a  $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c}$ ,  $\frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{b}$  e  $\frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{a}$ .

b) proporcionais a  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

c) proporcionais a  $\frac{ab}{c}$ ,  $\frac{ac}{b}$  e  $\frac{bc}{a}$ .

d) iguais a  $r\sqrt{2}$ .

e) perpendiculares às faces do triedro.

- 222.** (ITA-78) Se numa esfera de raio  $R$ , circunscrevemos um cone reto cuja geratriz é igual ao diâmetro da base, então a expressão do volume deste cone em função do raio da esfera é dada por:

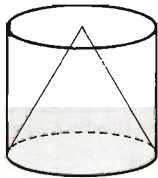
a)  $3 - R^3$

d)  $\frac{4\sqrt{3}}{3} \pi R^3$

b)  $\frac{3\sqrt{3}}{2} \pi R^3$

e) n.d.a.

c)  $3\sqrt{3} \pi R^3$

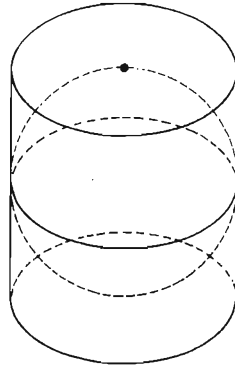
223. (PUC-SP-79) A soma de todas as arestas de um cubo mede  $24\text{ m}$ . O volume da esfera inscrita no cubo é:
- a)  $\frac{2}{3} \pi \text{ m}^3$       b)  $\frac{3}{4} \pi \text{ m}^3$       c)  $\frac{1}{2} \pi \text{ m}^3$       d)  $\frac{3}{2} \pi \text{ m}^3$       e)  $\frac{4}{3} \pi \text{ m}^3$
224. (U.MACK.-79) Vinte e sete esferas maciças de chumbo, de raio  $1$  metro, devem ser acondicionadas em uma única caixa, após o que, todo "espaço" restante da caixa deve ser completado com água. Dispondo-se somente de  $5$  caixas cúbicas distintas, aquela na qual o volume de água adicionada é mínimo, é  $a$  de capacidade, em metros cúbicos, igual a:
- a)  $108\pi$       b)  $27\pi$       c)  $36\pi$       d)  $72\pi$       e)  $81\pi$
225. (PUC-RS-80) O volume do cubo inscrito numa esfera de raio  $3$  é:
- a)  $24\sqrt{3}$       b)  $12\sqrt{3}$       c)  $8\sqrt{3}$       d)  $6\sqrt{3}$       e)  $2\sqrt{3}$
226. (ITA-80) Considere uma esfera inscrita num cone circular reto tal que a área da superfície total do cone é  $n$  vezes a área da superfície da esfera,  $n > 1$ . Se o volume da esfera é  $r \text{ cm}^3$  e se a área da base do cone é  $s \text{ cm}^2$ , o comprimento em centímetro da altura do cone é dado por:
- a)  $r/s$       b)  $(nr)/s$       c)  $(2nr)/s$       d)  $(3nr)/s$       e)  $(4nr)/s$
227. (U.F.UBERLÂNDIA-80) A área de uma esfera, a área total do cilindro equilátero circunscrito a ela e a área total do cone equilátero também circunscrito a essa esfera são proporcionais aos números:
- a)  $1, 2, 4$       b)  $3, 4, 5$       c)  $4, 6, 9$       d)  $1, 2, 3$       e)  $2, 4, 7$
228. (U.F.PE-81) Considere um tanque em forma de um cone invertido de raio de base  $6\text{ m}$  e altura  $8\text{ m}$ . Deixe-se cair dentro do tanque uma esfera de raio  $3\text{ m}$ . Assinale a alternativa correspondente à distância do centro da esfera ao vértice do cone.
- a)  $4\text{ m}$       b)  $2\text{ m}$       c)  $5\text{ m}$       d)  $10\text{ m}$       e)  $6\text{ m}$
229. (PUC-SP-82) Uma pirâmide quadrangular regular é inscrita num cubo de aresta  $a$ . A área total da pirâmide é igual a:
- a)  $a^2$       d)  $a^2(2 + \sqrt{5})$   
 b)  $a^2\sqrt{5}$       e)  $a^2(5 + \sqrt{5})$   
 c)  $a^2(1 + \sqrt{5})$
230. (U.F.RS-82) O cone e o cilindro da figura são circulares retos e têm a mesma base, altura e área lateral; se a geratriz do cone mede  $4$ , então a medida da altura é:
- 
- a) 1  
 b) 2  
 c) 3  
 d) 4  
 e) 5
231. (U.F.ES-82) Enche-se um tubo cilíndrico de altura  $h = 20\text{ cm}$  e raio da base  $r = 2\text{ cm}$  com esferas tangentes ao mesmo e tangentes entre si. O volume interior ao cilindro e exterior às esferas vale:
- a)  $\frac{102\pi}{3} \text{ cm}^3$       b)  $\frac{80\pi}{3} \text{ cm}^3$       c)  $40\pi \text{ cm}^3$       d)  $\frac{160\pi}{3} \text{ cm}^3$       e)  $80\pi \text{ cm}^3$
232. (CESGRANRIO-82) Uma cesta cilíndrica de  $2\text{ m}$  de altura e raio da base  $1\text{ m}$  está cheia de bolas de diâmetro igual à quarta parte de  $1\text{ m}$ . Se cerca de  $50\%$  da capacidade da cesta correspondem aos espaços vazios, o número mais aproximado de bolas que a cesta contém é:
- a) 100      b) 150      c) 215      d) 385      e) 625





241. (CESGRANRIO-87) Uma esfera está contida num cilindro circular reto e tangencia suas bases e sua superfície lateral, como se vê na figura. Então a razão entre a área da esfera e a área total do cilindro é:

- a)  $\frac{1}{2}$                       d)  $\frac{2}{\pi}$   
 b)  $\frac{2}{3}$                       e)  $\frac{\pi}{4}$   
 c)  $\frac{3}{4}$

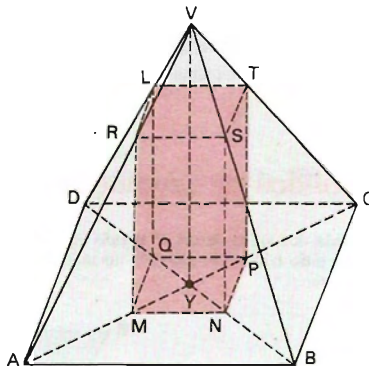


242. (FATEC-87) Seja  $g$  a geratriz de um cone circular reto inscrito num cilindro circular reto de altura  $h$  e raio da base  $3$ . Se a razão entre a área da superfície total do cone e a área da superfície total do cilindro é  $\frac{4}{7}$ , então  $g$  é igual a:

- a)  $-\frac{3}{8} + \frac{7}{8}h$                       d)  $-\frac{3}{7} + \frac{8h}{7}$   
 b)  $\frac{3}{8} + \frac{7}{8}h$                       e)  $\frac{3}{7} + \frac{8h}{7}$   
 c)  $\frac{8h}{7}$

243. (VUNESP-87) O quadrado  $MNPQ$  está situado na base (também um quadrado) da pirâmide reta  $VABCD$  e seus lados são paralelos aos respectivos de  $ABCD$ . Se os segmentos  $MR$ ,  $NS$ ,  $PT$  e  $QL$  são perpendiculares à base da pirâmide, se  $AM = MP = PC$  e se  $AB = 4\text{ cm}$  e  $VY = 3\text{ cm}$ , o volume do prisma  $MNPQRSTL$  abaixo é:

- a)  $\frac{32}{9}\text{ cm}^3$   
 b)  $\frac{14}{9}\text{ cm}^3$   
 c)  $\frac{30}{9}\text{ cm}^3$   
 d)  $\frac{24}{9}\text{ cm}^3$   
 e)  $\frac{34}{9}\text{ cm}^3$



244. (U.F.R.PE-87) Indique o valor da área lateral, em  $\text{cm}^2$ , do sólido cujos vértices são os centros de simetria das faces de um cubo de aresta medindo  $L\text{ cm}$ .

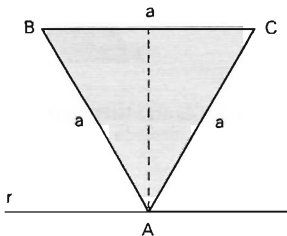
- a)  $L\sqrt{3}\text{ cm}^2$                       d)  $5L^2\text{ cm}^2$   
 b)  $L^2\sqrt{3}\text{ cm}^2$                       e)  $3L^2\text{ cm}^2$   
 c)  $L^2\sqrt{2}\text{ cm}^2$

245. (U.F.VIÇOSA-89) Uma esfera tem raio não nulo  $r$  e volume  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ . O volume do cubo circunscrito a ela, em função de  $V$ , é:
- a)  $\frac{3V}{\pi}$       b)  $\frac{4V}{\pi}$       c)  $\frac{5V}{\pi}$       d)  $\frac{6V}{\pi}$       e)  $\frac{2V}{\pi}$
246. (ITA-89) Os lados congruentes de um triângulo isósceles formam um ângulo de  $30$  graus e o lado oposto a este ângulo mede  $x$  cm. Este triângulo é a base de uma pirâmide de altura  $H$  cm, que está inscrita em um cilindro de revolução. Deste modo, o volume  $V$ , em centímetros cúbicos, deste cilindro é igual a:
- a)  $2\pi x^2 H$       b)  $\frac{1}{3} \pi x^2 H$       c)  $\frac{2}{3} \pi x^2 H$       d)  $3\pi x^2 H$       e)  $\pi x^2 H$
247. (ITA-89) Um cone e um cilindro, ambos retos, possuem o mesmo volume e bases idênticas. Sabendo-se que ambos são inscritíveis em uma esfera de raio  $R$ , então a altura  $H$  do cone será igual a:
- a)  $\frac{6}{5} R$       b)  $\frac{3}{2} R$       c)  $\frac{4}{3} R$       d)  $\frac{2}{3} R$       e)  $\frac{7}{5} R$
248. (U.F.MG-90) A razão entre as áreas totais de um cubo e do cilindro reto nele inscrito, nessa ordem, é:
- a)  $\frac{2}{\pi}$       b)  $\frac{3}{\pi}$       c)  $\frac{4}{\pi}$       d)  $\frac{5}{\pi}$       e)  $\frac{6}{\pi}$
249. (U.E.CE-91) A área total, em  $cm^2$ , de um cubo inscrito numa esfera de raio  $2$  cm é:
- a) 16      b) 32      c)  $16\sqrt{3}$       d)  $32\sqrt{3}$
250. (U.MACK.-75) A razão entre o volume de um cone, de altura igual a 4 vezes o raio da esfera inscrita, e o volume desta esfera é:
- a) 2      b) 3      c) 4      d)  $\frac{4}{3}$       e)  $\frac{5}{4}$
251. (U.F.BA-92) Considerando-se um cubo de aresta  $2\sqrt{3}$  cm inscrito numa esfera, pode-se afirmar:
- a) O volume da esfera é  $36\pi$   $cm^3$ .  
 b) O volume do cone circular reto inscrito no cubo é  $6\sqrt{3}\pi$   $cm^3$ .  
 c) A área lateral do cilindro equilátero circunscrito na esfera é  $18\pi$   $cm^2$ .  
 d) A área total do tetraedro de aresta igual à do cubo é  $12\sqrt{3}$   $cm^2$ .  
 e) O volume do sólido limitado por uma face do cubo e a superfície esférica é  $(6\pi - 4\sqrt{3})$   $cm^3$ .

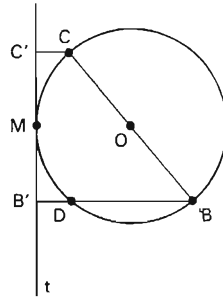
## Superfícies e sólidos de revolução

252. (PUC-SP-71) A medida dos lados de um triângulo equilátero  $ABC$  é  $a$ . O triângulo  $ABC$  gira em torno de uma reta  $r$  do plano do triângulo, paralelo ao lado  $BC$  e passando pelo vértice  $A$ . O volume gerado por esse triângulo mede:

- a)  $\frac{\pi a^3}{3}$   
 b)  $\frac{\pi a^3}{2}$   
 c)  $\pi a^3$   
 d)  $\frac{3\pi a^3}{2}$   
 e)  $\frac{\pi a^3}{5}$

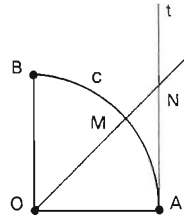


253. (ITA-73) Seja  $\overline{B'C'}$  a projeção do diâmetro  $\overline{BC}$  de um círculo de raio  $r$  sobre a reta tangente  $t$  por um ponto  $M$  deste círculo. Seja  $2k$  a razão da área total do tronco do cone gerado pela rotação do trapézio  $BCB'C'$  ao redor da reta tangente  $t$  e área do círculo dado. Qual é o valor de  $k$  para que a medida do segmento  $MB'$  seja igual à metade do raio  $r$ ?



- a)  $k = \frac{11}{3}$       d)  $k = \frac{1}{2}$   
 b)  $k = \frac{15}{4}$       e) nenhuma das respostas anteriores  
 c)  $k = 2$

254. (ITA-74) Seja  $c$  um quarto de circunferência  $\widehat{AB}$  de raio  $R$  e centro  $O$ , e seja  $t$  a reta tangente a  $c$  em  $A$ . Traça-se pelo centro  $O$  de  $c$  uma reta que corta  $c$  num ponto  $M$ , e corta a reta tangente num ponto  $N$ , distintos de  $A$ . Seja  $k$  a razão entre o volume gerado pelo setor  $OAM$  e o volume gerado pelo triângulo  $OAN$ , ambos obtidos girando-se de  $2\pi$  em torno de  $AO$ . O comprimento do segmento  $AN$  é igual ao raio  $R$  se:



- a)  $1 < k < 2,5$       d)  $0 < k < 1,5$   
 b)  $2,5 \leq k \leq 3$       e) n.d.r.a.  
 c)  $0 < k \leq 2$

255. (ITA-75) As medidas dos catetos de um triângulo retângulo são  $(\sin x) \text{ cm}$  e  $(\cos x) \text{ cm}$ . Um estudante calculou o volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em torno da hipotenusa, e obteve como resultado  $\pi \text{ cm}^3$ .

Considerando este resultado como certo, podemos afirmar que:

- a)  $x = \frac{\pi}{6}$       b)  $x = \frac{\pi}{3}$       c)  $x = \frac{\pi}{4}$       d)  $x = \frac{\pi}{5}$       e) n.d.a.

256. (ITA-77) Considere um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência de raio  $R$  tal que a projeção de um dos catetos sobre a hipotenusa vale  $\frac{R}{m}$  ( $m \geq 1$ ). Considere a esfera gerada pela rotação desta circunferência em torno de um de seus diâmetros. O volume da parte desta esfera, que não pertence ao sólido gerado pela rotação do triângulo em torno da hipotenusa, é dado por:

- a)  $\frac{2}{3} \pi R^3 \left( \frac{m-1}{m} \right)^2$       c)  $\frac{2}{3} \pi R^3 \left( \frac{m+1}{m} \right)^2$       e) nenhuma das alternativas anteriores  
 b)  $\frac{2}{3} \pi R^3 \left( 1 - \left( \frac{m+1}{m} \right)^2 \right)$       d)  $\frac{2}{3} \pi R^3 \left( 1 + \left( \frac{m-1}{m} \right)^2 \right)$

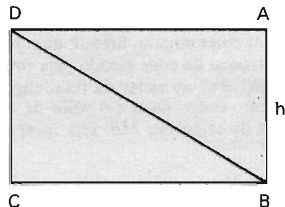
257. (PUC-SP-80) A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 2 e um dos ângulos mede  $60^\circ$ . Girando-se o triângulo em torno do cateto menor, obtém-se um cone cujo volume é igual a:

- a)  $\pi$       b)  $\frac{\pi \sqrt{3}}{3}$       c)  $\frac{\pi \sqrt{3}}{6}$       d)  $\frac{\pi}{2}$       e)  $\frac{\pi \sqrt{2}}{3}$

258. (V.UNIF.RS-80) O volume do sólido gerado pela revolução de um triângulo equilátero de lado  $a$  em torno de um de seus lados é:

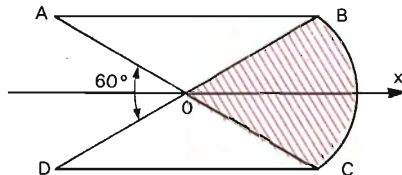
- a)  $\frac{1}{4} \pi a^3$       b)  $\frac{1}{3} \pi a^3$       c)  $\frac{1}{2} \pi a^3$       d)  $\frac{3}{4} \pi a^3$       e)  $\frac{4}{3} \pi a^3$

259. (U.MACK.-81) Na figura ao lado o retângulo  $ABCD$  faz uma rotação completa em torno de  $\overline{AB}$ . A razão entre os volumes gerados pelos triângulos  $ABD$  e  $BCD$  é:



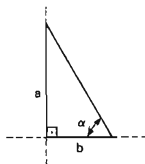
- a) 1  
b)  $\frac{1}{2}$   
c) 3  
d)  $\frac{1}{3}$   
e)  $\frac{1}{4}$

260. (ITA-82) A figura hachurada abaixo é a seção transversal de um sólido de revolução em torno do eixo  $x$ . A parte tracejada é formada por um setor circular de raio igual a  $l$  e ângulo igual a  $60^\circ$ . O segmento de reta  $AB$  é paralelo ao eixo  $x$ . A área da superfície total do sólido mede:



- a)  $\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) \pi$   
b)  $\left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) \pi$   
c)  $\left(\sqrt{3} + \frac{5}{2}\right) \pi$   
d)  $\left(\sqrt{3} - \frac{5}{2}\right) \pi$   
e)  $\frac{5\pi}{2}$

261. (U.F.RS-83) Na figura, o triângulo tem catetos  $a$  e  $b$ . Se  $V_a$  e  $V_b$  são os volumes dos sólidos gerados pelas rotações de  $360^\circ$  do triângulo em torno de  $a$  e  $b$ , respectivamente, e  $V_b = 2 V_a$ , então  $\operatorname{tg} \alpha$  é:



- a)  $\frac{1}{2}$   
b)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   
c)  $\sqrt{2}$   
d) 2  
e) 4

262. (ITA-83) Ao girarmos o gráfico da função  $f(x) = \begin{cases} x & ; x \in [0; 1] \\ \sqrt{2x - x^2} & ; x \in (1; 2] \end{cases}$

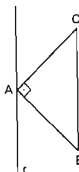
em torno do eixo das abscissas (eixo dos  $x$ ), obtemos uma superfície de revolução cujo volume é:

- a)  $\frac{\pi}{3}$   
b)  $\frac{\pi}{2}$   
c)  $\pi$   
d)  $2\pi$   
e)  $3\pi$

263. (U.F.PE-84) Considere um quadrado de lado  $\ell$  e uma reta contendo uma de suas diagonais. Assinale a alternativa correspondente ao volume do sólido que obtemos quando giramos o quadrado de  $180^\circ$  em torno dessa reta.

- a)  $\pi \ell^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$   
b)  $\pi \ell^3 \frac{\sqrt{2}}{2}$   
c)  $\pi \ell^3 \frac{\sqrt{1}}{2}$   
d)  $\pi \ell^3 \frac{\sqrt{2}}{8}$   
e)  $\pi \ell^3 \frac{\sqrt{2}}{4}$

264. (U.F.MG-87) Na figura, a reta  $r$  é paralela a  $BC$ , e o triângulo  $ABC$  é tal que  $\widehat{BAC} = 90^\circ$ ,  $BC = a$  e a altura relativa à hipotenusa é  $h$ . Então, o volume do sólido gerado pela rotação do triângulo em torno de  $r$  é:



- a)  $\pi h^2 a$   
b)  $\frac{2}{3} \pi h^2 a$   
c)  $\pi a^2 h$   
d)  $\frac{\pi}{3} a^2 h$   
e)  $\frac{\pi}{3} h^2 a$

265. (UNICAP-87) Faz-se girar, de  $360^\circ$ , um triângulo retângulo de catetos medindo  $1\text{ cm}$  e  $3\text{ cm}$  em torno do cateto de maior medida. O volume do sólido obtido por este procedimento é:

- a)  $\frac{\pi}{3}\text{ cm}^3$       b)  $3\pi\text{ cm}^3$       c)  $\pi\text{ cm}^3$       d)  $\frac{2}{3}\pi\text{ cm}^3$       e)  $\frac{3}{2}\pi\text{ cm}^3$

266. (CESGRANRIO-89) Um triângulo retângulo, de lados  $3, 4$  e  $5$ , gira em torno do seu maior cateto, gerando um cone de revolução. O volume desse cone mede:

- a)  $10\pi$       b)  $12\pi$       c)  $15\pi$       d)  $18\pi$       e)  $20\pi$

267. (U.F.MG-90) Os lados de um triângulo isósceles medem  $5\text{ cm}$ ,  $6\text{ cm}$  e  $5\text{ cm}$ . O volume do sólido que se obtém girando-o em torno de sua base, em  $\text{cm}^3$ , é:

- a)  $16\pi$       b)  $24\pi$       c)  $32\pi$       d)  $48\pi$       e)  $75\pi$

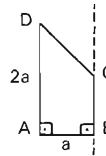
268. (ITA-90) Considere a região do plano cartesiano  $xOy$  definida pelas desigualdades

$$x - y \leq 1, x + y \geq 1 \text{ e } (x - 1)^2 + y^2 \leq 2.$$

O volume do sólido gerado pela rotação desta região em torno do eixo  $x$  é igual a:

- a)  $\frac{4}{3}\pi$       b)  $\frac{8}{3}\pi$       c)  $\frac{4}{3}(2 - \sqrt{2})\pi$       d)  $\frac{8}{3}(\sqrt{2} - 1)\pi$       e) n.d.a.

269. (UNESP-91) No trapézio  $ABCD$  da figura os ângulos internos em  $A$  e  $B$  são retos, e o ângulo interno em  $D$  é tal que sua tangente vale  $\frac{5}{6}$ . Se  $\overline{AD} = 2 \cdot \overline{AB}$ , o volume do sólido obtido ao se girar o trapézio em torno da reta por  $B$  e  $C$  é dado por:



- a)  $\left(\frac{3}{4}\right)\pi a^3$       b)  $\left(\frac{5}{8}\right)\pi a^3$       c)  $\left(\frac{6}{5}\right)\pi a^3$       d)  $\left(\frac{20}{13}\right)\pi a^3$       e)  $\left(\frac{8}{5}\right)\pi a^3$

270. (ITA-91) Considere a região do plano cartesiano  $xy$  definido pela desigualdade:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 \leq 0.$$

Quando esta região rodar um ângulo de  $\frac{\pi}{3}$  radianos em torno da reta  $y + x + 1 = 0$ , ela irá gerar um sólido cujo volume é igual a:

- a)  $\frac{4\pi}{3}$       b)  $\frac{2\pi}{3}$       c)  $\frac{\pi}{3}$       d)  $\frac{4\pi}{9}$       e) n.d.a.

271. (U.F.MG-92) Considerem-se um retângulo  $ABCD$  e dois cilindros: um obtido girando-se  $ABCD$  em torno de  $\overline{AB}$  e o outro, girando-se o retângulo em torno de  $\overline{BC}$ .

A razão entre a soma dos volumes dos dois cilindros e a área do retângulo, nessa ordem, é  $10\pi$ .

O perímetro do retângulo é:

- a) 10      b) 20      c) 30      d) 40      e) 50

272. (ITA-92) Num cone de revolução, o perímetro da seção meridiana mede  $18\text{ cm}$  e o ângulo do setor circular mede  $288^\circ$ . Considerando-se o tronco de cone cuja razão entre as áreas das bases é  $4/9$ , então sua área total mede:

- a)  $16\pi\text{ cm}^2$       b)  $\frac{308\pi}{9}\text{ cm}^2$       c)  $\frac{160\pi}{3}\text{ cm}^2$       d)  $\frac{100\pi}{9}\text{ cm}^2$       e) n.d.a.

273. (ITA-92) Um cone de revolução está circunscrito a uma esfera de raio  $R\text{ cm}$ . Se a altura do cone for igual ao dobro do raio da base, então a área de sua superfície lateral mede:

- a)  $\frac{\pi}{4}(1 + \sqrt{5})^2 R^2\text{ cm}^2$       c)  $\frac{\pi\sqrt{5}}{4}(1 + \sqrt{5}) R^2\text{ cm}^2$       e) n.d.a.  
 b)  $\frac{\pi\sqrt{5}}{4}(1 + \sqrt{5})^2 R^2\text{ cm}^2$       d)  $\pi\sqrt{5}(1 + \sqrt{5}) R^2\text{ cm}^2$

# Respostas dos Testes

1. c	c) F	68. a	107. d	146. e	181. d	216. b	e) V
2. e	d) F	69. e	108. c	147. b	182. a	217. c	252. b
3. b	e) V	70. a	109. d	148. a	183. e	218. d	253. b
4. 1ª a	36. a) F	71. e	110. a	149. a	184. c	219. d	254. e
2ª d	b) F	72. b	111. c	150. c	185. d	220. d	255. e
3ª e	c) V	73. a	112. d	151. c	186. d	221. d	256. d
4ª b	d) F	74. d	113. b	152. c	187. c	222. a	257. a
5. c	e) F	75. b	114. c	153. b	188. a	223. e	258. a
6. e	37. c	76. a	115. c	154. a	189. c	224. d	259. b
7. a	38. e	77. d	116. e	155. b	190. c	225. a	260. e
8. d	39. e	78. a	117. e	156. b	191. d	226. d	261. d
9. c	40. e	79. a	118. a	157. d	192. a) F	227. d	262. c
10. d	41. c	80. a	119. e	158. d	b) F	228. c	263. d
11. c	42. d	81. c	120. a	159. d	c) V	229. c	264. b
12. b	43. c	82. d	121. a	160. c	d) V	230. b	265. c
13. e	44. c	83. b	122. a	161. e	e) F	231. b	266. b
14. b	45. d	84. d	123. e	162. b	193. d	232. d	267. c
15. a	46. b	85. b	124. a	163. a) V	194. b	233. b	268. b
16. e	47. a	86. d	125. b	b) V	195. d	234. d	269. e
17. c	48. b	87. a	126. d	c) F	196. b	235. d	270. d
18. b	49. a	88. d	127. a	d) V	197. e	236. e	271. b
19. c	50. b	89. e	128. e	e) F	198. a	237. a	272. b
20. d	51. b	90. a	129. a	164. b	199. c	238. a	273. b
21. a	52. e	91. b	130. b	165. a	200. c	239. e	
22. a	53. e	92. a	131. d	166. a	201. b	240. a	
23. a	54. c	93. a	132. e	167. a	202. e	241. b	
24. e	55. b	94. a	133. a	168. e	203. d	242. e	
25. d	56. d	95. e	134. b	169. a	204. e	243. a	
26. a	57. a	96. a	135. c	170. a	205. c	244. b	
27. c	58. e	97. d	136. c	171. a	206. d	245. d	
28. e	59. e	98. b	137. d	172. d	207. a	246. b	
29. e	60. a	99. e	138. a	173. e	208. b	247. a	
30. b	61. e	100. c	139. b	174. a	209. b	248. c	
31. b	62. d	101. e	140. b	175. d	210. b	249. b	
32. a, b, d	63. b	102. e	141. b	176. c	211. a	250. a	
33. b	64. b	103. d	142. e	177. e	212. b	251. a) V	
34. e	65. d	104. d	143. a	178. d	213. b	b) F	
35. a) V	66. d	105. b	144. c	179. b	214. e	c) V	
b) V	67. d	106. c	145. e	180. c	215. c	d) V	

Esta obra é distribuída **Gratuitamente** pela Equipe Digital Source e Viciados em Livros para proporcionar o benefício de sua leitura àqueles que não podem comprá-la ou àqueles que necessitam de meios eletrônicos para ler. Dessa forma, a venda deste e-book ou até mesmo a sua troca por qualquer contraprestação é totalmente condenável em qualquer circunstância. A generosidade e a humildade é a marca da distribuição, portanto distribua este livro livremente.

Após sua leitura considere seriamente a possibilidade de adquirir o original, pois assim você estará incentivando o autor e a publicação de novas obras.

Se quiser outros títulos nos procure :

[http://groups.google.com/group/Viciados\\_em\\_Livros](http://groups.google.com/group/Viciados_em_Livros), será um prazer recebê-lo em nosso grupo.



[http://groups.google.com/group/Viciados\\_em\\_Livros](http://groups.google.com/group/Viciados_em_Livros)

<http://groups.google.com/group/digitalsource>

Este livro é distribuído GRATUITAMENTE pela equipe DIGITAL SOURCE e VICIADOS EM LIVROS com a intenção de facilitar o acesso ao conhecimento a quem não pode pagar e também proporcionar aos Deficientes Visuais a oportunidade de apreciar mais uma manifestação do pensamento humano.

Se você tirar algum proveito desta obra, considere seriamente a possibilidade de adquirir o original.

Incentive o autor e a publicação de novas obras!

Se quiser outros títulos nos procure.

Será um prazer recebê-lo em nosso grupo.

[http://groups.google.com/group/Viciados\\_em\\_Livros](http://groups.google.com/group/Viciados_em_Livros)



<http://groups.google.com/group/digitalsource>

